MATEMÁTICAS CCSS

2º de Bachillerato Moisés López Caeiro / Mara Rodríguez Cancio

Enlaces QR a la web de Matemáticas

Página o App	Enlace QR
FisQuiMat: Matemáticas 2º Bachillerato • https://sites.google.com/site/smmfisicayquimica/matematicas-2o-bach	
Actividades de 2º Bachillerato • https://sites.google.com/site/smmfisicayquimica/matematicas-2o-bach/actividades-pau	
DESMOS • https://www.desmos.com/calculator?lang=es	
DESMOS 3D • https://www.desmos.com/3d?lang=es	
DESMOS Geometría • https://www.desmos.com/geometry?lang=es	
MatrixCalc: Calculadora matricial • http://matrixcalc.org/es/slu.html	

George Pólya

MATEMÁTICAS

https://sites.google.com/site/smmfisicayquimica/matematicas-1o-bach
https://sites.google.com/site/smmfisicayquimica/matematicas-2o-bach

Resolución de problemas de Matemáticas

Planificación de la resolución de un problema de Matemáticas	
Secuencia	**Etapas**
Definición del problema: Selección de la información pertinente.	• **Lee detenida y comprensivamente el enunciado**. ¿Entiendes todas las palabras del enunciado? • ¿Se puede reformular el problema de una forma diferente? Intenta reformular el enunciado con tus propias palabras. • **¿Cuáles son los datos, lo desconocido (las incógnitas) y las condiciones?** • **Elige los símbolos y las unidades apropiadas.** • **Define el apartado o apartados en que se descompone.**
Planificación del problema: Elaboración del esquema de resolución.	• **¿Qué sé de lo que me están preguntando? Revisa la teoría pertinente.** • **Escribe las ecuaciones implicadas.** • Identifica los conceptos útiles. • ¿Qué sé de lo que me piden? Hazte la preguntas necesarias. • Piensa en una imagen o diagrama. **Representa gráficamente los fenómenos implicados**. • ¿Es parecido a otros problemas ya resueltos? ¿Recuerdas algún problema relacionado o similar, aunque sea más sencillo? • ¿Sabes a dónde quieres llegar? ¿Tienes claro el objetivo? • ¿Tengo información y datos suficientes para encontrar la solución? • Piensa en cómo conectar los datos con las incógnitas.
Ejecución: Resolución propiamente dicha. Es una solución provisional.	• **Resuelve las ecuaciones, primero simbólicamente, sin sustituir cantidades numéricas hasta el último momento**. Así operas con la calculadora una sola vez y evitarás arrastrar errores numéricos. • **Verifica** cada parte del problema (unidades, cálculo, etc). • ¿Has utilizado todos los datos? ¿Has tenido en cuenta todas las condiciones y todos los conceptos involucrados en el problema? • Si el problema propuesto no puede resolverse, acomete un problema relacionado más simple, formulando las hipótesis necesarias. A partir de aquí intenta aproximarte al problema original. Piensa de nuevo en los datos que necesitas para hallar las incógnitas. • **No tengas miedo de volver a empezar desde cero. ¿Existe otro método de resolución?**
Revisión: Valoración global del problema.	• **¿Es razonable el resultado?¿Tiene sentido?** • ¿Puedes comprobar el resultado? • Pensar en posibles aplicaciones del problema. • ¿Puedes utilizar el resultado o el método para resolver otro problema?

Bibliografía:

DE GUZMÁN OZÁMIZ, M. *Cómo hablar, demostrar y resolver en Matemáticas*, Anaya

PÓLYA, George, *How to Solve it*, Stanford University

1º Bachillerato 2º Bachillerato

Contenidos

Parte 1 Álgebra

Matrices. Propiedades y operaciones básicas. Producto de matrices y matriz traspuesta.

Matriz identidad y cálculo de la matriz inversa. Método de Gauss-Jordan.

Ecuaciones matriciales y sistemas de ecuaciones matriciales.

Aplicaciones de las matrices a las Ciencias Sociales.

Determinantes. Regla de Sarrus y expansión de Laplace.

Método de Gauss para calcular determinantes.

Cálculo de la matriz inversa por determinantes.

Ecuaciones matriciales. Método directo y método por la matriz inversa.

Rango de una matriz y método de Gauss para calcular el rango.

Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss.

Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales a las Ciencias Sociales.

Programación lineal. Graficación de inecuaciones. Regiones factibles acotadas y no acotadas.

Resolución analítica de un problema de programación lineal. Problemas no literales. Problemas con infinitas soluciones.

Programación lineal. Problemas de aplicación a las ciencias sociales: Beneficios y costes. El problema de la dieta. El problema del transporte.

Parte 2 Análisis

Funciones, sucesiones, límites y continuidad. Funciones a trozos.

Cálculo de límites. Cálculo de indeterminaciones. Cálculo de asíntotas.

Resolución del dominio y asíntotas en funciones definidas en intervalos.

Tipos de discontinuidad: de salto finito, de salto infinito y evitables.

Derivadas elementales. Significado geométrico. Pendiente y tasa de variación.

Derivadas inversas. Regla de la cadena. Técnicas de derivación implícita y logarítmica.

Aplicaciones de las derivadas. Monotonía y curvatura. Extremos y puntos de inflexión.

Optimización (extremos absolutos). Funciones elementales. Simetría y periodicidad.

Derivabilidad de funciones a trozos.

Problemas de optimización en funciones a trozos.

Integral indefinida. Integración elemental.

Integral definida. Cálculo de áreas.

Parte 3 Probabilidad y Estadística

Probabilidad. Números combinatorios.

Propiedades de la probabilidad. Álgebra de sucesos. Leyes de Morgan.

Regla de Laplace. Axiomas de Kolmogórov.

Probabilidad condicionada. Independencia de sucesos. Tablas de contingencia.

Teorema de la probabilidad total. Teorema de Bayes. Aplicaciones

Distribuciones de probabilidad. Muestreo. Media y desviación típica de una distribución.

Experimento de Bernouilli. Distribución binomial. Aplicaciones.

Distribución normal. Distribución normal estándar. Tipificación. Uso de la tabla N(0,1).

Aproximación de la binomial por la normal. Teorema de Moïvre y corrección de Yates.

Distribuciones muestrales. Intervalos característicos $1-\alpha$.

Distribución muestral de la media.

Intervalo de confianza para la media poblacional. Error de estimación. Tamaño mínimo muestral.

Distribución muestral de la proporción.

Intervalo de confianza para la proporción. Error de estimación. Tamaño mínimo muestral.

Ponderación de las calificaciones

Ponderación de las evaluaciones:	Dos controles por evaluación:
1ª Evaluación: **30%**	Actividad inicial: **5%** - Control 1: **45%** - Control 2: **50%**
2ª Evaluación: **30%**	Control 1: **50%** - Control 2: **50%**
3ª Evaluación: **40%**	Control 1: **40%** - Control 2: **60%**

I. DEFINICIÓN

Se dice que una matriz A de dimensión $m \times n$ es un conjunto de elementos dispuestos en m filas y n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

De forma abreviada se escribe $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ donde a_{ij} es el elemento situado en la fila *i* y en la columna *j*.

II. COMPARACIÓN DE MATRICES

Se dice que dos matrices A y B son iguales si tienen la misma dimensión y, además, los elementos coinciden término a término.

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$$

III. CLASIFICACIÓN

Podemos clasificar los tipos de matrices según sus dimensiones:

1. **Matriz fila.** Tiene 1 fila y *n* columnas, i.e., su dimensión es $1 \times n$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow B \in M_{1\times 3}$$

2. **Matriz columna.** Tiene *m* filas y 1 columna, i.e., su dimensión es $m \times 1$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow C \in M_{3\times 1}$$

3. **Matriz rectangular.** Tiene distinto número de filas que de columnas, i.e., su dimensión es $m \times n$ donde $m \neq n$.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow D \in M_{2\times 3}$$

4. **Matriz cuadrada.** Tiene el mismo número de filas que de columnas, i.e., su dimensión es $n \times n$. En este caso se dice que la matriz es de orden *n*.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow E \in M_{3\times 3}$$

La **diagonal principal** de una matriz cuadrada está formada por los elementos a_{ii}.

$$E = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 4 & \mathbf{5} & 6 \\ 7 & 8 & \mathbf{9} \end{pmatrix} \rightarrow E \in M_{3\times 3}$$

Las matrices cuadradas se pueden clasificar según la distribución de sus elementos:

a. **Matriz diagonal.** Los elementos que no pertenecen a la diagonal principal son nulos.

$$\boxed{a_{ij} = 0 \quad i \neq j}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b. **Matriz escalar.** Matriz diagonal tal que los elementos de la diagonal principal iguales.

$$\boxed{\underbrace{a_{ij} = 0 \quad i \neq j}_{Matriz\ cuadrada} \quad \wedge \quad a_{ii} = \lambda}$$

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

c. **Matriz identidad.** Matriz escalar tal que los elementos de la diagonal principal iguales a uno.

$$\boxed{\underbrace{\underbrace{a_{ij} = 0 \quad i \neq j}_{Matriz\ cuadrada} \quad \wedge \quad a_{ii} = \lambda}_{Matriz\ escalar} \quad \wedge \quad \lambda = 1}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d. **Matriz triangular superior.** Matriz cuadrada que tiene todos los elementos que están por debajo de la diagonal principal nulos.

$$\boxed{a_{ij} = 0 \quad i > j}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

e. **Matriz triangular inferior.** Matriz cuadrada que tiene todos los elementos que están por encima de la diagonal principal nulos.

$$\boxed{a_{ij} = 0 \quad i < j}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

5. Matriz nula. Tiene todos sus elementos nulos.

$$\boxed{a_{ij} = 0 \quad \forall i, j}$$

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

IV. OPERACIONES

1. Suma de matrices

La suma de dos matrices $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ y $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ de la misma dimensión $m\times n$ es otra matriz $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$ de la misma dimensión $m\times n$ definida como $C=A+B$ tal que $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$

Ejemplo.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 4 & 9 & -2 \end{pmatrix} \quad C=A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 4 & 9 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 8 & 14 & 4 \end{pmatrix}$$

Propiedades.

i. Conmutativa:

$$A+B=B+A$$

ii. Asociativa:

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

iii. Elemento neutro (matriz nula)

$$\forall A\in M_{m\times n}\ \exists O\in M_{m\times n} \mid A+O=O+A=A$$

iv. Elemento opuesto

$$\forall A\in M_{m\times n}\ \exists(-A)\in M_{m\times n} \mid A+(-A)=(-A)+A=O$$

2. Diferencia de matrices

La diferencia de dos matrices $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ y $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ de la misma dimensión $m\times n$ es otra matriz $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$ de la misma dimensión $m\times n$ definida como $C=A-B$ tal que $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$

Ejemplo.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 4 & 9 & -2 \end{pmatrix} \quad C=A-B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 4 & 9 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 10 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Producto de número y matriz

El producto de un número real k por una matriz $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ es otra matriz $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$ de la misma dimensión $m\times n$ definida como $C=k\cdot A$ tal que $c_{ij}=k\cdot a_{ij}$

Ejemplo.

- $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad k=3 \qquad C=k\cdot A=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$
- $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad k=-\frac{1}{3} \qquad C=k\cdot A=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & -1 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -2 \end{pmatrix}$

Propiedades.

i. Distributiva del producto de un número por una suma de matrices.

$$a\cdot(A+B)=a\cdot A+a\cdot B$$

ii. Distributiva del producto de una suma de números por una matriz.

$(a+b)\cdot A=a\cdot A+b\cdot A$

iii. Asociativa respecto a los números.

$(a\cdot b)\cdot A=a\cdot(b\cdot A)$

iv. Elemento unidad.

$1\cdot A=A$

4. Producto de matrices

El producto de dos matrices $A=\left(a_{ik}\right)_{m\times n}$ de dimensión $m\times n$ y $B=\left(b_{kj}\right)_{n\times p}$ de dimensión $n\times p$ es otra matriz $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times p}$ de dimensión $m\times p$ definida como $C=A\cdot B$ tal que $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}$

Ejemplo.

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\end{pmatrix}\quad C=A\cdot B=\begin{pmatrix}11&14&17&20\\23&30&37&44\\35&46&57&68\end{pmatrix}$$

El elemento c_{23} se obtiene multiplicando los elementos de la segunda fila de la matriz A por los elementos de la tercera columna de la matriz B, i.e., $c_{23}=a_{21}\cdot b_{13}+a_{22}\cdot b_{23}=3\cdot 3+4\cdot 7=37$

El elemento c_{34} se obtiene multiplicando los elementos de la tercera fila de la matriz A por los elementos de la tercera columna de la matriz B, i.e., $c_{34}=a_{31}\cdot b_{14}+a_{32}\cdot b_{24}=5\cdot 4+6\cdot 8=68$

NOTA.

Para multiplicar dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda matriz.

La matriz producto resultante tiene el número de filas de la primera matriz y el número de columnas de la segunda matriz.

$$\left.\begin{array}{l}A\in M_{m\times n}\\B\in M_{n\times p}\end{array}\right\}\rightarrow C=A\cdot B\in M_{m\times p}\quad tal\ que\quad m\times\underbrace{n\cdot n}_{Condición}\times p\rightarrow\underbrace{m\times p}_{Resultado}$$

Propiedades.

i. Asociativa:

$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$ donde $A\in M_{m\times n}$, $B\in M_{n\times p}$, $C\in M_{p\times q}$

ii. Distributiva:

- *Por la izquierda:* $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$ donde $A\in M_{m\times n}$, $B\in M_{n\times p}$, $C\in M_{n\times p}$
- *Por la derecha:* $(B+C)\cdot A=B\cdot A+C\cdot A$ donde $B\in M_{m\times n}$, $C\in M_{m\times n}$, $A\in M_{n\times p}$

iii. Elemento neutro (matriz identidad)

$\forall A\in M_{m\times n}\ \exists I_n\in M_{n\times n},I_m\in M_{m\times m}\mid I_m\cdot A=A\cdot I_n=A$

NOTA.

El producto de matrices NO tiene la propiedad conmutativa. Si existen dos matrices A y B tales que $A\cdot B=B\cdot A$ se dice que A y B son conmutativas entre sí.

V. MATRIZ TRASPUESTA

La matriz traspuesta A^t de una matriz A de dimensión $m \times n$ es una matriz de dimensión $n \times m$ tal que $A = (a_{ij}) \rightarrow A^t = (a_{ji})$, i.e., las filas de A^t son las columnas de A y viceversa.

Ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Propiedades.

i. La matriz traspuesta de la matriz traspuesta es la matriz original.

$$(A^t)^t = A$$

ii. La matriz traspuesta de la suma de dos matrices es la suma de las matrices traspuestas.

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

iii. Puesto que el producto de matrices no tiene la propiedad conmutativa, la matriz traspuesta del producto de matrices es el producto invertido de las matrices traspuestas.

$$(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$$

VI. MATRIZ INVERSA

La matriz inversa de una matriz cuadrada A de orden *n* es otra matriz cuadrada del mismo orden A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ siendo I_n la matriz identidad de orden *n*.

Las matrices cuadradas que tienen matriz inversa se llaman matrices regulares. Aquellas matrices que no tienen matriz inversa se llaman matrices singulares.

Propiedades.

i. La matriz inversa de la matriz inversa es la matriz original.

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

ii. Puesto que el producto de matrices no tiene la propiedad conmutativa, la matriz inversa del producto de matrices es el producto invertido de las matrices inversa.

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

iii. La matriz inversa de la matriz traspuesta de una matriz es la matriz traspuesta de la matriz inversa.

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

VII. MÉTODO DE GAUSS - JORDAN PARA EL CÁLCULO DE LA MATRIZ INVERSA

El método de Gauss-Jordan se utiliza para hallar la matriz inversa consiste en transformar la matriz original en la matriz identidad mediante las transformaciones elementales. Dichas transformaciones son:

1. Intercambiar el orden la fila *i* por la fila *j* $(F_i \leftrightarrow F_j)$
2. Sustituir la fila *i* por el producto de dicha fila *i* por un número real *a* $(F_i \rightarrow a \cdot F_i)$
3. Sustituimos la fila *i* o la fila *j* por una combinación lineal de ambas $(F_i \rightarrow a \cdot F_i + b \cdot F_j)$

Ejemplo 1. Calcula la matriz inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Solución. La matriz A no tiene matriz inversa porque no es una matriz cuadrada.

Ejemplo 2. Calcula la matriz inversa de la matriz $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3\to F_3-7\cdot F_1]{F_2\to F_2-4\cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3\to F_3-2\cdot F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

La matriz B no tiene matriz inversa porque al realizar las transformaciones elementales se obtiene una fila con todos sus elementos nulos.

Ejemplo 3. Calcula la matriz inversa de la matriz $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & -1 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3\to F_3+3\cdot F_1]{F_2\to F_2-2\cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3\to F_3+F_2]{F_1\to F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 7 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2\to F_2-5\cdot F_3]{F_1\to F_1+7\cdot F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 10 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2\to -F_2 \\ F_3\to -F_3}]{F_1\to \frac{1}{2}\cdot F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & 7/2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to A^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 7/2 \\ 7 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

BOLETÍN: MATRICES, ECUACIONES MATRICIALES Y APLICACIONES

Operaciones básicas con matrices

1. Calcula los coeficientes de una matriz de orden 3×3 a partir de su definición:

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i = j \\ i + j & \text{si } i < j \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

2. Calcula los coeficientes de una matriz de orden 3×3 a partir de su definición:

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{i+j}{2} - 1 & \text{si } i > j \\ \sqrt{i \cdot j} & \text{si } i = j \\ (-3 \cdot j)^i & \text{si } i < j \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}_{3\times 4}$$

3. Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Calcula: a) $2A + 3B$, $A - 2B - 3C$, $2A - B + 4C$

b) $A \cdot B \cdot C$ c) $B \cdot A \cdot B$ d) $A^2 \cdot B^3$

4. Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Calcula: a) $A \cdot B \cdot C$ b) $C \cdot B \cdot A$ c) $A \cdot B^2 \cdot C$ d) $C \cdot B^3 \cdot A$

5. Sean las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $\left(A \cdot B^t\right)^t = B \cdot A^t$

b) Calcula $\left(A \cdot B^t\right)^t + B \cdot A^t$

6. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Comprueba que $(A + B)^t = A^t + B^t$.

7. Sean las matrices: $A=\begin{pmatrix} x+y & 3y+x \\ 2x+y & 13 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3x+6 & -4y-1 \\ -14 & -x^2+3y \end{pmatrix}$.

Calcula x e y para que las matrices A y B sean opuestas.

✏️ Método de Gauss-Jordan para el cálculo de la matriz inversa

8. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula su inversa y comprueba el resultado.

9. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcula su inversa y comprueba el resultado.

10. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula su inversa y comprueba el resultado.

11. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula su inversa y comprueba el resultado.

✏️ Ecuaciones matriciales

12. Resuelve simbólicamente las siguientes ecuaciones matriciales:

a) $A+X=B$
b) $A\cdot X=B$
c) $X\cdot A+B=C$
d) $A\cdot X\cdot B=C$
e) $A\cdot X+B\cdot X=C$
f) $A\cdot X+X=C$

13. Sean la matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$.

Calcula X de forma que $A\cdot X+B=C$

14. Sean la matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Calcula X de forma que $X\cdot A-B=2\cdot C$

15. Sean la matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Calcula X de forma que $A^2\cdot X+B\cdot X=C$

16. Sean la matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ -2 & 3 & -2\\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

Calcula X de forma que $3\cdot X+B\cdot A=A\cdot B$

17. Despeja X en la expresión:

$$2\cdot X-3\cdot\left[\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & -1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}-2 & 5 & -1\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -2\\ 3 & 6\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

✏️ Sistemas de ecuaciones matriciales

18. Resuelve el sistema matricial: $\begin{cases}2A+3B=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 3 & 8\end{pmatrix}\\ 3A-4B=\begin{pmatrix}-15 & 14\\ -4 & -22\end{pmatrix}\end{cases}$

19. Resuelve el sistema matricial: $\left.\begin{matrix}3X+2Y=A\\ -X+3Y=B\end{matrix}\right\}$

siendo $A=\begin{pmatrix}5 & -4 & 6\\ -2 & 10 & 12\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 5 & 9\\ -3 & 4 & -4\end{pmatrix}$

20. Resuelve el sistema matricial: $\begin{cases}2X-4Y=\begin{pmatrix}0 & 10\\ -2 & -4\\ -14 & 4\end{pmatrix}\\ -3X+2Y=\begin{pmatrix}-4 & -3\\ -5 & -2\\ 5 & -2\end{pmatrix}\end{cases}$

21. Resuelve los sistemas matriciales:

a) $\begin{cases}2X+Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\\ X-Y=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & -4\end{pmatrix}\end{cases}$

b) $\begin{cases}X+Y=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -4 & 2\end{pmatrix}\\ 3Y-X=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 12 & 2\end{pmatrix}\end{cases}$

Aplicaciones de las matrices a las ciencias sociales

22. Una empresa monta ordenadores de dos tipos, de sobremesa y portátiles, y de tres calidades: alta, media y baja.

En un mes monta 100 ordenadores de cada tipo, de los cuales 20 son de calidad alta, 40 de media y 40 de baja (para los de sobremesa), y 30 de calidad alta, 30 de media y 40 de baja (para los portátiles).

Para los ordenadores de sobremesa se invierten cuatro horas de montaje, siete de instalación del software y para los portátiles seis y ocho horas respectivamente.

a) Escribe la matriz A que determina el número de ordenadores montados atendiendo a su calidad (filas) y su tipo (columnas).

b) Escribe la matriz B que determina el número de horas utilizadas de montaje y de software (filas) para cada tipo de ordenador (columnas).

c) Calcula e interpreta la matriz $A \cdot B^t$.

23. Una empresa empaqueta cinco tipos de lotes de herramientas para bricolaje y las reparte a cuatro provincias A, B, C y D. La siguiente tabla muestra el número de lotes de cada tipo que debe repartir en cada provincia.

	Lote 1	Lote 2	Lote 3	Lote 4	Lote 5
A	12	10	10	30	10
B	15	9	15	25	12
C	23	8	12	25	15
D	12	12	20	15	12

Cada tipo de lote está formado por un número de piezas P, Q y R según la siguiente distribución.

	Lote 1	Lote 2	Lote 3	Lote 4	Lote 5
P	2	1	2	0	1
Q	2	1	2	2	0
R	0	2	2	3	3

Escribe la matriz que determina el número de piezas de cada clase que se van a repartir a cada provincia.

24. Una tienda de música ha vendido dos tipos de productos: música en *CD* (formato físico) y música en *DG* (formato digital). La matriz A muestra el total de canciones, tanto grabadas en *CD* como en *DG*, vendidas durante los años 2014, 2015 y 2016. La matriz B muestra los precios a los que se ha vendido una canción según el tipo de grabación y según los años indicados anteriormente.

a) Calcula el producto de matrices $C = A \cdot B$ e indica qué significan sus elementos de la diagonal principal.

b) Calcula el producto de matrices $D = B \cdot A$ e indica qué significan sus elementos de la diagonal principal.

c) Indica un significado para los términos c_{12} y d_{23}

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 2014 & 2015 & 2016 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{CD's} \\ \text{Digital} \end{array} & \begin{pmatrix} 1150 & 1360 & 1400 \\ 780 & 950 & 1350 \end{pmatrix} = A \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{CD's} & \text{Digital} \end{array} \\ \begin{array}{c} 2014 \\ 2015 \\ 2016 \end{array} & \begin{pmatrix} 1{,}25 & 0{,}75 \\ 1{,}30 & 0{,}65 \\ 1{,}40 & 0{,}50 \end{pmatrix} = B \end{array}$$

Resolución de ecuaciones matriciales por igualación

25. Resuelve X en la ecuación matricial: $X \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X$

26. [Modelo de examen 2023]

EJERCICIO 1. **Álgebra**. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcule las matrices A+B y 3C-B.
b) Exprese en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear A+B = 3C-B y resuélvalo.

27. [ABAU 2023 Ordinaria]

EJERCICIO 1. Álgebra. Sean las matrices A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule la matriz A^t (siendo A^t la matriz transpuesta de A) y calcula la matriz A·B.
b) Calcule la matriz X= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple A·B·X=C+I donde C= $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad 2x2.

28. [ABAU 2021 Extraordinaria]

EXERCICIO 1. Álxebra. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$, B= $(a \quad 2 \quad 3)$ e $C = (4 \quad 0 \quad 2)$.

a) Determine os valores x, y, z para os que a matriz A **non** ten inversa.
b) Calcule A^{-1} para x=3, y=1, z=0.
c) Resolva o sistema B·A=C para a=1.

29. [ABAU 2020 Extraordinaria]

PREGUNTA 1. Álgebra. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcule las matrices A+B y 3C-B.
b) Exprese en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear A+B = 3C-B y resuélvalo.

✏️ Potencia de una matriz cuadrada (Extra)

30. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calcula la expresión general de la potencia enésima A^n.

31. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula la potencia A^{23}.

32. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, halla A^3, A^5 y A^n.

33. Calcula A^{2000}, siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

BOLETÍN: MATRICES Y ECUACIONES MATRICIALES (refuerzo)

34. Halla el valor de x en esta igualdad de matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & x & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

35. Completa la siguiente matriz para que sea antisimétrica: $\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ c & 0 & -3 \\ 2 & d & e \end{pmatrix}$

36. Halla, si es posible, la inversa de esta matriz: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

37. Calcula, por el método de Gauss-Jordan, la inversa de estas matrices:

a) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

38. Calcula, por el método de Gauss-Jordan, la inversa de la matriz: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

39. Sean A, I y B las matrices dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Contesta razonadamente a la siguiente pregunta:
¿Existe algún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que la igualdad $(A - \lambda I)^2 = B$ sea cierta?
En caso afirmativo, halla dicho valor de λ.

40. Demuestra que la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica una ecuación del tipo:

$A^2 + \alpha \cdot A + \beta \cdot I = 0$, determinando α y β, siendo I la matriz identidad.

ECUACIONES MATRICIALES

- Son aquellas ecuaciones en las que todos los elementos son matrices.

- RESOLUCIÓN DE ECUACIONES MATRICIALES

  Se debe despejar la matriz X, teniendo en cuenta las propiedades de la multiplicación de matrices:

  - ✓ $A \cdot B \neq B \cdot A$
  - ✓ $A \cdot I = I \cdot A = A$
  - ✓ $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
  - ✓ $\cancel{X = \frac{B}{A}}$
  - ✓ $PASOS$:
    - ➢ Se pasan todos los elementos que contengan la matriz X a un lado de la igualdad y todos los elementos que no la contengan al otro lado.
    - ➢ Multiplicar la matriz que esté al lado de la X por su inversa, por el lado contrario a donde esté situada la matriz X.
    - ➢ Multiplicar el otro miembro por la misma matriz inversa por el mismo lado que se ha multiplicado el otro miembro.
    - ➢ ¡OJO! Si tenemos X en varios miembros, debemos sacar factor común pero teniendo en cuenta donde está colocada la X.
    - ➢ Sustituir el producto de la matriz por su inversa por la matriz identidad.
    - ➢ La matriz identidad multiplicada por la matriz X, es igual a la matriz X.
    - ➢ Hallar el valor de la matriz X, realizando las operaciones de matrices que queda en el miembro contrario.

1. $A + X = B$
2. $A \cdot X = B$
3. $X \cdot A = B$
4. $X \cdot A + B = C$ (ORDINARIA 2021)
5. $A \cdot X + B = C$
6. $A \cdot X \cdot B = C$
7. $A \cdot X + B \cdot X = C$
8. $A \cdot X + X = C$
9. $X \cdot A - B = 2 \cdot C$
10. $A^2 \cdot X + B \cdot X = C$
11. $3 \cdot X + B \cdot A = A \cdot B$
12. $A \cdot B \cdot X = C + I$ (ORDINARIA 2023)
13. $X \cdot A + B = A^2 + X$ (ORDINARIA 2022)
14. $A \cdot X - B = X$ (EXTRAORDINARIA 2022)
15. $A - X = AX$ (JUNIO 2019)
16. $A^t + BX = 5C^{-1}$ (JUNIO 2016)
17. $2A + X = 3A^{-1}$ (SEPTIEMBRE 2016)
18. $X^{-1} \cdot B^t = A + B$ (SEPTIEMBRE 2012)
19. $A^{-1} \cdot X \cdot B - 2CD = B^2$ (SEPTIEMBRE 2011)
20. $A \cdot X + A^t = X + B$ (SEPTIEMBRE 2010)
21. $A \cdot X \cdot A^t = A$
22. $BXB = B(X + A)$
23. $A^{-1}XB + C = I$
24. $(A + X)B = C$
25. $B(A^t + X) = C$
26. $AXB^{-1} + C = 0$
27. $AX + BX = -C$

DETERMINANTES

Definición de determinante de una matriz cuadrada

Es un número que se asocia a cada matriz cuadrada; depende de sus elementos y de la posición que ocupan en ella. Este número resulta de sumar (o restar) todos los productos que pueden obtenerse tomando un factor y sólo uno de cada fila y un factor y sólo uno de cada columna.

Determinante de orden 2

Dada la matriz cuadrada de segundo orden $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

se llama determinante de A: $det(A) = |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

El determinante de una matriz de orden 2 es igual al producto de los elementos de la diagonal principal menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria.

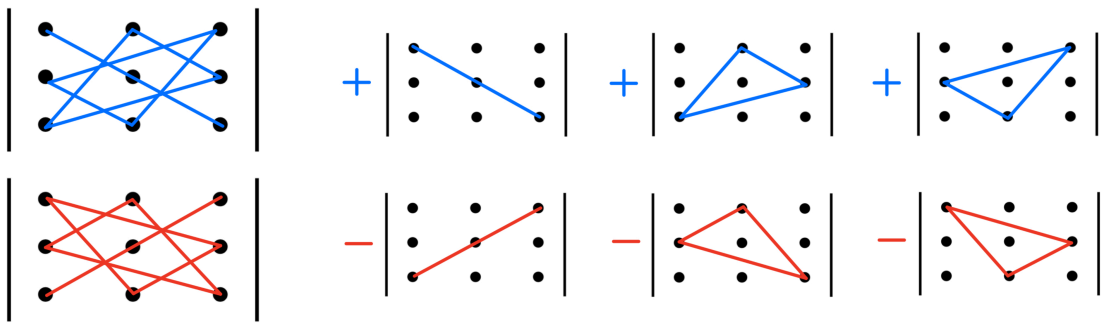
Determinante de orden 3

Dada una matriz cuadrada de tercer orden A, su determinante es

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

<u>Regla de Sarrus</u>:

Para recordar el desarrollo del determinante de orden 3 se puede usar la regla de Sarrus:
Los productos con signo positivo están formados por los elementos de la diagonal principal, y los de las dos diagonales paralelas con su correspondiente vértice opuesto.
Análogamente se forman los productos con signo negativo, pero tomando como referencia la diagonal secundaria.



Angelina Lestao Galdo / Moisés López Caeiro https://sites.google.com/site/smmfisicayquimica/matematicas-2o-bach

Definición de menor complementario y de adjunto de un elemento

Si en una matriz cuadrada de orden n suprimimos la fila y la columna del elemento a_{ij} se obtiene otra matriz de orden n-1. Al determinante de esta matriz se le llama menor complementario de a_{ij}. Lo denotaremos por α_{ij}

Se llama adjunto de a_{ij} y se designa por A_{ij} al número $(-1)^{i+j}\alpha_{ij}$ (i.e., al determinante anterior con signo)

Ejemplo: En la matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 11 \\ 4 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

el menor complementario de $a_{32}=6$ es $\alpha_{32}=\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}=-23$

y su adjunto es $A_{32}=(-1)^{3+2}\alpha_{32}=-(-23)=23$

Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea (Desarrollo de Laplace)

El determinante de una matriz de orden n es el número que se obtiene al sumar los productos de los elementos de una fila o columna por sus respectivos adjuntos.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\ldots\ldots+a_{1n}A_{1n}$$

Definición

Una fila (o columna) de una matriz se dice que es combinación lineal de otras filas (o columnas) si esa fila (o columna) la podemos obtener como suma de las otras, cada una de ellas multiplicada por un número real.
Si alguna fila (o columna) es combinación lineal de otras filas (o columnas), se dice que el conjunto formado por todas ellas es linealmente dependiente. En caso contrario es linealmente independiente.

Propiedades elementales de los determinantes

a) El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta. (Esta propiedad permite aceptar para las columnas las propiedades que se demuestren para filas y viceversa).

$$\det(A)=\det(A^t)$$

b) Si una matriz tiene una fila (o columna) de ceros, su determinante es cero.

$$\det(C_1,C_2,0)=\det(C_1,0,C_3)=\det\big(0,C_2,C_3\big)=0$$

c) Si cambiamos las dos filas (o columnas) de una matriz, su determinante cambia de signo.

$$\det(C_1,C_2,C_3)=-\det(C_2,C_1,C_3)=-\det(C_1,C_3,C_2)$$

d) Si una matriz tiene dos filas (o columnas) iguales, su determinante es cero.

$$\det(C_1,C_1,C_3)=0$$

e) Si multiplicamos cada elemento de una fila (o columna) de una matriz por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por ese número.

$$\det(2C_1, C_2, C_3) = 2\det(C_1, C_2, C_3) = \det(C_1, 2C_2, C_3) = \det(C_1, C_2, 2C_3)$$

f) Si una matriz tiene dos filas (o columnas) proporcionales, su determinante es cero.

$$\det(C_1, kC_1, C_3) = 0$$

g) Si una fila (o columna) de una matriz es suma de dos, su determinante puede descomponerse en la suma de los determinantes que tienen en esa fila (o columna) los primeros y segundos sumandos, respectivamente, y en las demás los mismos elementos que el determinante inicial.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+a'_{11} & a_{12}+a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

h) Si a una fila (o columna) de una matriz le sumamos otra fila (o columna) multiplicada por un número, el determinante de la matriz no varía.

$$\det(C_1, C_2, C_3) = \det(C_1, C_2 + C_1 - 5C_3, C_3)$$

i) Si una fila (o columna) de un determinante es combinación lineal de otras filas (o columnas), entonces el valor del determinante es cero. (Ver propiedades f y g)

$$\det(C_1, C_1 - 5C_3, C_3) = 0$$

j) Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden, entonces:

$$\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$$

Nota importante:
Debido a la propiedad i), para que los vectores (fila o columna) de un determinante sean linealmente independientes, una condición necesaria y suficiente es que el determinante sea distinto de cero.

APLICACIONES DE LOS DETERMINANTES

Definición: **Rango de una matriz**

El rango de una matriz coincide con el orden del mayor menor distinto de cero de la matriz.

El rango de una matriz indica el número de filas de la matriz que son linealmente independientes, por tanto, se cumple que:

Si $|A| \neq 0$, sus filas son linealmente independientes.

Si $|A| = 0$, alguna de sus filas depende linealmente de las demás.

Cálculo del rango de una matriz a partir de sus menores

Una matriz tiene rango k si todos los menores de orden k-1 son 0.

Ejemplo: Si una matriz 4 x 5 tiene rango 3, significa que existen tres vectores fila o columna linealmente independientes, los correspondientes al menor de orden 3 distinto de cero, y los demás son combinación lineal de ellos.

Cálculo del rango de una matriz mediante el método de Gauss

El método de Gauss consiste en aplicar transformaciones elementales a una matriz con objeto de conseguir que los elementos que están por debajo de la diagonal principal se anulen ($a_{ij} = 0$, i > j). Para conseguir "triangular" la matriz debemos dejar en la diagonal principal elementos no nulos, salvo que la fila sea nula.
Una vez aplicado este proceso de triangulación, el rango de la matriz es el número de filas no nulas de la matriz obtenida. Esto es consecuencia de las propiedades de los determinantes.

Ejemplo: Calcula el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Por comodidad, es adecuado que el elemento a_{11} sea 1 ó -1. De no ser así, podemos permutar filas ó multiplicar toda la fila por un escalar.

$$\xrightarrow{f_2 \to f_2 - 6f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to f_3 + f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \to 3f_3 + 2f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Las filas nulas podemos eliminarlas, y por tanto queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ por lo que concluimos que el rango es 2.}$$

Cálculo de la inversa de una matriz

Una matriz cuadrada A, tiene una matriz inversa, A^{-1}, si y solamente si $|A| \neq 0$.

(Las matrices que tienen inversa se llaman matrices regulares o invertibles, y las que no la tienen, matrices singulares.)

En tal caso, la matriz inversa A^{-1} es la matriz traspuesta de los adjuntos de A dividida entre el determinante de A.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t$$

Se llama matriz adjunta de una matriz cuadrada A, y se representa por **Adj(A)**, a la matriz que se obtiene al sustituir cada elemento a_{ij} por su adjunto correspondiente A_{ij}.

Ejemplo: Cálculo de la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = -3 \neq 0$, y por tanto, tiene inversa.

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow [Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

✏️ BOLETÍN: DETERMINANTES (SIN PROPIEDADES)

1. Halla con determinantes la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Encuentra con determinantes la matriz X que verifique $A \cdot X + B = I$, siendo

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad.

3. Resuelve con determinantes la ecuación matricial $X \cdot A + B = C$, donde:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

4. Razona con determinantes si existe la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

En caso afirmativo, calcúlala.
Resuelve con determinantes la ecuación matricial $A \cdot X + 2 \cdot A = I$, donde X es una matriz de orden 3 e I es la matriz identidad de orden 3.

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calcula el rango de las matrices A y $A + I$.

6. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a & a \\ a & 2 & a \\ a & a & 3 \end{pmatrix}$

a) Halla todos los valores del parámetro a para los cuales la matriz A no tiene inversa.

b) Estudia el rango de la matriz A en función de los valores del parámetro a .

7. Calcula el valor de a para que la matriz $\begin{pmatrix} a & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4a \end{pmatrix}$ no tenga inversa.

8. Calcula el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ en función del parámetro a.

9. Calcula con determinantes la matriz X que verifica:

a) $A \cdot X = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A^t \cdot X = B + C$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \ B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

c) $A \cdot X \cdot B + C = D$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} , C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Resuelve con determinantes la ecuación matricial $A \cdot B \cdot X + C \cdot X = 2 \cdot D$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} , B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} , C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

11. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, halla una matriz X tal que se verifique la ecuación matricial $A \cdot X \cdot B = I$

12. Halla la matriz X que cumple $A \cdot X = B \cdot A$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

BOLETÍN: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales

Ejemplo resuelto (Fuente matrixcalc.org/es/slu.html):

$$\begin{cases} x + y - 3z = 2 \\ 2x - y + z = -4 \\ 3x + y + 5z = 10 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 5 & 10 \end{array}\right) \times(-2) \underset{F_2 - 2\times F_1 \to F_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 7 & -8 \\ 3 & 1 & 5 & 10 \end{array}\right) \times(-3) \underset{F_3 - 3\times F_1 \to F_3}{\sim}$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 7 & -8 \\ 0 & -2 & 14 & 4 \end{array}\right) \times\left(\frac{-2}{3}\right) \underset{F_3 - (\frac{2}{3})\times F_2 \to F_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & \frac{28}{3} & \frac{28}{3} \end{array}\right) \equiv$$

$$\equiv \begin{cases} x_1 + x_2 - 3\times x_3 = 2 \\ -3\times x_2 + 7\times x_3 = -8 \\ \frac{28}{3}\times x_3 = \frac{28}{3} \end{cases} \quad (1)$$

Solución: Despejando desde abajo hacia arriba, obtenemos: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio: Clasifica y **resuelve** los siguientes **sistemas** utilizando el método de **Gauss**:

1. $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + 3y - 2z = 5 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + y + z = 7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - 2y + 3z = -1 \\ 3x - 2y + 2z = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 4y + z = 3 \\ -x + 5y = 3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - 2y + z = 0 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + y - 3z = 2 \\ 2x - y + z = -4 \\ 3x + y + 5z = 10 \end{cases}$

✏️ Sistemas de ecuaciones lineales con la matriz inversa

Resuelve el siguiente sistema lineal con la matriz inversa: $\begin{cases} x+y-3z=2 \\ 2x-y+z=-4 \\ 3x+y+5z=10 \end{cases}$

✏️ Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales a las ciencias sociales. Expresa los problemas en forma matricial y resuélvelos por cualquier método.

1. Una naviera ha vendido 128 cruceros de los tipos A, B y C, cuyos precios son 1500, 600 y 900 € respectivamente, recaudando 112.800 €. Si por cada persona que va al crucero A, 2 van al crucero C, ¿cuántas personas van al crucero B ?

2. Una persona decide invertir un total de 60.000 €, repartidos en tres entidades de ahorro distintas: A, B y C. Esta persona decide que la cantidad invertida en la entidad A sea la mitad que la cantidad invertida en las entidades B y C. Además, se sabe que la entidad A le ha asegurado una rentabilidad del $5\,\%$, la entidad B, una rentabilidad del $10\,\%$ y la entidad C, una rentabilidad el $2\,\%$. Calcula las cantidades invertidas en cada entidad de ahorro si se sabe que los beneficios totales han sido de 4.200 €.

3. Julia, Clara y Miguel reparten hojas de propaganda. Clara reparte siempre el $20\,\%$ del total y Miguel reparte 100 hojas más que Julia. Entre Clara y Julia reparten 850 hojas. Plantea un sistema de ecuaciones que permita saber cuántas hojas reparte cada uno. Sabiendo que la empresa paga 1 céntimo por cada hoja repartida, calcula el dinero que ha recibido cada uno de los tres.

4. Un museo tiene tres salas de exposiciones: A, B y C. Los precios de las entradas son respectivamente, 2, 4 y 7 €. Un determinado día entraron a las tres salas un total de 210 personas, siendo la recaudación conjunta igual al doble de la recaudación de la sala B. Determina el número de visitantes de cada sala. Justifica la respuesta.

5. A primera hora de la mañana, en un cajero automático, se desea que haya 800 billetes (de 10, 20 y 50 €) con un valor total de 16.000 €. Sabiendo que por cada 3 billetes de 50 € son necesarios 4 de 20 €, plantea un sistema de ecuaciones lineales para averiguar cuántos billetes de cada cantidad ha de haber y resuélvelo por el método de Gauss.

6. Una inmobiliaria ha vendido un total de 65 plazas de garaje en tres urbanizaciones diferentes. Las ganancias obtenidas por la venta de una plaza de garaje en la urbanización A son de 2.000 €, de 4.000 € por una en la urbanización B y de 6.000 € por una en la urbanización C. Se sabe que se han vendido un $50\,\%$ más de plazas en la urbanización A que en la urbanización C. Calcula el número de plazas de garaje vendidas en cada urbanización sabiendo que el beneficio obtenido por las vendidas en la urbanización C es igual a la suma de los beneficios obtenidos por las vendidas en las urbanizaciones A y B.

✏️ Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales a las ciencias sociales (Refuerzo: problemas seleccionados de exámenes de 2º de Bachillerato)

7. Un estadio de fútbol con capacidad para 72000 espectadores está lleno durante la celebración de un partido entre los equipos A y B. Unos espectadores son socios del equipo A, otros lo son del equipo B, y el resto no son socios de ninguno de los equipos que están jugando. A través de la venta de localidades sabemos los siguiente:

   I. No hay espectadores que sean socios de ambos equipos simultáneamente.
   II. Por cada 13 socios de alguno de los equipos hay 3 espectadores que no son socios.
   III. Los socios del equipo B superan en 6500 a los socios del equipo A.

   ¿Cuántos socios de cada equipo hay en el estadio viendo el partido?

8. El precio de la pensión completa en un hotel es de 30 € por persona y día. A los niños menores de 10 años se les cobra el $50\,\%$, y a las personas mayores de 65, el $70\,\%$ de ese precio. Determina el número de niños menores de 10 años y de personas mayores de 65 que había cierto día en el hotel, si se sabe que: había 200 personas, el número de mayores de 65 era igual al $25\,\%$ del número de niños y se recaudaron 4620 € por las pensiones completas de todas ellas.

9. Un tren transporta 70 viajeros y la recaudación del importe de sus billetes asciende a 999 €. Calcule cuántos viajeros han pagado el importe total del billete, que vale 27 €, cuántos han pagado el $30\,\%$ del billete y cuántos el $50\,\%$, sabiendo que el número de viajeros que han pagado el $30\,\%$ es el doble del número de viajeros que pagan el billete entero.

10. Tres personas A, B y C, le van a hacer un regalo a un amigo. El regalo les cuesta $75{,}73$ €. Como no todos disponen del mismo dinero, deciden pagar de la siguiente manera: A paga el triple de lo que pagan B y C juntos, y por cada $0{,}12$ € que paga B, la persona C paga $0{,}18$ €.
Plantea un sistema que permita determinar cuánto paga cada persona y resuelve el problema. Utiliza una precisión de céntimos (2 decimales) para los cálculos.

11. La suma de la inversión en acciones de una empresa textil, una empresa de gas y una compañía de telefonía es de 7400 €. Las acciones de la empresa textil pagan un $2\,\%$ de interés anual, las de la empresa de gas, un $4\,\%$ y las de la compañía de telefonía pagan un $5\,\%$. La suma del interés anual es de 278 €. La inversión en acciones de la compañía de telefonía es de 1000 € menos que la suma de la inversión en acciones de la empresa textil y las acciones de la compañía de gas.
Calcula la cantidad invertida en cada una de las acciones.

12. Un hospital decide adquirir 5000 vacunas de tres tipos A, B y C. Por cada 3 vacunas del tipo A, se compran 5 del tipo B. Además, se decide que la cantidad de vacunas del tipo C sea la mitad que el número de vacunas A y B juntas. Calcula el número de vacunas de cada tipo que ha adquirido el hospital.

✏️ BOLETÍN: MODELOS DE EJERCICIOS DE EXAMEN
MATRICES, ECUACIONES MATRICIALES, DETERMINANTES Y PROBLEMAS

1. **PROBLEMA**: Los precios, en euros, de las entradas de un parque temático para **adultos** (AD) y **Niños y Jubilados** (NJ) en **Temporada Alta** (TA), **Temporada Media** (TM) y **Temporada Baja** (TB) vienen dados por la **matriz P**. El número de **asistentes, en miles**, a dicho parque a lo largo de un año viene dado por la **matriz N**.

$$P = \begin{array}{c|ccc|} & TA & TM & TB \\ AD & 25 & 20 & 14 \\ NJ & 20 & 15 & 7 \end{array} \qquad N = \begin{array}{c|cc|} & AD & NJ \\ TA & 500 & 600 \\ TM & 350 & 300 \\ TB & 125 & 100 \end{array}$$

   a) Obtener, si es posible, las **matrices** $R_1 = P \cdot N$ y $R_2 = N \cdot P$.
   b) ¿A **cuántos euros** asciende la **recaudación total correspondiente a los Niños y Jubilados**? ¿Y la correspondiente a la **Temporada Baja**?
   c) ¿Qué **elemento** de R_1 o de R_2 nos proporciona información sobre la **recaudación total correspondiente a los Adultos**?
   d) ¿A **cuántos euros** asciende la **recaudación total**?

2. Considera la **ecuación matricial** $X + X \cdot A + B^t = 2C$, en donde las matrices A, B y C vienen dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   y donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

   a) Despeja la matriz X en la ecuación matricial. ¿Qué **orden** tiene?
   b) **Calcula** la matriz $(2C - B^t)$ y la inversa de la matriz $I + A$.
   c) **Resuelve** la **ecuación matricial** obteniendo el valor de la matriz X.

3. **Resuelve** los siguientes apartados:

   a) Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 2$, **calcula** $\begin{vmatrix} 3+x & 8+y & 4+z \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 8/3 & 4/3 \end{vmatrix}$

   b) Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calcula **todas las matrices** que **verifican la ecuación matricial** $X^2 = 2 \cdot X$.

4. **Resuelve** y **clasifica** el siguiente **sistema** utilizando el **método de Gauss:**

$$\left.\begin{array}{r} x-y+3z=4 \\ 2x-y-z=6 \\ 3x-2y+2z=10 \end{array}\right\}$$

5. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

   a) **Calcula** el **rango** de las matrices A y $A+I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

   b) **Despeja** y **calcula** X en la **ecuación matricial** $A \cdot X + X = B$.

6. **PROBLEMA**: Un estadio de fútbol con capacidad para **72000 espectadores** está lleno durante la celebración de un partido entre los equipos A y B. Unos espectadores son **socios** del **equipo A**, otros lo son del **equipo B**, y el resto no son socios de ninguno de los equipos que están jugando. A través de la venta de localidades sabemos los siguiente:

   I. No hay espectadores que sean socios de ambos equipos simultáneamente.

   II. Por cada 13 socios de alguno de los equipos hay 3 espectadores que no son socios.

   III. Los socios del equipo B superan en 6500 a los socios del equipo A.

   ¿**Cuántos socios** de **cada equipo** hay en el estadio viendo el partido?

✏️ BOLETÍN DE MATRICES, DETERMINANTES Y SISTEMAS
(Actividades seleccionadas de pruebas PAU / ABAU de Galicia)

[ABAU 2024 Extraordinaria]

EJERCICIO 1. Álgebra. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & k \end{pmatrix}$$

a) Calcule para que valor de k **no** existe la matriz inversa de A.

b) Justifique cual es el rango de A si k = – 5. **c)** Calcule la matriz A^{-1} (inversa de A) para k=-2.

[ABAU 2024 Ordinaria]

EJERCICIO 1. Álgebra. Considere la ecuación matricial $X \cdot A + B = A \cdot B^t$, en donde B^t denota la matriz traspuesta de B, siendo A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule, si es posible, la inversa de la matriz A y el rango de la matriz B.

b) Despeje la matriz X en la ecuación matricial y, a continuación, calcule su valor.

[Modelo de examen 2023]

EJERCICIO 1. Álgebra. Consideramos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcule las matrices A+B y 3C-B.

b) Exprese en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear A+B = 3C-B y resuélvalo.

[ABAU 2023 Ordinaria]

EJERCICIO 1. Álgebra. Sean las matrices A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule la matriz A^t (siendo A^t la matriz transpuesta de A) y calcula la matriz A·B.

b) Calcule la matriz X= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple A·B·X=C+I donde C= $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad 2x2.

[ABAU 2021 Extraordinaria]

EXERCICIO 1. Álxebra. Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & 0 & y \\ 1 & z & z \end{pmatrix}$, B=$(a \quad 2 \quad 3)$ e $C = (4 \quad 0 \quad 2)$.

a) Determine os valores x, y, z para os que a matriz A **non** ten inversa.

b) Calcule A^{-1} para x=3, y=1, z=0.

c) Resolva o sistema B·A=C para a=1.

[ABAU 2020 Extraordinaria]

PREGUNTA 1. Álgebra. Consideramos las matrices

$$A=\begin{pmatrix} a & a & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b & -b & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} c & -3 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcule las matrices A+B y 3C-B.
b) Exprese en forma matricial el sistema de ecuaciones que se obtiene al plantear A+B = 3C-B y resuélvalo.

[ABAU 2020 Extraordinaria]

PREGUNTA 1. Álgebra. Disponemos de tres granjas A, B y C para la cría ecológica de pollos. La granja A tiene capacidad para criar un 20% más de pollos que la granja B, y la granja B tiene capacidad para criar el doble de pollos que la granja C. Se sabe además que entre las tres granjas se pueden criar un total de 405 pollos.
a) Formule el sistema de ecuaciones asociado a este problema.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones anterior. ¿Cuántos pollos se pueden criar en cada una de las tres granjas?

[Modelo de examen 2019]

PREGUNTA 1. Álgebra. Consideramos las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule la matriz $B^t \cdot A \cdot B$.
b) Calcule la inversa de la matriz $A-I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.
c) Despeje la matriz X en la ecuación matricial $A \cdot X - B = X$ y calcúlela.

[ABAU Julio 2019 Opción A]

1. En una caja hay billetes de 5, 10 y 20 por un valor de 400 €. Se sabe que el número de billetes de 20 € es la tercera parte del total y que el número de billetes de 5 € es inferior en 4 unidades al del resto.
a) Escribe un sistema de ecuaciones que represente el problema. **b)** Escríbelo en forma matricial.
c) Calcula la matriz inversa de la matriz de coeficientes y resuelve el sistema.

[ABAU Septiembre 2018 Opción A]

1. As vendas de tres produtos P1, P2 e P3, relacionados entre si, dá lugar ao seguinte sistema de ecuacións lineais x+y+z=6; x+y-z=0; 2x-y+z=3, sendo x, y, z as vendas dos produtos P1, P2 e P3 respectivamente
a) Expresa o sistema en forma matricial AX = B. **b)** Calcula a matriz inversa de A, sendo A a matriz cadrada de orde 3 dos coeficientes. **c)** Calcula as vendas x, y, z para eses tres produtos.

[PAU Septiembre 2017 Opción A]

1. Sexan as matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & c & c \end{pmatrix}$.

(a) Calcula os valores de a, b e c para que se satisfaga a igualdade $A \cdot B + B \cdot C = 2I$, I matriz identidade de orde 3.
(b) Para $a = 4$, $b = -3$ e $c = 1$ calcula o rango da matriz $A + B - 2C$.

[PAU Junio 2017 Opción A]

1. Consideremos as matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Calcula os valores de x e y para os que se cumpre a igualdade $C\cdot\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Determina o rango das matrices A e B.

(c) Calcula X na ecuación matricial $X+A^t=2I+B$, A^t matriz trasposta de A e I matriz identidade de orde 3.

[PAU Septiembre 2015 Opción A]

1. Tres socios reúnen 6000 euros para investir nun produto financeiro. Sábese que o primeiro achega o dobre que o segundo e que o terceiro achega tanto como o primeiro e o segundo xuntos.

(a) Formula o sistema de ecuacións lineais asociado ao enunciado e exprésao en forma matricial.

(b) Resolve o sistema anterior. ¿Canto diñeiro achega cada un dos socios para realizar o investimento?

[PAU Septiembre 2013 Opción B]

1) (a) Calcula as matrices X e Y que verifican o sistema $3X+2Y=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$; $X-5Y=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}$.

(b) Calcula a matriz inversa de $X\cdot Y$.

[PAU Junio 2012 Opción A]

1) Decidimos investir unha cantidade de 15000 euros en bolsa, comprando accións de tres entidades A, B e C. Investimos en A o dobre que en B e en C xuntas. Transcorrido un ano, as accións da entidade A revalorizáronse un 3%, as de B un 4% e as de C perderon un 2% e, como consecuencia, obtivemos un beneficio de 380 euros. Determina canto investimos en cada unha das entidades.

[PAU Junio 2008 Bloque de Álgebra]

Exercicio 1. Un autobús transporta en certa viaxe 60 viaxeiros de tres tipos: viaxeiros que pagan o billete enteiro que custa 1 €; estudantes que teñen un 25% de desconto e xubilados cun desconto do 50% do prezo do billete. A recadación do autobús nesta viaxe foi de 48 euros. Calcular o número de viaxeiros de cada clase sabendo que o número de estudantes era o dobre que o número do resto de viaxeiros.

[PAU Septiembre 2008 Bloque de Álgebra]

Exercicio 1. Considerar a ecuación matricial $X+X\cdot A+B^t=2C$, onde as matrices A, B e C veñen dadas por:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e onde B^t denota a matriz trasposta de B.

(a) Despexar a matriz X na ecuación matricial, ¿que orde ten?

(b) Calcular a matriz $2C-B^t$ e a inversa da matriz $I+A$, sendo I a matriz identidade de orde 3.

(c) Resolver a ecuación matricial obtendo o valor da matriz X.

PROGRAMACIÓN LINEAL

La **programación lineal** es el campo de la **optimización** matemática dedicado a maximizar o minimizar (**optimizar**) una función **lineal**, denominada **función objetivo**, de tal forma que las variables de dicha función estén sujetas a una serie de **restricciones** expresadas mediante un sistema de **ecuaciones** o **inecuaciones** también **lineales**.

Pasos para resolver un problema de programación lineal:

1. Se plantea el programa identificando:

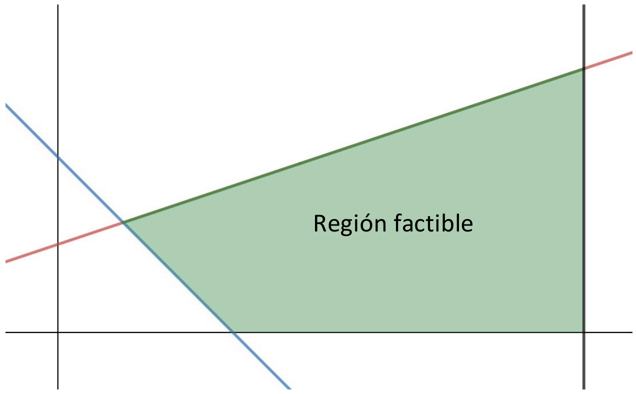
las variables: $\begin{cases} x \equiv \\ y \equiv \end{cases}$

la función objetivo: Es la función a maximinar o minimizar. Trataremos con funciones de 2 variables.

$$f(x,y) = ax + by + c$$

las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y \le c_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y \ge c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n \cdot x + b_n \cdot y \le c_n \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$



2. Se resuelve **gráficamente** el **sistema** de inecuaciones constituido por las restricciones:

La solución es la **región factible**.

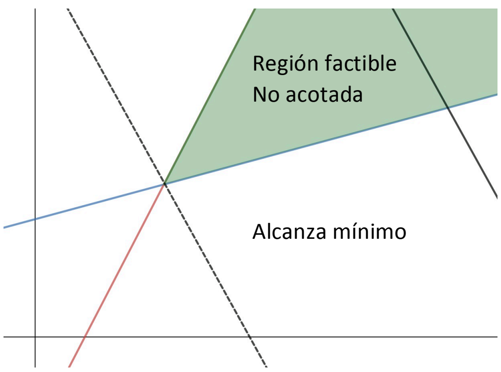
3. Se hallan los **vértices** de la región factible.

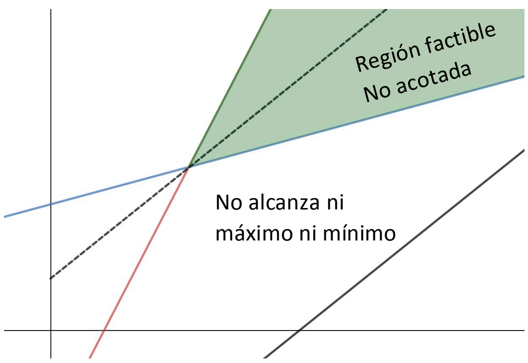
4. Por norma general, la solución óptima se encuentra en un vértice. Pueden darse dos casos:

a) **Región factible acotada**. En este caso sabemos que la función objetivo alcanza un máximo y un mínimo en los vértices. Por tanto, para obtener la solución óptima, calculamos los valores que toma $f(x,y)$ en cada vértice y elegimos el máximo o el mínimo según el caso.

Solución múltiple: Si la función objetivo alcanza el valor óptimo de dos vértices A y B, lo hace también en los infinitos puntos del segmento AB (finitos si $x, y \in \mathbb{Z}$). Estos casos se dan cuando la función objetivo es paralela a una de las restricciones.

b) **Región factible no acotada**. La función alcanza un máximo o un mínimo, pero no ambos, y lo alcanza en un vértice de la región. También puede suceder que no alcance ni el máximo ni el mínimo. Primero determinamos gráficamente si hay algún vértice en el que la función alcance un valor extremo, en cuyo caso comprobamos si se trata de un mínimo o un máximo y si, por tanto, se puede considerar como solución del problema.



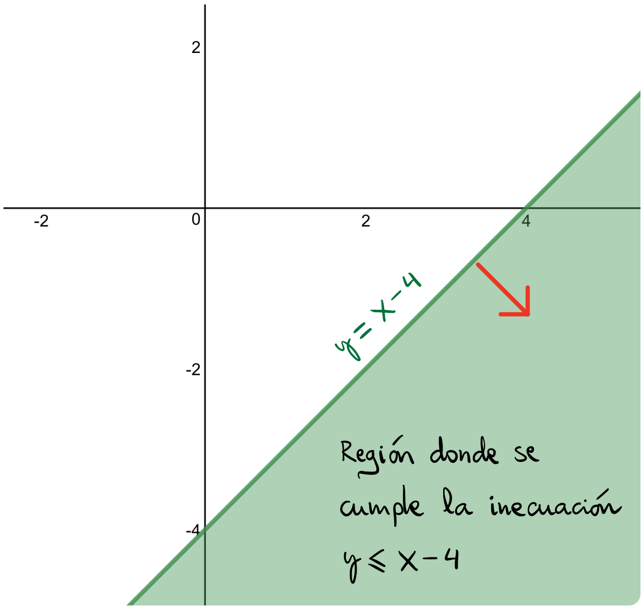


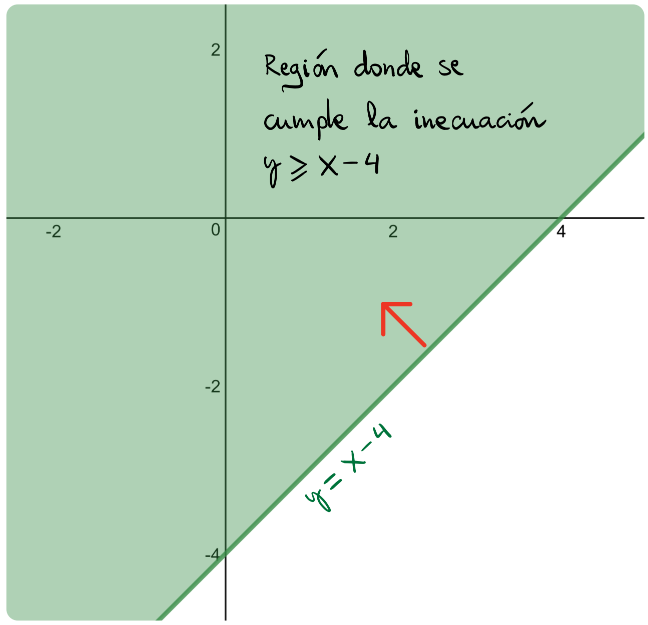
Representación gráfica de una inecuación

Vamos a aprender a representar gráficamente una inecuación. Ejemplos: $y \leqslant x-4$, $y \geqslant x-4$

Si despejamos (aislamos) y el signo $\leqslant$ indica que debemos sombrear por debajo de la recta $y = x-4$

Si despejamos (aislamos) y el signo $\geqslant$ indica que debemos sombrear por encima de la recta $y = x-4$





Si la y tiene un signo negativo, cambia el signo de la desigualdad.

Ejemplo: $x - y \leqslant -3$

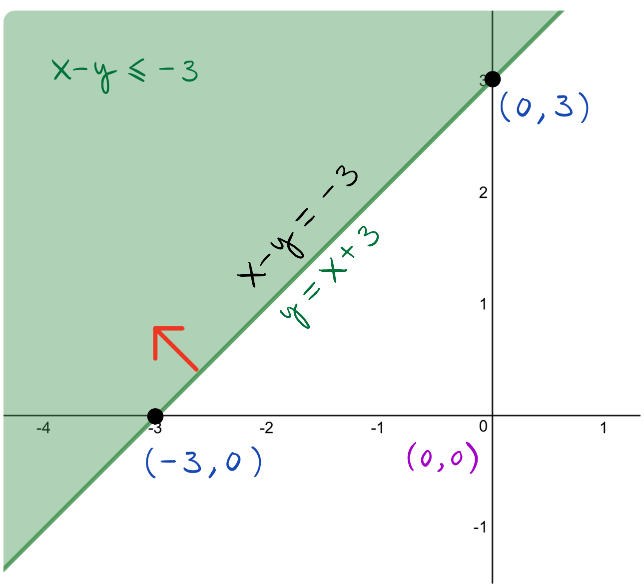
$-y \leqslant -x-3$ Si multiplicamos o dividimos por un número negativo, cambia el signo de la desigualdad.

$y \geqslant x+3 \Rightarrow$ Tenemos que sombrear por encima de la recta $y = x+3$ (lo mismo que $x - y = -3$)

Para representar la inecuación primero dibujamos la recta $y = x+3$ con dos puntos de corte:

Si $x = 0 \Rightarrow y = 3$, así que el primer punto de corte es el $(0,3)$

Si $y = 0 \Rightarrow x = -3$, así que el punto de corte es el $(-3,0)$



Tenemos un 2º método para saber de qué lado de la recta se verifica la inecuación.

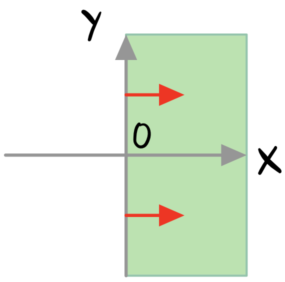
Prueba el punto $(0,0)$. Si $x = 0$, $y = 0$ comprobamos la inecuación: $x - y \leqslant -3$

$0 - 0 \leqslant -3$ No cumple.

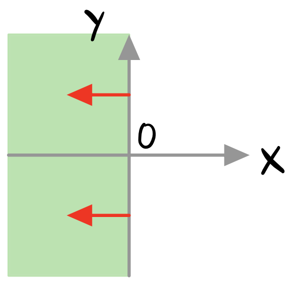
Como el punto $(0,0)$ no cumple la inecuación, sombreamos el lado de la recta donde no está ese punto. Si el punto cumpliese la condición, tendríamos que sombrear el lado donde sí está el punto.

Nota: Si la inecuación pasa por el punto $(0,0)$ tendría que probar con otro punto escogido al azar.

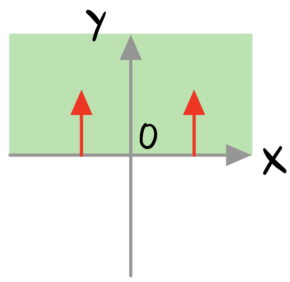
Casos sencillos de inecuaciones con los ejes de coordenadas



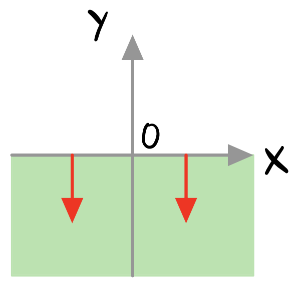
$x \geqslant 0$



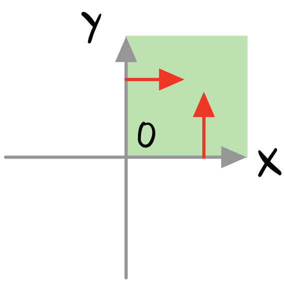
$x \leqslant 0$



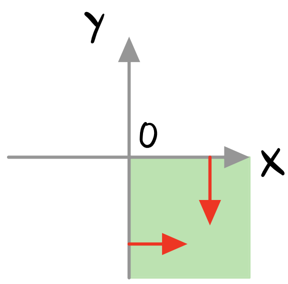
$y \geqslant 0$



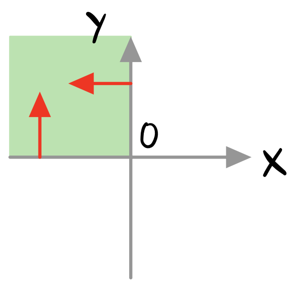
$y \leqslant 0$



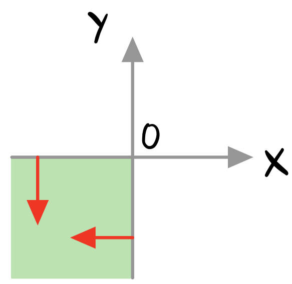
$x \geqslant 0 , y \geqslant 0$



$x \geqslant 0 , y \leqslant 0$



$x \leqslant 0 , y \geqslant 0$

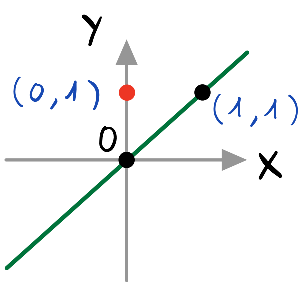


$x \leqslant 0 , y \leqslant 0$

Cómo averiguar dónse se cumple la inecuación cuando la recta pasa por el origen (0,0)

En estos casos no podemos hacer la prueba del punto $(0,0)$ porque está encima de la recta.

Para comprobar la inecuación tenemos que probar o evaluar un punto que esté fuera de la recta.



recta $y = x$

Ejemplo : $y \leqslant x$

Para representar la inecuación primero dibujamos la recta $y = x$ con dos puntos de corte:

Si $x = 0 \Rightarrow y = 0$, así que el primer punto de corte es el $(0,0)$

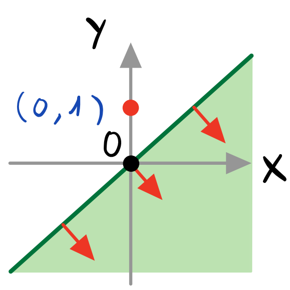
Si $y = 0 \Rightarrow x = 0$ que es el mismo punto de corte así que escogemos otro al punto al azar.

Por ejemplo, si $x = 1 \Rightarrow y = 1$, así que el segundo punto de corte es el $(1,1)$

Probamos un punto que esté fuera de la recta, por ejemplo $(\underset{x}{\underset{\uparrow}{0}}, \underset{y}{\underset{\uparrow}{1}})$

Sustituimos los valores en la inecuación : $y \leqslant x$

$\underset{y}{\underset{\uparrow}{1}} \leqslant \underset{x}{\underset{\uparrow}{0}}$ No cumple



$y \leqslant x$

> Si cumple la inecuación, sombreamos desde la recta hacia el punto que hemos probado.
> Si no cumple la inecuación, sombreamos desde la recta hacia el lado contrario al punto.

BOLETÍN: PROGRAMACIÓN LINEAL

✏️ Actividades de programación lineal: Beneficios y costes

1. Una fábrica de lámparas produce dos modelos A y B. El modelo A necesita dos horas de trabajo de chapa y una hora de pintura. El modelo B necesita una hora de chapa y dos de pintura. Semanalmente se emplean como máximo 80 horas en trabajos de chapa y 100 horas en trabajos de pintura. Cada unidad del modelo A se vende a 75 € y cada unidad del modelo B a 80 €.
   a) ¿Dibuja la región factible.
   b) Determina el número de lámparas de cada tipo que interesa producir para que el beneficio obtenido con su venta sea lo mayor posible.
   c) Calcula el beneficio máximo.

2. Un establecimiento de prendas deportivas tiene almacenados 1600 bañadores, 1000 gafas de baño y 800 gorros de baño. Se quiere incentivar la compra de estos productos mediante la oferta de dos tipos de lotes: el lote A, que produce un beneficio de 8 €, formado por un bañador, un gorro y unas gafas, y el lote B que produce un beneficio de 10 € y está formado por dos bañadores y unas gafas. Sabiendo que la publicidad de esta oferta tendrá un coste de 1500 € a deducir de los beneficios, se pide calcular el número de lotes A y B que harán máximo el beneficio y a cuánto asciende éste.

3. Una persona tiene 1500 € para invertir en dos tipos de acciones A y B. El tipo A tiene un interés simple anual del $9\ \%$ y el tipo B del $5\ \%$. Decide invertir como máximo 900 € en acciones A y como mínimo 300 euros en acciones del tipo B y además decide invertir en el tipo A por lo menos tanto como en el tipo B.
   a) Dibuja la región factible.
   b) ¿Cómo debe invertir los 1500 € para que los beneficios anuales sean los máximos posibles?
   c) Calcula esos beneficios anuales máximos.

4. Una compañía de telefonía móvil quiere celebrar una jornada de "Consumo razonable" y ofrece a sus clientes la siguiente oferta: 15 céntimos de euro por cada mensaje SMS y 25 céntimos de euro por cada minuto de conversación incluyendo el coste de establecimiento de llamada. Impone las condiciones:
   - El número de llamadas de un minuto no puede ser mayor que el número de mensajes aumentado en 3, ni ser menor que el número de mensajes disminuido en 3.
   - Sumando el quíntuplo del número de mensajes con el número de llamadas no puede obtenerse más de 27.

   a) Dibuja la región factible.
   b) Determina el número de mensajes y de llamadas para que el beneficio sea máximo.
   c) ¿Cuál es ese beneficio máximo?

✏️ Actividades de programación lineal: El problema de la dieta

5. La dieta para alimentar a un pájaro se obtiene a través de dos tipos de preparados A y B.
   A contiene 30 mg de calcio, 10 mg de fósforo y 40 mg de magnesio con un coste de 3 €.
   B contiene 40 mg de calcio, 30 mg de fósforo y 20 mg de magnesio con un coste de 4 €.
   La dieta debe aportar, como mínimo, 350 mg de calcio, 150 mg de fósforo y 300 mg de magnesio.
   Calcula la cantidad óptima de botes de los preparados A y B para minimizar el coste.

6. Los animales de una granja deben tomar, al menos, 60 mg de vitamina A y, al menos, 90 mg de vitamina B. Existen dos compuestos con estas vitaminas. El compuesto X contiene 10 mg de vitamina A y 15 mg de B, y cada dosis cuesta $0{,}50$ €. El compuesto Y contiene 10 mg de cada vitamina, y cada dosis cuesta $0{,}30$ €. Además, se recomienda no tomar más de 8 dosis diarias. Calcula qué dosis tiene que tomar para que el coste sea mínimo.

✏️ Actividades de programación lineal: Problemas no literales

7. Considera el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x + y \geq 1 \\ 3x + y \leq 13 \end{cases}$

   a) Representa gráficamente la región factible.
   b) Calcula el máximo de la función $f(x, y) = x - 3y$

✏️ Actividades de programación lineal: El problema del transporte

8. Se deben transportar naranjas de las ciudades de Gandía y Valencia a las ciudades de Santiago, Vigo y A Coruña. Las cantidades ofertadas son $500\ kg$ de Gandía y $750\ kg$ de Valencia. Las cantidades demandadas son $250\ kg$ por Santiago, $500\ kg$ por Vigo y $500\ kg$ por Coruña. Los costes, en céntimos por kg, de transportar de una ciudad a otra son:

	Santiago	**Vigo**	**A Coruña**
Gandía	1	2	2
Valencia	2	2	3

Establece la mejor forma de realizar el transporte para que el coste total sea mínimo.

¿Hay una única solución?

Actividades de programación lineal: Problemas combinados de repaso

9. El terreno dedicado a una plantación de hortalizas procesa semanalmente un mínimo $16\ kg$ de abono mineral y un mínimo de $18\ kg$ de abono vegetal. En el mercado existen dos paquetes de abonos P_1 y P_2. El paquete P_1 contiene $2\ kg$ de abono mineral y $5\ kg$ de abono vegetal y cada paquete del tipo P_2 contiene $3\ kg$ de abono mineral y $2\ kg$ de bono vegetal. Cada paquete de tipo P_1 cuesta 15 € y cada paquete del tipo P_2 cuesta 10 €. Calcula el número de paquetes de cada tipo que se deben adquirir para que el coste sea mínimo.

10. Un astillero recibe un encargo para reparar barcos de la flota de un armador, compuesta por pesqueros de 500 toneladas y yates de 100 toneladas. Cada pesquero se tarda en reparar 100 horas y cada yate 50 horas. El astillero dispone de 1600 horas para hacer la reparaciones. Por política de empresa, el astillero no acepta encargos de más de 12 pesqueros ni más de 16 yates. Las reparaciones se pagan 100 € la tonelada independientemente del tipo de barco. ¿Cuántos barcos de cada clase debe reparar el astillero para maximizar el ingreso con este encargo? ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

11. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} 3x+2y \geq 6 \\ 3x-4y \leq 6 \\ 3x+4y \leq 30 \\ 3x-2y \geq -6 \end{cases}$

    a) Representa gráficamente la región factible.
    b) Calcula el máximo y el mínimo de la función $f\left(x,y\right) = x+2y$

12. Resuelve de forma analítica el siguiente problema de programación lineal: $\begin{cases} x+y \leq 5 \\ 3x+y \geq 2 \\ 3x-2y \leq 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$

    a) Representa gráficamente la región factible.
    b) Calcula el mínimo de la función $f\left(x,y\right) = 9x+y$

13. Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casa de muñecas, produce cierto tipo de mesas y sillas que vende a 20 euros y 30 euros, respectivamente. Desea saber cuántas unidades de cada artículo debe de fabricar diariamente un operario para maximizar los ingresos, teniéndose las siguientes restricciones:

    El número total de unidades de los dos tipos no podrá exceder de 4 por día y operario. Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación; cada silla, 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas. El material utilizado en cada mesa cuesta 4 euros. El utilizado en cada silla cuesta 2 euros. Cada operario dispone de 12 euros diarios de material.

    Resuelve el problema y razona si con estas restricciones un operario puede fabricar diariamente una mesa y una silla, y si esto le conviene a la empresa.

14. Resuelve de forma analítica el siguiente problema de programación lineal: $\begin{cases} 2x+3y \le 12 \\ -2 \le 2x-y \le 4 \\ y \ge 0 \end{cases}$

    a) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.
    b) Justifica si el punto $P\,(-1/2, 1/2)$ pertenece a la región.
    c) Calcula el punto o puntos de la región factible donde la función $f\left(x,y\right) = -\,2x+5y$ alcanza sus valores máximo y mínimo.

15. En una fábrica se construyen dos tipos de aparatos: A y B. Ambos tipos de aparatos han de pasar por la secciones X e Y. Cada sección trabaja como máximo 100 horas por semana. Cada aparato A lleva 3 horas de la sección X y una de la sección Y. Cada aparato B lleva una hora de la sección X y dos de la sección Y. Cada aparato A se vende por 100 € y cada aparato B se vende a 150 €. Halla cuántos aparatos de cada tipo se producirán para que el ingreso por ventas sea máximo.

16. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} x-y+1 \ge 0 \\ x+y \ge 1 \\ 3x+y \le 13 \end{cases}$

    a) Representa gráficamente la región factible.
    b) Verifica si el punto $P\,(-1,2)$ pertenece a la región factible.
    c) Calcula el máximo y el mínimo de la función $f\left(x,y\right) = x-3y$.

17. Una fábrica elabora dos tipos de productos, A y B. El tipo A necesita 2 obreros trabajando un total de 20 horas, y se obtiene un beneficio de 1.500 € por unidad. El tipo B necesita 3 obreros con un total de 10 horas y el beneficio es de 1.000 € por unidad. Si disponemos de 60 obreros y 480 horas de trabajo, determina la cantidad de unidades de A y de B que se deben fabricar para maximizar el beneficio.

18. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} 3x + 4y \geq -6 \\ -x + 2y \leq 2 \\ x \leq 2 \end{cases}$

    a) Representa gráficamente la región factible.

    b) Verifica si el punto $P(-1,1)$ pertenece a la región factible.

    c) Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = -2x + 4y$.

19. Vamos a invertir en dos productos financieros A y B. La inversión en B será, al menos, de 3.000 € y no se invertirá en A más del doble que en B. El producto A proporciona un beneficio del $10\,\%$ y B del $5\,\%$. Si disponemos de un máximo de 12.000 €, ¿cuánto se debe invertir en cada producto para maximizar el beneficio?

20. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones lineales: $\begin{cases} 2x + 3y \geq -6 \\ 7x + 4y \leq 5 \\ -3x + 2y \leq 9 \end{cases}$

    a) Representa gráficamente la región factible.

    b) Verifica analíticamente si el punto $P(-1,2)$ pertenece a la región factible.

    c) Calcula el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = 15x - 10y$.

21. El dueño de una tienda de golosinas dispone de 10 paquetes de pipas, 30 chicles y 18 bombones. Decide que para venderlas mejor va a confeccionar dos tipos de paquetes. El tipo A estará formado por un paquete de pipas, dos chicles y dos bombones y se venderá a $1{,}50$ €. El tipo B estará formado por un paquete de pipas, cuatro chicles y un bombón y se venderá a 2 €.
    ¿Cuántos paquetes de cada tipo conviene preparar para conseguir los ingresos máximos?
    Determina los ingresos.

22. Un restaurante compra la fruta a una tienda ecológica. Esta tienda vende dos tipos de lotes, A y B. El lote A incluye $1\ kg$ de manzanas, $5\ kg$ de naranjas y $1\ kg$ de peras, mientras que el lote B incluye $4\ kg$ de manzanas, $2\ kg$ de naranjas y $1\ kg$ de peras. Cada lote de tipo A cuesta 8 euros y cada lote de tipo B cuesta 10 euros. Sabiendo que para mañana el restaurante quiere tener al menos $24\ kg$ de manzanas, $30\ kg$ de naranjas y $12\ kg$ de peras, determina la región factible y cuántos lotes de cada tipo debe comprar para minimizar el coste. ¿Cuál será el valor del coste en ese caso? ¿Es posible la combinación de 6 lotes de tipo A y 2 lotes de tipo B ?

✏️ BOLETÍN DE PROGRAMACIÓN LINEAL
(Actividades seleccionadas de pruebas PAU / ABAU de Galicia)

[ABAU Extraordinaria 2024]

EJERCICIO 2. Álgebra. Una fábrica textil compra tela a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden la tela a 2 y 3 euros por metro, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700 y para satisfacer su demanda, la fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros. La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B.

a) Plantee el problema que permite encontrar los metros que debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste.

b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) Calcule los metros que se deben comprar a cada distribuidor para obtener el mínimo coste y determine dicho coste mínimo.

[ABAU Ordinaria 2024]

EJERCICIO 2. Álgebra. Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$$x+2y\leq 40 \qquad x+y\geq 5 \qquad 3x+y\leq 45 \qquad x\geq 0$$

a) Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

b) Calcule el punto o puntos de esa región donde la función $f(x,y)=2x-3y$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

[ABAU Extraordinaria 2022]

EJERCICIO 2. Álgebra. En una fábrica se ensamblan dos tipos de motores: para motos y para coches. Para ensamblar un motor de moto se emplean 60 minutos de trabajo manual y 20 minutos de trabajo de máquina. Para ensamblar un motor de coche se emplean 45 minutos de trabajo manual y 40 minutos de trabajo de máquina. En un mes, la fábrica dispone de 120 horas de trabajo manual y 90 horas de trabajo de máquina. Sabiendo que el beneficio obtenido de cada motor de moto es de 1500 € y el de cada motor de coche de 2000 €

a) Plantee el problema que permite determinar cuántos motores de cada tipo hay que ensamblar mensualmente para maximizar los beneficios globales.

b) Represente gráficamente la región la región factible y calcule sus vértices.

c) Halle las cantidades mensuales que se deben ensamblar de motores de cada tipo para maximizar beneficios y determine cuál es el beneficio máximo.

[ABAU Extraordinaria 2021]

EXERCICIO 2. Álxebra. Un distribuidor de software informático, ten entre os seus clientes a empresas e a particulares. Ao finalizar o ano debe conseguir polo menos 25 empresas como clientes na súa carteira, e o número de clientes particulares que consiga deberá ser como mínimo o dobre que o de empresas. Ademais, ten estipulado un límite global de 120 clientes anuais. Finalmente, cada empresa produce 386 euros de ingresos anuais, mentres que cada particular 229 euros.

a) Formule o problema para maximizar os ingresos.

b) Represente graficamente o conxunto de solucións.

c) Cal desas solucións lle proporcionaría os maiores ingresos ao finalizar o ano? A canto ascenderían devanditos ingresos?

[ABAU Junio 2019 Opción B]

1. Una tienda deportiva desea liquidar 2000 camisetas y 1000 chándales de la temporada anterior. Para ello lanza dos ofertas, 1 y 2. La oferta 1 consiste en un lote de una camiseta y un chándal, que se vende a 30 €; la oferta 2 consiste en un lote de tres camisetas y un chándal, que se vende a 50 €. No se desea ofrecer menos de 200 lotes de la oferta 1 ni menos de 100 de la oferta 2.

a) Plantea el problema que permite determinar cuántos lotes de cada tipo debe vender para maximizar los ingresos. **b)** Representa la región factible. **c)** ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar los ingresos? ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

[ABAU Junio 2018 Opción B]

1. Unha pastelería fai con fariña e nata dous tipos de biscoitos: suave e duro. Dispón de 160 quilogramos de fariña e 100 quilogramos de nata. Para fabricar un biscoito suave necesita 250 gramos de fariña e 250 gramos de nata e para fabricar un biscoito duro necesita 400 gramos de fariña e 100 gramos de nata. Ademais o número de biscoitos suaves fabricados debe exceder ao menos en 100 unidades o número de biscoitos duros. Se os biscoitos suaves se venden a 6 € e os biscoitos duros a 4,5€,

[ABAU Septiembre 2017 Opción B]

1. Unha fábrica de materiais plásticos produce dous tipos de colectores *A* e *B.* A súa produción semanal debe de ser de polo menos 10 colectores en total e o número de colectores de tipo *B* non pode superar en máis de 10 ao número dos de tipo *A*. Ademais, cada colector de tipo *A* ten uns custos de produción de 150€ e cada colector de tipo *B* de 100€, dispoñendo dun máximo de 6000€ semanais para o custo total de produción.

(a) Formula o sistema de inecuacións. Representa a rexión factible e calcula os seus vértices.
(b) Se cada colector de tipo *A* xera uns beneficios de 130€ e o de tipo *B* de 140€, ¿cantos colectores de cada tipo terán que producir á semana para que o beneficio total semanal sexa máximo?

[PAU Junio 2010 Opción B Problema 1 (Difícil)]

Una empresa de transportes tiene que trasladar bloques de granito desde una cantera a un aserradero de piedra. Para eso dispone de un máximo de 8 camiones de tipo A y un máximo de 12 camiones de tipo B. Cada camión de tipo A necesita un operario y puede transportar 24 toneladas de granito con un gasto de 150 *euros*, mientras que cada camión de tipo B necesita dos operarios y puede transportar 12 toneladas de granito con un gasto de 300 *euros*. Se sabe que se necesitarán un mínimo de 15 operarios, que se transportarán un mínimo de 108 toneladas de granito y que el número de camiones de tipo A utilizados no será superior al número de camiones de tipo B.

a) Formula el sistema de inecuaciones asociado al problema. Representa la región factible y calcula sus vértices.
b) Calcula todas las posibilidades que tiene la empresa de distribuir los camiones para minimizar el gasto.

[PAU Junio 2009 Bloque Álgebra]

Exercicio 2. Unha compañía química deseña dous posibles tipos de cámaras de reacción que incluirán nunha planta para producir dous tipos de polímeros P_1 e P_2. A planta debe ter unha capacidade de produción de, polo menos 100 unidades de P_1 e polo menos 420 unidades de P_2 cada día. Cada cámara de tipo A custa 600.000 euros e é capaz de producir 10 unidades de P_1 e 20 unidades de P_2 por día; a cámara de tipo B é un deseño máis económico, custa 300.000 euros e é capaz de producir 4 unidades de P_1 e 30 unidades de P_2 por día. Debido ao proceso de deseño, é necesario ter polo menos 4 cámaras de cada tipo na planta. ¿Cantas cámaras de cada tipo deben incluirse para minimizar o custo e aínda así satisfacer o programa de produción requerido? Formula o sistema de inecuacións asociado ao problema. Representa a rexión factible e calcula os seus vértices.

NOMBRE:

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ y la matriz $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Determina el valor de x para que se verifique $A^2 \cdot X = A - B \cdot C$ (1,5 pt.)

   b) Halla todas las matrices X tales que $D \cdot X = X \cdot D$ siendo $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ (1 pt.)

2. Decidimos invertir una cantidad de 15000 euros en bolsa, comprando acciones de tres entidades A, B y C. Invertimos en A el doble que en B y en C juntas. Transcurrido un año, las acciones de la entidad A se revalorizaron un $3\,\%$, las de B un $4\,\%$ y las de C perdieron un $2\,\%$ y, como consecuencia, obtuvimos un beneficio de 380 €. Determina cuánto invertimos en cada una de las entidades. (2,5 pt.)

3. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} y - 2x \leq 7 \\ -x + 3y \leq 21 \\ x + 2y \leq 19 \\ x + y \leq 14 \end{cases}$

   a) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.

   b) Calcula el valor máximo y el mínimo de la función $f\left(x, y\right) = x + 4y$

   c) Podrá tomar la función objetivo el valor 40 en algún punto de la región factible? ¿ Y el valor 20 ? Justifica las respuestas. (2,5 pt.)

4. Una empresa comercializa dos tipos de concentrado de café, A y B, que se obtienen a partir de tres tipos de grano: de Colombia, de Etiopía y de Costa Rica. Para elaborar $1\ kg$ de concentrado A se necesitan $4{,}5\ kg$ de grano de Colombia y $3\ kg$ de grano de Etiopía. Por otra parte, se requieren $7{,}5\ kg$ de grano de Colombia y $1{,}5\ kg$ de grano de Costa Rica para elaborar $1\ kg$ de concentrado B. Actualmente la empresa dispone de un máximo de $67{,}5\ kg$ de grano de Colombia, $30\ kg$ de grano de Etiopía y $9\ kg$ de grano de Costa Rica. Además, se exige que el número de kilogramos de concentrado A producidos debe ser mayor o igual que la mitad de los kilogramos de concentrado B.

   a) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.

   b) Indique de manera razonada si con las condiciones dadas sería posible producir $7\ kg$ de concentrado A y $5\ kg$ de concentrado B .

   c) Sabiendo que el beneficio obtenido por la venta de cada kilogramo de concentrado del tipo A es 2 euros y de cada kilogramo de tipo B es 4 euros, ¿cuántos kilogramos del tipo A y cuántos del tipo B se habrán de producir para que el beneficio sea máximo? ¿Cuál es ese beneficio? (2,5 pt.)

EJERCICIO CLASE 27/11/2023

EJERCICIO 1

Se considera el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$x + y \geq 2; \quad x \leq y; \quad 0 \leq y \leq 2; \quad x \geq 0$$

a) Razona si el punto $(2,1)$ pertenece al recinto anterior
b) Obtén los vértices de la región factible
c) Optimiza la función $f(x, y) = 3x + 4y$

EJERCICIO 2

Las cantidades mínimas diarias recomendadas que debe ingerir una determinada mascota son: 6 unidades de hidratos de carbono, 18 unidades de proteínas y 4 unidades de grasas. Una empresa dedicada al cuidado de este tipo de mascotas plantea diseñar una dieta para las mismas, basada en el consumo de latas de dos marcas distintas M1 y M2. Se sabe que cada lata de la marca M1 contiene 3 unidades de hidratos de carbono, 3 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas y que cada lata de la marca M2 contiene 1 unidad de hidratos de carbono, 9 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Además, se sabe que el precio de cada lata de la marca M1 es de 22 euros y el que precio de cada lata de la marca M2 es de 24 euros.

a) ¿Cuántas latas de cada tipo se puede dar en un día a la mascota para cumplir todos los requisitos anteriores relativos a su dieta? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se le podría dar una lata de la marca M1 y dos latas de la marca M2?
b) ¿Cuántas latas de cada tipo se debería dar en un día a la mascota para que el precio de su alimentación sea mínimo? ¿y para minimizar el número de latas de tipo M1 que come ese día?

EJERCICIO 3

a) Dadas las matrices $F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, calcula los productos $C \cdot F$ y $F \cdot C$

b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X que verifique la ecuación matricial $X \cdot A^{-1} - B = C.$

EJERCICIO 4

Encuentra, si existen, matrices cuadradas A, de orden 2, distintas de la matriz identidad, tales que

$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot A,.$ ¿Cuántas matrices A existen con esa condición? Razona tu respuesta.

EJERCICIO 5

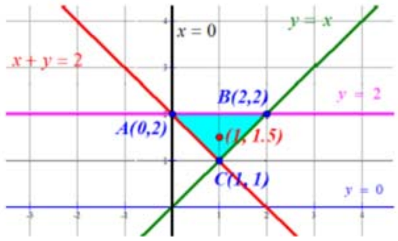
En el presupuesto de una corporación pública, las partidas dedicadas a inversión en proyectos de interés comunitario, gastos de funcionamiento (personal y corrientes) y gastos sociales (acciones culturales, educativas y sociales) suman 125 millones de euros. La inversión en proyectos es del 56,25% del resto de lo presupuestado y, por cada 9 millones dedicados a gastos sociales, hay 11 dedicados a gastos de funcionamiento.

a) Plantea el sistema de ecuaciones
b) ¿Cuáles son las cantidades asignadas a cada partida?

SOLUCIONARIO

EJERCICIO 1

Solución: Los vértices de la región factible son A(0, 2), B(2, 2) y C(1, 1).
c) El máximo valor de la función es 14 y se alcanza en el punto B(2, 2).
El mínimo valor de la función es 7 y se alcanza en el punto C(1, 1)

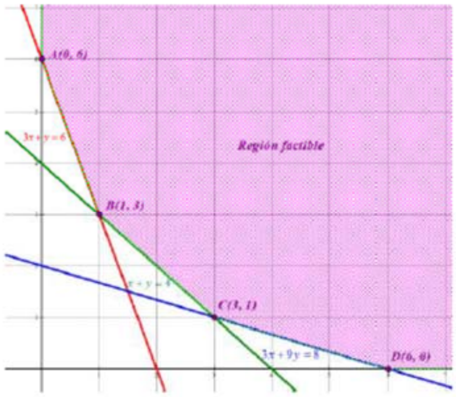


EJERCICIO 2

Solución: a) Llamamos "x" al número de latas diarias de M_1 e "y" al número de latas de M_2.
La región factible es la solución del sistema de inecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y\geq 6 \\ 3x+9y\geq 18 \\ x+y\geq 4 \\ x\geq 0;\quad y\geq 0 \end{array}\right\}$$

No se le puede dar 1 lata de M_1 y dos latas de la marca M_2
b) La función a minimizar es el coste que viene dado en función del número de latas por la expresión: $C(x,y)=22x+24y$. *El valor mínimo es 0 € y se alcanza en el vértice A(0, 6), lo que significa una dieta con solo 6 latas de la marca M_2.*



EJERCICIO 3

a)

$$C\cdot F=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 10 & -5 & 15 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F\cdot C=\begin{pmatrix} -9 \end{pmatrix}$$

b)

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 4

La matriz buscada es $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$, con $a\neq 1$ o $c\neq 0$. Por ejemplo, $A=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 17 & -4 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 5

b) 45 millones a proyectos, 44 a funcionamiento y 36 a gastos sociales.

EJERCICIO CLASE 28/11/2023

EJERCICIO 1

Se considera el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$7y - 8x \leq 3400; \quad 3x - 8y \leq 2000; \quad 11x + 14y \geq 9500; \quad x \leq 1200; \quad y \leq 1000$$

a) Representa gráficamente la región S y calcula las coordenadas de sus vértices.

b) Obtén el valor mínimo de la función $f(x, y) = 2x + y$ indicando el punto de la región en el cual se alcanza.

EJERCICIO 2

Fernanda dispone de 10.000 euros para invertir. Le han recomendado dos productos que en el último año tuvieron buenos resultados: criptomonedas y fondos de inversión garantizados. Por lo que ha leído en la prensa espera que la rentabilidad anual de las criptomonedas sea del 30% y la de los fondos de inversión sea del 5%. Para que la inversión no sea demasiado arriesgada quiere invertir en fondos tanto o más que criptomonedas y además, le aconsejan invertir en criptomonedas un máximo de 3000 euros y un mínimo de 1000 euros.

a) Plantea un problema de programación lineal que permita determinar cómo debe invertir Fernanda sus ahorros para obtener la máxima rentabilidad.

b) Resuelve el problema y calcula la rentabilidad máxima conseguida con la inversión.

c) Su gestor le dice que por la coyuntura económica actual el riesgo de inversión es del 35% para las criptomonedas y 0% para los fondos. Si Fernanda quisiera minimizar el riesgo de la inversión, justifica si invertir 1000 euros en criptomonedas y 5000 en fondos en una solución óptima (con las restricciones del enunciado).

EJERCICIO 3

Sean A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Determina la matriz X, cuadrada de orden 2 , en la ecuación matricial $(A + 2B) \cdot X = 3I_2$

EJERCICIO 4

Calcula los valores de x, y, z que verifica la siguiente ecuación matricial:

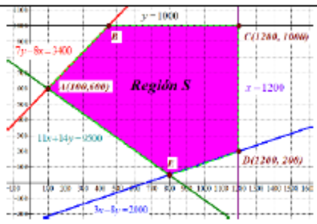
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 5

En una empresa de 57 trabajadores el gasto de salarios en este mes ha sido de 62000 euros. En la empresa hay trabajadores de tres categorías, denominadas A, B y C. Este mes el salario de los trabajadores de la categoría A ha sido de 800 euros, el de los trabajadores de la categoría B de 1000 euros y el de los trabajadores de la categoría C de 2000 euros. Una auditoría externa ha indicado que la desigualdad salarial entre los trabajadores de la empresa es excesiva, por lo que se ha decidido que el próximo mes se incrementará en un 4% el salario de los trabajadores de la categoría A, se mantendrá el salario de los trabajadores de la categoría B y se rebajará en un 10% el salario a los trabajadores de la categoría C. De esta manera, el gasto de la empresa en salarios en el próximo mes será un 2% inferior al gasto en salarios de este mes. ¿Cuántos trabajadores de cada categoría tiene la empresa?

SOLUCIONARIO

EJERCICIO 1

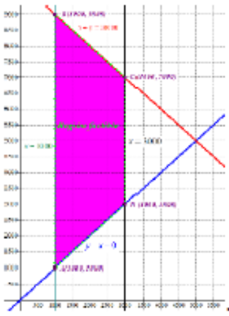
Solución: a) 

Los vértices de la región S son: A(100, 600), B(450, 1000), C(1200, 1000), D(1200, 200) y E(800, 50) *b) El valor mínimo de la función* $f(x,y)=2x+y$ *en la región S es 800 y se alcanza en el punto A(100, 600).*

EJERCICIO 2

Solución: a.- Queremos maximizar la rentabilidad: $R(x,y)=0.3x+0.05y$. *Las restricciones son:*

$$\left.\begin{array}{l} x+y\le 10000 \\ 0\le y-x \\ 1000\le x\le 3000 \\ x\ge 0;\;\; y\ge 0 \end{array}\right\}.$$

b.- 
. *Invirtiendo 3000 € en criptomonedas y 7000 € en fondos de inversión se obtiene una rentabilidad máxima de 1250 €.* *c.- Si es una solución óptima del problema.*

EJERCICIO 3

$$X=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 4

$$\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=2 \end{cases}$$

EJERCICIO 5

En la empresa hay 30 trabajadores de la categoría A, 16 de B y 11 de C

COLEGIO SANTA MARÍA DEL MAR. JESUITAS. A CORUÑA. DPTO: MAT

EXAMEN DE MATEMÁTICAS CCSS - 2º BACHILLERATO 27/09/2022

EVALUACIÓN INICIAL (MATRICES Y ECUACIONES MATRICIALES)

NOMBRE:

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

   a) Calcula las matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$ (1 pt.)

   b) Calcula los valores de x e y para que las matrices sean conmutables, es decir, para los que se verifica: $A \cdot B = B \cdot A$ (1,5 pt.)

2. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el término general de la potencia *n-ésima* A^n y después calcula también la potencia A^{10} (1,5 pt.)

3. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones matriciales: $\begin{cases} X + 3Y = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} \\ 2X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$ (2,5 pt.)

4. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

   a) Calcula la matriz inversa de A por el método de *Gauss-Jordan*. (2 pt.)

   b) Despeja simbólicamente X en la ecuación matricial $B^t - A \cdot X = B$ (1 pt.)

   c) Calcula X numéricamente para que verifique la ecuación matricial anterior. (0,5 pt.)

	COLEGIO SANTA MARÍA DEL MAR. JESUITAS. A CORUÑA. DPTO: MAT **EXAMEN DE MATEMÁTICAS CCSS - 2º BACHILLERATO 01/10/2021** **EVALUACIÓN INICIAL (MATRICES Y ECUACIONES MATRICIALES)** **NOMBRE:** IgnatiuSoo

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x+1 & 3 & 0 \\ z+1 & x+2 & z-1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & y+1 & 0 \\ y+2 & 3 & y \end{pmatrix}$

   a) Calcula la matriz $A - 2 \cdot B$ (1 pt.)

   b) Halla el valor de cada incógnita x, y, z para que las matrices sean iguales. (2 pt.)

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

   a) Calcula la matriz inversa de A por el método de *Gauss-Jordan*. (1,5 pt.)

   b) Despeja simbólicamente X en la ecuación matricial $A \cdot X + B^t = B$ (1 pt.)

   c) Calcula X numéricamente con los valores de A y B. (1 pt.)

3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Verifica que $(A + B)^t = A^t + B^t$ (1,5 pt.)

   b) Verifica que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ (2 pt.)

	COLEGIO SANTA MARÍA DEL MAR. JESUITAS. A CORUÑA. DPTO: MAT **EXAMEN DE MATEMÁTICAS CCSS - 2º BACHILLERATO 26/10/2023** **CONTROL DE ÁLGEBRA (MATRICES Y DETERMINANTES)** **NOMBRE:**

1. Resuelve las siguientes actividades de matrices:

   a) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula los valores de a e b en la matriz B para que conmuten, es decir, que se verifique la ecuación: $A \cdot B = B \cdot A$ (1 pt.)

   b) Calcula los valores de k para que $C = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ -1 & 1 & k \\ 0 & -1 & k \end{pmatrix}$ no tenga inversa. (1 pt.)

   c) Para $k = 0$ calcula el rango de la matriz C. (0,5 pt.)

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ -X + 3Y = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(2 pt.)

3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   a) Calcula la matriz inversa de $(\ A - 3 \cdot I\ )$ (método de determinantes) (1,25 pt.)

   b) Calcula X en la ecuación matricial $A \cdot X - B = 3 \cdot X$ (1,25 pt.)

4. Una farmacia ha vendido en una semana 450 medicamentos de tres marcas con los siguientes precios: los de la marca A a 20 €, B a 14 € y C a 10 €. La recaudación total asciende a 5700 €. Se sabe que por cada medicamento de la marca A, se han vendido 4 de la marca C. Calcula el número de medicamentos de cada marca que se han vendido en esa semana. (3 pt.)

	COLEGIO SANTA MARÍA DEL MAR. JESUITAS. A CORUÑA. DPTO: MAT **EXAMEN DE MATEMÁTICAS CCSS - 2º BACHILLERATO 24/10/2022** **CONTROL DE ÁLGEBRA (MATRICES Y DETERMINANTES) OP B** **NOMBRE:**

1. Resuelve las siguientes actividades de matrices:

   a) Calcula los valores de x e y en la matriz $M = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ para que se verifique la ecuación:

   $M \cdot M^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, siendo M^t la matriz traspuesta de M. (1,5 pt.)

   b) Calcula los valores de k para que $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & k & 0 \\ -k & 1 & 4 \end{pmatrix}$ no tenga inversa. (1 pt.)

   c) Para $k = 1$ calcula el rango de la matriz A. (0,5 pt.)

2. Se sabe que $|A| = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$:

   a) Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 2x-1 & 2y-1 & 2z-1 \end{vmatrix}$ (1 pt.)

   b) Calcula con propiedades (sin desarrollar) el determinante $\left|2 \cdot A^2\right|$ (0,5 pt.)

3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   a) Calcula la matriz inversa de $(A - I)$ (método de determinantes) (1,75 pt.)

   b) Calcula X en la ecuación matricial $X \cdot A - B^t = X$ (1,25 pt.)

4. El Palacio de la Ópera de A Coruña ha vendido 425 entradas para un concierto. Son de 3 tipos: Zona A a 30 € , Zona B a 20 € y *Zona* C a 15 €. La recaudación total asciende a 7750 €. Se sabe que por cada entrada de la zona A, se han vendido 5 de la zona C. Calcula el número de entradas de cada tipo que se han vendido para este concierto. (2,5 pt.)

COLEGIO SANTA MARÍA DEL MAR. JESUITAS. A CORUÑA. DPTO: MAT
EXAMEN DE MATEMÁTICAS CCSS - 2º BACHILLERATO 18/11/2019 B2.2-2.5
CONTROL DE ÁLGEBRA (MATRICES Y DETERMINANTES)

NOMBRE:

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   a) Calcula los valores de x que verifican $A - I = B^{-1}$ (1,5 pt.)

   b) Calcula los valores de a para que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$ no tenga inversa. (1 pt.)

   c) Se sabe que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10$. Calcula el valor del determinante $\begin{vmatrix} 2b & a & c/5 \\ 2e & d & f/5 \\ 2h & g & i/5 \end{vmatrix}$ (0,5 pt.)

2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Calcula la matriz $(A - 2I)^{-1}$. (1 pt.)

   b) Despeja y calcula X en la ecuación matricial $X \cdot A + B^t = 2 \cdot X$ (1 pt.)

3. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 4 \\ 7 & -1 & 12 \end{pmatrix} \\ X - 2Y = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(2 pt.)

4. Tres personas A, B y C, le van a hacer un regalo a un amigo. El regalo les cuesta $75{,}73$ € . Como no todos disponen del mismo dinero, deciden pagar de la siguiente manera: A paga el triple de lo que pagan B y C juntos, y por cada $0{,}12$ € que paga B, la persona C paga $0{,}18$ €.
   Plantea un sistema que permita determinar cuánto paga cada persona y resuelve el problema. Utiliza una precisión de céntimos (2 decimales) para los cálculos. (3 pt.)

	COLEGIO SANTA MARÍA DEL MAR. JESUITAS. A CORUÑA. DPTO: MAT **EXAMEN DE MATEMÁTICAS CCSS - 2º BACHILLERATO 05/12/2023** **CONTROL GLOBAL DE ÁLGEBRA** **(MATRICES, DETERMINANTES Y PROGRAMACIÓN LINEAL)** **NOMBRE:**

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & x \\ x & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

   a) Determina el valor de x para que se verifique $B^2 = A$ (1 pt.)

   b) Calcula el valor de x para que $B + C = A^{-1}$ (A^{-1} es la matriz inversa de A). (1,5 pt.)

2. Ana, Beatriz y Carmen son las delanteras titulares de un equipo de fútbol. Entre las tres, en la última temporada, han marcado 65 goles. Sabemos que Ana ha marcado un $50\,\%$ más de goles que Beatriz y sabemos que Carmen ha marcado la mitad de goles que Ana.

   a) Escribe el sistema de ecuaciones asociado al problema en forma matricial. (1 pt.)

   b) Resuelve el sistema anterior (por el método que quieras). ¿ Cuántos goles ha marcado cada una? (1 pt.)

3. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} -x + 6y \geq 12 \\ x + 2y \leq 20 \\ 3x + 2y \geq 4 \end{cases}$

   a) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices. (1,5 pt.)

   b) Calcula en qué puntos de la región factible la función $f\left(x, y\right) = 2x - 12y$ alcanza un valor máximo. (0,5 pt.)

4. Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, los modelos A y B . El coste de producir un metro de modelo A es igual a 2 € , mientras que el coste de producir un metro del modelo B es de $0{,}5$ € . Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6000 metros de cable en total, aunque del modelo B no podrán fabricarse más de 5000 metros y, debido al coste de producción, no es posible fabricar más de 8000 metros entre los dos modelos. Además, se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B mayor o igual a la de metros del modelo A .

   a) Formula el sistema de inecuaciones (restricciones). Representa la región factible y calcula sus vértices. (2 pt.)

   b) Determina el número de metros de cable que deben producirse de cada uno de los modelos para minimizar el coste. (1 pt.)

   c) ¿Es posible producir bajo estas condiciones 3000 metros del modelo A y 4000 metros del modelo B? (0,5 pt.)

COLEGIO SANTA MARÍA DEL MAR. JESUITAS. A CORUÑA. DPTO: MAT
EXAMEN DE MATEMÁTICAS CCSS - 2º BACHILLERATO 22/11/2022
CONTROL GLOBAL DE ÁLGEBRA
(MATRICES, DETERMINANTES Y PROGRAMACIÓN LINEAL)

NOMBRE:

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$

   a) Calcula B^{-1}, la matriz inversa de B. (0,5 pt.)

   b) Despeja y resuelve X en la ecuación matricial $A^{-1} \cdot X \cdot B - 2 \cdot C \cdot D = B^2$. (1,5 pt.)

   c) Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$

   Calcula el rango de la matriz M en función de los valores del parámetro λ. (1 pt.)

2. El cajero de un banco solo dispone de billetes de 10, 20 y 50 €. Hemos sacado 290 € del banco y el cajero nos ha entregado exactamente ocho billetes. El número de billetes de 10 € que nos ha dado es el doble del de 20 €.

   a) Escribe el sistema de ecuaciones asociado al problema en forma matricial. (1 pt.)

   b) Resuelve el sistema anterior (por el método que quieras). ¿ Cuántos billetes de cada tipo nos ha entregado el cajero? (1 pt.)

3. Resuelve analíticamente el siguiente sistema de inecuaciones: $\begin{cases} 3y - 2x \leq 10 \\ x + y \leq 10 \\ y \geq x \\ x \geq 1 \end{cases}$

   Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices. Calcula en qué puntos de esa región alcanza sus valores máximo y mínimo la función $f(x,y) = 2x - 2y + 7$. (2,5 pt.)

4. Una fábrica de materiales plásticos produce dos tipos de colectores A y B. Su producción semanal debe ser de por lo menos 10 colectores en total. El número de colectores de tipo B no puede superar en más de 10 al número de los de tipo A. Además, cada colector de tipo A tiene unos costes de producción de 150 € y cada colector de tipo B de 100 € y sólo se dispone de un máximo de 6000 € semanales para pagar el coste total de la producción.

   a) Formula el sistema de inecuaciones (restricciones). Representa la región factible y calcula sus vértices. (1,75 pt.)

   b) Se sabe que cada colector de tipo A genera unos beneficios de 130 € y el de tipo B de 140 €. Escribe la función objetivo y calcula cuántos colectores de cada tipo tendrá que producir a la semana para que el beneficio total semanal sea máximo. (0,75 pt.)

	COLEGIO SANTA MARÍA DEL MAR. JESUITAS. A CORUÑA. DPTO: MAT **EXAMEN DE MATEMÁTICAS CCSS - 2º BACHILLERATO 14/12/2021 OP CCNN C** **CONTROL GLOBAL DE ÁLGEBRA** **(MATRICES, DETERMINANTES Y PROGRAMACIÓN LINEAL)** IgnatiuSoo **NOMBRE:**

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

   a) Calcula B^{-1} , la matriz inversa de B. (1 pt.)

   b) Determina los valores de a y b que verifiquen la ecuación $A \cdot B^{-1} + 2 \cdot I = C^t$, donde I es la matriz identidad de orden 2. (1,5 pt.)

   c) Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & m-6 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

   Calcula el rango de la matriz M en función de los valores del parámetro m. (1 pt.)

2. Una aerolínea ha vendido 400 billetes para un vuelo internacional. Son de 3 tipos: *"primera clase"*, A, *"clase business"*, B, y *"clase turista"*, C. Por cada 3 billetes del tipo B, se venden 10 del tipo C. Además, se venden el triple de billetes del tipo C que de A y B juntos. Calcula el número de billetes de cada tipo que se han vendido para este vuelo. (3 pt.)

3. Un centro comercial tiene en existencias 750 reproductores de Blu-ray en el almacén A y otros 600 en el almacén B. Desea transportarlos a la tienda para tener al menos 900 reproductores a la venta y que los que provienen del almacén A no excedan el triple de los que vienen de B. Los costes unitarios de transporte son de $0{,}30$ € por unidad desde el almacén A y $0{,}25$ € por unidad desde el almacén B.

   a) Formula el problema que permite determinar cuántas unidades se deben enviar desde cada almacén para minimizar los costes de transporte (restricciones + objetivo). (1,25 pt.)

   b) Representa la región factible y calcula sus vértices. (1,5 pt.)

   c) ¿Cuántas unidades se deben enviar desde cada almacén para minimizar el coste de transporte? ¿A cuánto asciende dicho coste? (0,75 pt.)