

Números y Álgebra - Matrices

1. [Andalucía] Después de aplicar un descuento del 10% a cada uno de los precios originales, se ha pagado por un rotulador, un cuaderno y una carpeta 3'96 euros. Se sabe que el precio del cuaderno es la mitad del precio del rotulador y que el precio de la carpeta es igual al precio del cuaderno más el 20% del precio del rotulador. Determine el precio original de cada objeto.

2. [Asturias] Dado el sistema:
$$\begin{cases} (m-1)x + (m-4)y = 6 \\ 2x - y = 2m \end{cases}$$

a) [60%] Selecciona un valor de m para el que el sistema tenga solución única y encuentra la solución en ese caso.

b) [40%] Para $m = 3$, ¿pueden ser $(x, y) = (3, 0)$ y $(x, y) = (2, -2)$ soluciones de ese sistema? ¿Podría tener otras soluciones para $m = 3$? ¿Cuántas? Explica tu respuesta.

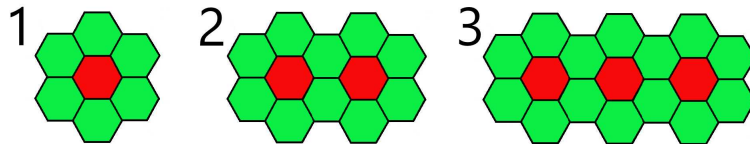
3. [Asturias] Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -m & m-2 \\ 2m & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } E = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$$

a) [60%] Si $\frac{1}{3}(A + B + C) \cdot D = E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m .

b) [40%] Encuentra, al menos, un valor de m para el cual el sistema tenga infinitas soluciones.

4. [Asturias] Observa las siguientes figuras:



a) [80%] ¿Cuántos hexágonos rojos y cuántos verdes habrá en la figura número 10? Encuentra una fórmula que permita determinar el número de hexágonos de cada color a partir del número de la figura.

b) [20%] ¿Puede existir una figura con 152 hexágonos verdes? En caso afirmativo, ¿qué número de figura sería? Si no es posible, explica por qué.

5. [Canarias] En una tienda de electrónica, se venden teléfonos móviles, tablets y ordenadores portátiles. El precio de un teléfono móvil es de 300€, el precio de una tablet es de 400€ y el precio de un ordenador portátil es de 800€. En una semana, se ha ingresado un total de 28000€ en ventas de estos aparatos. El número de teléfonos móviles vendidos ha sido el doble del número de tablets vendidas, y por cada dos tablets se ha vendido un ordenador portátil.

a) [60%] Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) [40%] ¿Cuántos dispositivos de cada tipo se vendieron en la tienda?

6. [Cantabria] Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Se pide hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1}A + A = B$.

b) Se pide hallar la matriz Y que satisface la ecuación $AYA^{-1} = I$

7. [Extremadura] Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ se pide, justificando las respuestas:

- a) [33'3%] Hallar el valor de b para el que no existe la matriz inversa de A .
- b) [66'6%] Para $b = 0$, hallar la matriz X que verifique $A \cdot X = A + 2 \cdot X$
8. [Extremadura] Una tienda de accesorios de telefonía móvil vende baterías externas, carcasas y cargadores a 20, 10 y 15 euros, respectivamente. Los precios de coste de estos productos son de 15 euros cada batería, 8 euros cada carcasa y 12 euros cada cargador. Cierta semana, en la que el total de los productos le costó 1210 euros, obtuvo unos beneficios de 340 euros. Calcular cuántas unidades vendió de cada producto si sabemos que en total vendió 100 (las mismas que compró).
9. [Galicia] Para dos matrices A y B se verifica que

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad 2A + B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

- a) [50%] Calcule las matrices A y B .
- b) [50%] Despeje la matriz X en la ecuación matricial $AX - B = X$ y calcule su valor.
10. [Castilla la Mancha] En la fase nacional de la Olimpiada de Matemáticas Española se reparten un total de 36 medallas, divididas en oro, plata y bronce. El número de medallas de bronce triplica a las medallas de oro y sabemos que, si dos de las medallas de plata se pasaran a la categoría de bronce, entonces la cantidad de medallas de bronce duplicaría la cantidad de medallas de plata.
- a) [60%] Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de medallas de cada tipo se reparten.
- b) [40%] Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

11. [Castilla la Mancha] Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, calcula la matriz X de la ecuación matricial $A \cdot B \cdot X = C \cdot X + I$.

12. [Madrid] Se consideran las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -100 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) [50%] Calcule la matriz D tal que $B(D^t + A^{-1})B^{-1} = 2I$, donde I es la matriz identidad de tamaño 2×2 .
- b) [50%] La matriz A verifica la igualdad $A^2 = A + 2I$. Calcule A^4 .
13. [Madrid] Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :
- $$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ ax + (-a+2)y = 2 \\ 2x - (a+3)y + (a+2)z = -5 \end{cases}$$
- a) [60%] Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .
- b) [40%] Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$
14. [Murcia] Resolver las siguientes cuestiones:
- a) [60%] Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a :

$$\left. \begin{aligned} x + 3y + z &= 5 \\ ax + 2z &= 0 \\ ay - z &= a \end{aligned} \right\}$$

b) [40%] Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Hallar la matriz X que verifica $AX - A = BX + B$.

15. [País Vasco] En un examen de matemáticas que constaba de tres problemas, Aitor obtuvo una calificación total de 7'2 puntos. La puntuación obtenida en el primer problema fue un 40% más que la obtenida en el segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en el primero y en el segundo. ¿Cuál fue la puntuación obtenida por Aitor en cada problema?

16. [País Vasco] Contesta:

a) [50%] Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 - 2x & 0 \\ 2 & x + 1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) [50%] Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, calcula la matriz $M = A^t \cdot A^{-1}$

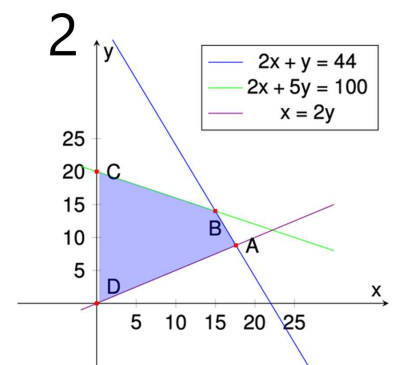
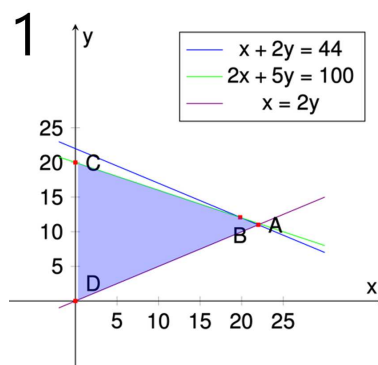
17. [Valencia] Una papelería pone a la venta 50 bolígrafos repartidos entre tres tipos: azules, rojos y negros. El número de bolígrafos azules es 11 veces la suma de la cantidad de bolígrafos negros más la mitad de los bolígrafos rojos. Vende por 3'75 euros cada bolígrafo azul, por 2'25 cada bolígrafo rojo y por 1'5 cada bolígrafo negro. Sabiendo que le han robado 2 bolígrafos negros y 4 azules y que ha recaudado vendiendo el resto de los bolígrafos 159 euros, ¿cuántos bolígrafos rojos, azules y negros tenía la tienda inicialmente?

Ejercicios de Números y Álgebra - Programación lineal

18. [Andalucía] La capacidad máxima de trabajo de un taller que se dedica a la confección de pañuelos y corbatas es de 60 horas semanales. Cada pañuelo que confecciona le supone 2 horas de trabajo y le reporta un beneficio de 4 euros. En el caso de las corbatas son 3 horas y 6 euros respectivamente por unidad. Contrae el compromiso de que el número de corbatas confeccionadas más el doble del número de pañuelos debe ser, como mínimo, 28. Con estas condiciones, ¿cuántas unidades de cada tipo de prenda debe confeccionar para obtener el máximo beneficio económico?

19. [Asturias] Un artesano teje gorros y bufandas. Cada gorro lleva 50 metros de lana de color blanco y 40 m de color negro. Cada bufanda lleva 100 m de color blanco y 100 m de color negro. Dispone de 2200 m de lana de color blanco y 2000 m de color negro y el número de gorros debe ser, a lo sumo, el doble que el de bufandas.

a) Explica cuál de las dos siguientes figuras sirve para representar el conjunto de posibles soluciones a la pregunta ¿Cuántos gorros y bufandas puede tejer? ¿Es válido como solución al problema cualquier punto dentro de la región factible? ¿Por qué?

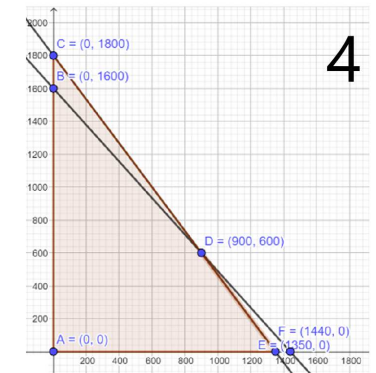
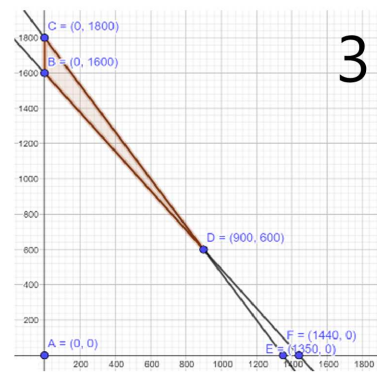
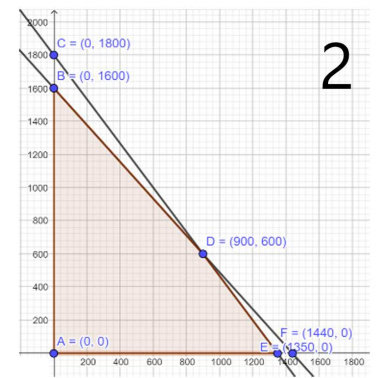
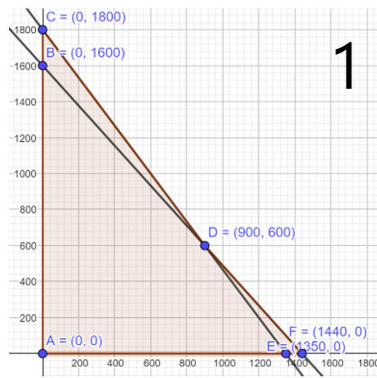


- b) [60%] ¿Puede tejer 12 gorros y 8 bufandas? Si vende cada gorro a 12 euros y cada bufanda a 18 euros, ¿cuántos gorros y bufandas debe tejer para maximizar los ingresos?
20. [Canarias] Una finca dispone de 1500 kilogramos de frutas y 1755 kilogramos de verduras para vender. Como estrategia comercial, oferta dos lotes: el lote A, que consiste en dos kilogramos de frutas y tres kilogramos de verduras, a 18 euros; el lote B, que consiste en 3 kilogramos de frutas y 3 de verduras, a 20 euros. Si ha de vender al menos 150 lotes del tipo A y al menos 180 del tipo B:
- [30%] Plantear el correspondiente problema de programación lineal.
 - [40%] Dibujar la región factible e indicar cuáles son sus vértices.
 - [30%] Para maximizar la recaudación, ¿cuántos lotes se han de vender de cada tipo? ¿Cuál sería la recaudación máxima?
21. [Cantabria] La editorial “EcoReads”, comprometida con la sostenibilidad ambiental, planea lanzar dos nuevas líneas de libros: una serie de guías prácticas sobre sostenibilidad y una colección de libros de cocina vegetariana. Cada guía práctica genera un beneficio de 5€ y cada libro de cocina vegetariana aporta un beneficio de 4€. Para la producción de estos libros, la editorial emplea dos tipos de papel ecológico: papel reciclado de alta calidad y papel de fibras de bambú. La impresión de una guía requiere 60 g de papel reciclado y 20 g de papel de bambú, mientras que cada libro de cocina vegetariana necesita 70 g de papel reciclado y 10 g de papel de bambú. La editorial tiene a su disposición 4000 g de papel reciclado y 800 g de papel de bambú para su próxima producción. Además, para garantizar una diversificación del catálogo, la editorial decide que se deben publicar al menos 10 libros de cocina vegetariana.
- Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
 - Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.
 - ¿Cuántos ejemplares de cada colección debería publicar la editorial para maximizar sus beneficios?
 - ¿A cuánto asciende dicho beneficio?
22. [Castilla y León] Una ONG organiza un convoy de ayuda humanitaria con un máximo de 27 camiones para llevar agua potable y medicinas a una zona devastada por unas inundaciones. Para agua potable dedica un mínimo de 12 camiones y para medicinas debe dedicar un número de camiones mayor o igual que la mitad del número de camiones dedicados a llevar agua. Enviar un camión con agua potable tiene un coste de 9000 euros, mientras que el coste para un camión de medicinas es de 6000 euros. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cómo debe organizarse el convoy para que su coste sea mínimo ¿Cuánto es el coste de la solución óptima?
23. [Galicia] Resuelva:
- [70%] Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones dado por:

$$x + 2y \leq 40 \quad x + y \geq 5 \quad 3x + y \leq 45 \quad x \geq 0$$
 - [30%] Calcule el punto o puntos de la región definida en el subapartado anterior donde la función $f(x, y) = 2x - 3y$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

24. [Castilla la Mancha] Una empresa de productos de papelería dispone de 270 m^2 de cartón y de 432 m de cinta de goma para la fabricación de dos tipos de carpetas: tamaño folio y tamaño cuartilla. Para una del primer tipo se necesitan $0'20\text{ m}^2$ de cartón y 30 cm de cinta de goma y se vende a $2'10\text{ €}$ la unidad. Para una carpeta del segundo tipo se necesitan $0'15\text{ m}^2$ de cartón y 27 cm de cinta de goma y se vende a $1'50\text{ €}$ la unidad. Sabiendo que se venden todas las carpetas que se fabrican:

- [30%] Expresa la función objetivo para la venta de carpetas.
- [30%] Determina, razonadamente, cuál de las siguientes regiones factibles corresponden al problema planteado.
- [40%] Determina cuántas carpetas de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo y calcula el beneficio.



25. [Murcia] Una empresa quiere hacer publicidad a través de anuncios en radio y en televisión. Los anuncios pueden emitirse en tres franjas horarias: franja A, franja B y franja C. El número de anuncios de cada franja que emite cada semana cada uno de los medios aparece en la tabla siguiente:

| | Franja A | franja B | franja C |
|------------|----------|----------|----------|
| Televisión | 2 | 10 | 6 |
| Radio | 5 | 5 | 6 |

Se quiere emitir un mínimo de 20 anuncios en la franja A, 50 en la franja B y 42 en la franja C, para lo que realiza contratos semanales con cada uno de los medios de comunicación. El coste del contrato semanal es de 3200 euros para la televisión y 2000 para la radio.

- [80%] ¿Cuántas semanas deberá contratar con cada uno de los medios para alcanzar su proyecto publicitario con un mínimo coste?
 - [20%] ¿Cuál es el coste mínimo?
26. [País Vasco] La industria de la relojería ha visto un resurgimiento en la demanda de productos tradicionales y una determinada fábrica de relojes que se encuentra en un momento crucial de su desarrollo, quiere aprovechar esta tendencia.

Sin embargo, se enfrenta a ciertas restricciones de producción, como la capacidad de maquinaria, la disponibilidad de materiales y la mano de obra especializada, lo que le hace limitar la fabricación diaria a 1000 unidades.

El análisis que realiza la fábrica se centra en determinar si es más viable producir relojes de pulsera o de bolsillo y en qué medida puede optimizar este proceso productivo. Para ello, considera varios factores. En cuanto a la facturación, hay una diferencia importante, la unidad de reloj de pulsera la vende a 90 euros, mientras que por cada uno de bolsillo ingresa 120 euros.

Por otra parte, las limitaciones de empleo de maquinaria, así como la duración de las jornadas del personal especializado, impiden la fabricación de más de 800 relojes de pulsera al día y de más de 600 de bolsillo.

Atendiendo a la situación de esta fábrica, responda a los siguientes apartados:

- a) [88%] ¿Cuántos relojes de cada tipo debe producir a diario para obtener el máximo ingreso?
 - b) [12%] ¿Cuál sería dicho ingreso?
27. [Valencia] Una empresa fabrica dos modelos de frigoríficos, A y B . Para su fabricación la empresa necesita un departamento de montaje y un departamento de pintura. Cada departamento dispone semanalmente de 100 horas. Un frigorífico del modelo A necesita 3 horas en el departamento de montaje y 1 hora en el de pintura, mientras que uno del modelo B necesita 1 hora y 2 horas, respectivamente, en cada departamento. Se pide:
- a) [85'7%] ¿Qué cantidad de cada modelo debe producir la empresa para maximizar sus ganancias, si el beneficio por cada frigorífico del modelo A es de 500 euros y por cada frigorífico del modelo B es de 400 euros?
 - b) [14'3%] ¿Cuál es dicha ganancia máxima?

Ejercicios de Análisis Matemático

28. [Andalucía] La cotización en bolsa de una empresa en un determinado día viene expresada, en euros, por la función $c(t)$, con $t \in [0, 24]$, medido en horas. La variación instantánea de esta función es la derivada de c , que viene dada por $c'(t) = 0'03t^2 - 0'9t + 6$, con $t \in (0, 24)$.
- a) [50%] Estudie los intervalos en los que la función de cotización es creciente.
 - b) [20%] Analice los puntos críticos de la función de cotización, indicando en qué horas se alcanzan el máximo y el mínimo relativos.
 - c) [30%] Halle la expresión analítica de la función $c(t)$, sabiendo que la cotización en bolsa de la empresa era de 50 euros en el instante inicial.
29. [Asturias] Tras ingerir cierta cantidad de alcohol en ayunas, el nivel de etanol en sangre (medido en mg/dl) de una persona se ajusta aproximadamente, durante las 5 horas siguientes a la ingesta, a la función:

$$f(x) = \begin{cases} -60x^2 + 160x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{10}{3}(x^2 - 14x + 48) & \text{si } 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo (en horas) transcurrido desde la ingesta.

- a) [70%] Entre las 0 y las 5 horas ¿el nivel de etanol en sangre se comporta de manera continua? ¿En algún momento el nivel de etanol es nulo? ¿El nivel de etanol aumenta siempre en ese intervalo? ¿En qué momento se alcanza el nivel máximo de etanol? ¿Y el nivel mínimo?
 - b) [30%] Si la persona es un conductor novel y el límite de alcohol en sangre permitido a un conductor novel es de $30 mg/dl$, ¿podría esta persona conducir 1 hora después de la ingesta? ¿Y a las 5 horas? Razona tu respuesta.
30. [Asturias] Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$:
- a) [40%] Encuentra la primitiva F de f que cumple que pasa por el punto $(2, 0)$.
 - b) [80%] Entre los puntos $x = 0$ y $x = 1$ la función f ¿toma siempre valores positivos, siempre negativos o valores tanto positivos como negativos? Si la función toma siempre valores del mismo signo entre $x = 0$ y $x = 1$, calcula el área delimitada por la función f y el eje X en ese intervalo.

31. [Canarias] La rentabilidad (en %) de un fondo de inversión inmobiliario se obtiene mediante la función:

$$R(t) = \begin{cases} \frac{-1}{2}t^2 + 3t + 1, & t \leq 4 \\ \frac{t + 111}{5t + 3}, & t > 4 \end{cases}$$

donde t es el tiempo (en años) que el dinero permanece invertido en el fondo.

- [30%] ¿Es continua la función de rentabilidad? Justifica la respuesta.
 - [50%] ¿Cuándo crece y cuando decrece esta función? Justifica la respuesta ¿Para qué valor de t se alcanza la rentabilidad máxima? ¿Cuánto vale dicha rentabilidad? Representa gráficamente la función.
 - [20%] El fondo de inversión garantiza que, para tiempos superiores a 25 años, la inversión siempre tendrá un retorno superior al 0'2%. ¿Es cierta la afirmación del fondo? Justifica la respuesta.
32. [Canarias] A principios de 2024, tras más de dos años y medio después de la erupción del volcán Tajogaite, se han comenzado a sembrar las primeras fincas de plátanos sobre las coladas de dicho volcán. Una de las fincas replantadas sobre la colada tiene una superficie, en hectáreas, limitada por las funciones $f(x) = (x - 2)^2$ y $g(x) = -x + 4$
- [30%] Representa la superficie de la finca.
 - [40%] Calcula el área.
 - [30%] Si la finca produce anualmente 45000 kg de plátanos por hectárea y la Unión Europea aporta una ayuda de 0'33 euros por kilo producido ¿Cuál sería el importe a recibir cada año en ayudas de la UE sabiendo que aproximadamente el 1'5% de la producción se desecha antes de recibir las ayudas?

33. [Cantabria] Dada la función $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 4, & \text{si } x \leq -1 \\ x^3 - x + 3, & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ \frac{x + 3b - 2}{x - 1}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en todo su dominio.
 - Utilizando los valores de los parámetros a y b del apartado anterior, analice si la función $f(x)$ es creciente o decreciente en el intervalo $(2, +\infty)$.
 - Calcule la integral definida $I = \int_0^2 f(x) dx$.
34. [Castilla la Mancha] El precio, $P(x)$ (en euros), de las acciones de una compañía a lo largo de 10 días ($x =$ días) viene expresado por la función:

$$P(x) = \begin{cases} 18x^2 - 100x + 162 & \text{si } 0 \leq x \leq c \\ -x^3 + 18x^2 - 96x + 162 & \text{si } c < x < 10 \end{cases}$$

- [40%] ¿Para qué valor de c el precio de las acciones se comporta de forma continua en $x = c$?
- [30%] Suponiendo que $c = 2$, ¿cuándo se tienen los precios máximo y mínimo de las acciones a partir del segundo día?
- [30%] En ese mismo supuesto, determina en qué intervalos de tiempo el precio de las acciones crece y en cuáles decrece a partir del segundo día.

35. [Castilla la Mancha] Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, se sabe que la función tiene un máximo relativo en el punto $(1, 0)$, un punto de inflexión en el punto de abscisa $x = 0$ y la pendiente de la recta tangente a la curva en $x = 2$ es -9 . Encuentra el valor de los parámetros a , b , c y d .

36. [Castilla y León] Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{2x + 71}{4x + 7} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- a) [50%] Calcular el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 2]$, dibujando el recinto correspondiente.
- b) [50%] Responda a una de las siguientes cuestiones:
- 1) Aplicar el concepto de límite para estudiar si la función es continua.
 - 2) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo $(2, \infty)$.
37. [Extremadura] En una almazara el coste total (en euros) que supone la producción de x toneladas de determinada variedad de aceite de oliva viene dado por la función:

$$C(x) = 2x^4 - 48x^3 + 360x^2 - 600x, \quad 5 \leq x \leq 13$$

Determinar, justificando la respuesta:

- a) [16'6%] La función que proporciona el coste medio por tonelada (coste unitario).
 - b) [66'7%] La cantidad de toneladas que han de producirse para alcanzar los costes unitarios mínimo y máximo.
 - c) [16'6%] Los costes unitarios máximo y mínimo que puede tener la almazara.
38. [Extremadura] Calcular de forma razonada:
- a) [50%] El área encerrada por la función $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 4$.
 - b) [50%] Las asíntotas de la función: $g(x) = \frac{3x + 2}{x^2 - 2x - 3}$
39. [Galicia] El número de ejemplares vendidos de una revista (en miles de unidades), en los primeros cinco meses del año, viene dado por la función

$$N(t) = \begin{cases} 8 - t(t - 2) & , \quad 0 \leq t \leq 3 \\ 2t - 1 & , \quad 3 < t \leq 5 \end{cases}$$

donde t es el tiempo transcurrido en meses. Responda los tres subapartados siguientes:

- a) [40%] Estudie el crecimiento y decrecimiento del número de ejemplares vendidos.
 - b) [30%] Calcule en qué momentos se produce el máximo y el mínimo número de ventas y a cuánto ascienden.
 - c) [30%] Represente la gráfica de la función $N(t)$.
40. [Galicia] Considérese la función $f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + c$, donde a , b y c son números reales:
- a) [50%] Calcule a , b y c sabiendo que la función $f(x)$ pasa por $(2, 8)$ y que tiene un extremo relativo en $(0, 16)$.
 - b) [50%] Para $a = b = 0$ y $c = 16$, calcule el área de la región limitada por la función $f(x)$ y la recta $y = 8$.

41. [Madrid] HidroBio es una marca de un preparado en polvo para elaborar suero bebible que se utiliza para rehidratar a pacientes con gastroenteritis. El suero se prepara disolviendo un sobre de HidroBio en un litro de agua. La marca comercializa tres tipos de sobres, de sabor a naranja, fresa o limón. El contenido de cada sobre reacciona químicamente con el agua produciéndose en esa reacción un determinado principio activo, en cantidad variable en función del tiempo, de manera que la tasa de variación instantánea de la cantidad de principio activo, medida en mg/hora, viene dada por la función

$$c(t) = \frac{3}{2} \left(t - \frac{t^2}{2} \right)$$

siendo t el tiempo transcurrido, en horas, desde la elaboración del preparado hasta pasadas tres horas. La cantidad de principio activo presente en la disolución potencia además el sabor del preparado, de forma que a más cantidad de principio más intenso es el sabor.

- a) [40%] Indique la cantidad de principio activo al cabo de 60 minutos de haber sido preparado el suero.
- b) [30%] ¿Va aumentando la cantidad de principio activo a lo largo de las 3 primeras horas? ¿Por qué?.
- c) [30%] Se ha observado que para conseguir que los menores de 5 años ingieran el suero más fácilmente, lo mejor es disolver un sobre con sabor a fresa y darles el primer vaso en el momento en que el sabor de la disolución sea más intenso. ¿Cuándo le daría el primer vaso de suero a una niña de 4 años? Determine cuál será la cantidad de principio activo en el litro de suero en ese momento.
42. [Murcia] Se ha estimado en una empresa que su beneficio en los próximos 10 años viene dado por la función: $B(t) = \begin{cases} at - t^2 & \text{si } 0 < t \leq 6 \\ 2t & \text{si } 6 < t \leq 10 \end{cases}$ siendo t el tiempo transcurrido en años.
- a) [25%] Calcular el valor del parámetro a para que la función de beneficios sea continua.
- b) [50%] Para $a = 8$ represente su gráfica y diga en qué intervalo de tiempo la función crece o decrece.
- c) [25%] Para $a = 8$ indique en qué momento, de los 6 primeros años, se obtiene el máximo beneficio y cuál es su valor.
43. [Murcia] Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

a) [33*3%] $f(x) = \frac{-x}{\sqrt[4]{3x-1}}$

b) [33*3%] $g(x) = e^{2x-1} \ln(x+2)$

c) [33*3%] $H(x) = \sqrt{\frac{x-1}{1+x}}$

44. [Murcia] Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x) = x^2 - 2x + 2$ y $g(x) = -x^2 + 6$. Calcular su área.
45. [Murcia] Se considera la función definida por: $f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ Calcular el área del recinto acotado limitado por la gráfica de f , la recta $x = -2$ y el eje OX .
46. [País Vasco] La función de costes de una empresa (en miles de euros) se puede determinar mediante la expresión:

$$f(x) = 40 - 6x + x^2, \text{ para } x \geq 0$$

donde “ x ” representa la cantidad producida de un determinado artículo.

- a) [30%] ¿Disminuye el coste alguna vez?
- b) [20%] Determina la cantidad producida de este artículo cuando el coste es mínimo y calcula cuál es dicho coste.
- c) [10%] ¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo?
- d) [30%] Si el coste fuera 80 000 €, ¿cuál sería la cantidad producida?
- e) [10%] Representa gráficamente la función.

47. [País vasco] Resolver:

- a) [30%] Sea la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$. Halla los valores de los coeficientes a y b sabiendo que la función pasa por el punto $(1, -3)$ y tiene un punto de inflexión en $x = -1$.
- b) [40%] Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de la función $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$.
- c) [30%] Calcula el área de la región delimitada por la función $g(x)$, el eje de abscisas OX y las rectas $x = 1$, $x = 2$; y haz su representación gráfica.

48. [Valencia] Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 24x, & \text{si } x \leq -1 \\ (x-1)^2 + 3, & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

siendo a un número real.

- a) [14'2%] Determina el valor de a para que esta función sea continua.
- b) [42'9%] Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimos locales que tiene esta función en el intervalo $(-9/2, -3/2)$.
- c) [42'9%] Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX .
49. [Valencia] El rendimiento, en tanto por ciento, de cierto motor de combustión en función del tiempo de uso x (medido en años) viene dado por la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{50x}{1+x^2} + 50$$

- a) [42'8%] Calcula cuándo el motor alcanza su rendimiento máximo y cuál es ese rendimiento máximo.
- b) [28'6%] ¿En algún momento el rendimiento del motor es inferior al 50%?
- c) [28'6%] Si se considera que el motor debe reemplazarse si el rendimiento es inferior al 65% a partir del primer año, ¿en qué momento debe reemplazarse?

Ejercicios de Probabilidad

50. [Andalucía] Para tratar cierta enfermedad, en un hospital se utilizan tres fármacos distintos, A , B y C , administrándose a cada enfermo un solo fármaco. El 30% de los pacientes es tratado con el fármaco A , el 50% es tratado con el B y el resto con el fármaco C . La probabilidad de que la enfermedad se cure con el fármaco A es de 0'6, de que se cure con el fármaco B es de 0'8 y de que se cure con el fármaco C es de 0'7. Se elige al azar un paciente de ese hospital con esa enfermedad.
- a) [60%] Calcule la probabilidad de que el paciente se cure.
- b) [40%] Sabiendo que el paciente se ha curado, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido tratado con el fármaco A ?

51. [Andalucía] Un jugador de baloncesto tiene una probabilidad de $0,8$ de encestar un tiro libre. Si en un partido lanza 6 tiros libres, halle la probabilidad de que enceste:
- [30%] Exactamente cuatro tiros libres.
 - [30%] Al menos cuatro tiros.
 - [20%] Ninguno de ellos.
 - [20%] Alguno de ellos.
52. [Asturias] Una empresa comercializa cromos de unos dibujos animados. El 60 % de los cromos son de personajes del “Reino Rosa” y el resto de los personajes del “Reino Gris”. Por otro lado, uno de cada tres cromos del “Reino Rosa” y uno de cada cinco del “Reino Gris” tienen el borde dorado.
- [50%] Elegido un cromo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el borde dorado?
 - [50%] Si se elige al azar un cromo entre los que no tienen el borde dorado, ¿cuál es la probabilidad de que sea del “Reino Rosa”?
53. [Asturias] Una marca de bolsos comercializó tres modelos la pasada primavera. El 3% del total de bolsos fabricados salieron defectuosos. Por otra parte, el 30% de todos los bolsos fabricados eran de tipo A; el 35%, de tipo B y el resto, de tipo C. Además, se sabe que el 3% de los de tipo A y el 5% de los de tipo C salieron defectuosos.
- [50%] Elegido al azar un bolso entre los de tipo B, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?
 - [50%] Elegido un bolso al azar entre los defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que sea de tipo B?
54. [Canarias] Dos agricultores de medianías producen manzanas de tres variedades: reineta, fuji y golden. De las manzanas producidas por el agricultor A, el 70% son reinetas, el 20% fuji y el resto golden; de las producidas por el agricultor B, un 50% son reinetas, un 30% golden y el resto fuji. Un supermercado de la zona vende manzanas solamente de estos agricultores. El 60% de las manzanas las adquiere del agricultor A y el 40% restante del B.
- [20%] Dibuja el árbol de probabilidades correspondiente a la situación descrita.
 - [40%] ¿Cuál es la probabilidad de que la manzana elegida al azar por un cliente sea de la variedad reineta?
 - [40%] Si la manzana elegida no es de la variedad reineta ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producida por el agricultor A?
55. [Canarias] En una determinada ciudad, el precio del alquiler mensual de pisos de dos habitaciones sigue una distribución normal de media 725 euros con una desviación típica de 50 euros.
- [30%] ¿Cuál es la probabilidad de que alquilar uno de estos pisos cueste cada mes, a lo sumo, 700 euros?
 - [30%] En un determinado mes, una agencia inmobiliaria alquila 25 de los pisos anteriormente mencionados. ¿Cuál es la probabilidad de que el precio medio de alquiler mensual supere los 730 euros?
 - [40%] De los 25 pisos alquilados por la agencia en ese mes, ¿cuántos se puede esperar que cuesten menos de 710 euros cada mes?
56. [Cantabria] En un instituto, se sabe que el 45% de los estudiantes practican algún deporte, el 30% participan en actividades artísticas y el 25% están involucrados en actividades de voluntariado. Además, se sabe que el 60% de los estudiantes que practican deportes, el 40% de los que participan en actividades artísticas y el 20% de los que están involucrados en actividades de voluntariado también son miembros del consejo estudiantil. Si se escoge al azar un estudiante:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que practique deporte y sea miembro del consejo estudiantil?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante participe en actividades artísticas y no sea miembro del consejo estudiantil?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante sea miembro del consejo estudiantil?
- d) Si un estudiante no es miembro del consejo estudiantil, ¿cuál es la probabilidad de que participe en actividades de voluntariado?
57. [Castilla y León] Un instituto está preocupado por el impacto que el uso de redes sociales está teniendo en el rendimiento académico de sus estudiantes de bachillerato. Para investigar este tema, se revisan algunos informes publicados sobre el uso de redes sociales durante las horas de estudio. A partir de los informes revisados, se ha determinado que el 70 % de los estudiantes usa redes sociales mientras estudia y que el 30 % no lo hace. Del grupo de estudiantes que usa redes sociales, el 60 % estudia menos de 2 horas diarias, mientras que el 40 % estudia 2 o más horas al día. Del grupo que no usa redes sociales, el 20 % estudia menos de 2 horas y el 80 % estudia 2 o más horas. Responda a las siguientes cuestiones:
- a) [50 %] Escribir la información anterior en términos de probabilidades de sucesos.
- b) [50 %] Se selecciona al azar a un estudiante y resulta que estudia menos de 2 horas al día. Determinar si es más probable que este estudiante use redes sociales o no durante sus horas de estudio.
58. [Extremadura] Una compañía energética realiza un estudio de mercado entre sus clientes. Los clientes de esta compañía energética pueden contratar dos productos electricidad o gas. El 75 % de los clientes contrata la electricidad. De estos clientes, sólo el 20 % contrata el gas. Se pide, justificando las respuestas:
- a) [50 %] ¿Qué porcentaje de clientes contrata ambos productos?
- b) [50 %] Si el 90 % de los clientes contrata alguno de los dos productos, ¿qué porcentaje de clientes contrata el gas?
59. [Galicia] Los responsables municipales de la población en la que reside llevaron a cabo el año pasado un plan de renovación de los contenedores de basura, instalando nuevos contenedores de recogida selectiva. Su capacidad variará entre los 1800 litros para los envases de materia orgánica y los 2900 litros para los envases destinados a la recogida de envases ligeros, papel y cartón, vidrio y fracción restante. Los contenedores, además de contar con sensores inteligentes que medirán su volumen para optimizar el tráfico de camiones, se integrarán en el mobiliario urbano para reducir el impacto estético. Cuando se puso en marcha el citado plan, se tuvo en cuenta que en ocasiones son necesarias reparaciones o sustituciones por diferentes motivos: desgaste por el uso, rotura por fenómenos meteorológicos adversos, actos vandálicos, etc. Se ha establecido que en un mes determinado la probabilidad de reparar o reemplazar al menos dos contenedores de papel y cartón es $0'1$; además, que la probabilidad de reparar o sustituir al menos dos envases de envases ligeros, siendo reparados o sustituidos al menos dos envases de papel y cartón, es de $0'4$. Se conoce que la probabilidad de que en un mes determinado sea necesario reparar como máximo un contenedor de papel y cartón y como máximo uno de envases ligero es de $0'72$.
- a) [40 %] Calcule la probabilidad de que en un mes determinado sea necesario reparar o sustituir más de un contenedor de los dos tipos considerados en el párrafo anterior.
- b) [40 %] Si es necesario reparar o reemplazar menos de dos contenedores de papel y cartón en un mes determinado, ¿cuál es la probabilidad de que sea necesario reparar o reemplazar dos o más contenedores de envases ligeros?
- c) [20 %] Sin realizar operaciones adicionales, indique si los sucesos “reparar o sustituir al menos dos contenedores de papel y cartón” y “reparar o sustituir al menos dos contenedores de envases ligeros” son o no independientes. ¿Le parece razonable? Justifique la respuesta.

60. [Galicia] Se estima que, en una población, el 20 % padece obesidad y que el 11 % padece obesidad y son hipertensos. Además, el 27'5 % de los hipertensos padecen obesidad.
- [80 %] ¿Qué porcentaje de la población padece obesidad o es hipertenso?
 - [20 %] ¿Son incompatibles los sucesos “padecer obesidad” y “ser hipertenso”? Justifique su respuesta.
61. [Madrid] De dos sucesos A y B sabemos que: $p(A \cup B) = 1$, $p(B) = 0'8$ y $p(\overline{A}) = 0'55$, donde \overline{A} es el suceso complementario de A .
- [40 %] Calcule $p(A/B)$.
 - [40 %] Calcule $p(\overline{B}/A)$
 - [20 %] Calcule $p(\overline{A} \cap B)$
62. [Madrid] En los premios Grammy Latino, se sabe que el 40 % de los artistas nominados en la categoría de Mejor Álbum del Año son dúos, el 30 % son grupos musicales (más de dos artistas) y el 30 % son solistas. Además, se ha observado que el 20 % de los dúos, el 15 % de los grupos musicales y el 25 % de los solistas nominados han ganado el premio de Mejor Álbum del Año. Eligiendo al azar un artista nominado al Mejor Álbum del Año, y sabiendo que en este concurso los artistas sólo pueden presentarse por una de las tres categorías musicales, calcule la probabilidad de que:
- [50 %] Haya ganado el Grammy Latino en dicha categoría.
 - [50 %] Dicho artista sea solista, sabiendo que ha ganado el Grammy Latino en dicha categoría
63. [Murcia] En un partido de fútbol cuatro jugadores, A , B , C y D , lanzan en este orden un penalti cada uno. Se sabe, por otras ocasiones, que la probabilidad de marcar de cada uno de ellos es de $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{5}$ y $\frac{3}{4}$, respectivamente. Calcular:
- [30 %] La probabilidad de que todos marquen gol.
 - [30 %] La probabilidad de que ninguno marque.
 - [40 %] La probabilidad de que al menos uno de ellos marque.
64. [País Vasco] En una caja hay una bola roja y una bola azul. Se extraen dos bolas de la caja como se explica a continuación: se extrae una bola, y antes de sacar la segunda se devuelve a la caja la primera bola extraída, añadiendo otras dos bolas del mismo color.
- [20 %] Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado ha sido azul.
 - [50 %] Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul.
 - [30 %] Si la segunda bola ha sido azul, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja?
65. [País Vasco] Sean A , B , C y D sucesos de un determinado experimento aleatorio.
- [30 %] Sabemos que $p(A) = 0'4$; $p(B) = 0'3$ y $p(A \cup B) = 0'5$. Calcula la probabilidad de que ocurran A y B .
 - [40 %] Sabemos que $p(C) = 0'5$; $p(D) = 0'6$ y $p(C \cup D) = 0'7$. Calcula la probabilidad de que ocurra C sabiendo que ha ocurrido D .
 - [30 %] Sabemos que $p(A) = 0'4$; $p(E) = 0'6$ y que los sucesos A y E son independientes. Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

66. [Valencia] Un instituto tiene estudiantes de ESO y de Bachillerato. El instituto ofrece tres extraescolares: dos deportivas (fútbol y baloncesto) y una no deportiva (música); todos los estudiantes tienen que escoger una extraescolar, pero solo una. El instituto tiene en total 400 estudiantes, y 300 de ellos han escogido fútbol. El instituto tiene 310 estudiantes de ESO; de ellos, 230 han escogido fútbol y 60 han escogido baloncesto. Se sabe también que 8 estudiantes de Bachillerato han escogido música. Seleccionamos al azar un estudiante de este instituto.
- [33'3%] Calcula la probabilidad de que el estudiante esté en ESO o haya escogido música.
 - [33'3%] Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté en ESO?
 - [33'3%] ¿Son independientes los sucesos “el estudiante está en Bachillerato” y “el estudiante no ha escogido baloncesto”?

Ejercicios de Estadística

67. [Andalucía] El número de días de permanencia de los enfermos en un hospital sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 3 días.
- [50%] Determine un intervalo de confianza para estimar la media poblacional, a un nivel de confianza del 97 %, con una muestra aleatoria de 100 enfermos cuya media es 8'1 días.
 - [50%] ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria para poder estimar la media poblacional con un error inferior a 1 día y un nivel de confianza del 92 %.
68. [Andalucía] Una tienda de ropa quiere estudiar la aceptación de un nuevo sistema de pago a través del teléfono móvil. Para ello realiza una encuesta entre 200 de sus clientes elegidos al azar, resultado que 150 de ellos sí estarían dispuestos a usar el nuevo sistema de pago.
- [60%] Determine un intervalo de confianza al 97 % para estimar la proporción de clientes de esa tienda que estarían dispuestos a usar el nuevo sistema de pago.
 - [40%] Mediante una nueva encuesta se quiere estimar la proporción de clientes de esa tienda que usarían el nuevo sistema de pago, con un error máximo del 3 % y un nivel de confianza del 94 %. Suponiendo que se mantiene la proporción muestral del apartado anterior, ¿a cuántos clientes como mínimo habría que realizar la encuesta?
69. [Asturias] Una fábrica hace un control de calidad para determinar la proporción de tabletas de chocolate que realmente contienen la cantidad de leche que indican en el envoltorio.
- [40%] ¿Cuál debería ser el tamaño muestral mínimo para determinar la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0'05 y un nivel de confianza del 95 %?
 - [40%] Finalmente, se decidió analizar 300 tabletas. Si la proporción muestral y el nivel de confianza son los mismos, ¿se obtendrá un intervalo más amplio con 300 tabletas o con el número de tabletas obtenido en el apartado anterior?
 - [20%] Si a partir de la misma muestra de tamaño 300 se quisiera obtener un intervalo de confianza al 99 % de confianza, ¿este último intervalo será más amplio o menos? ¿Por qué?
70. [Asturias] El nivel de cierta hormona en sangre sigue distribución normal con desviación típica 1'2 UI/ℓ. Para una muestra de 200 personas se obtuvo, con un nivel de confianza al 90 %, el intervalo de confianza (8'5608, 8'8392) para estimar el nivel medio de esa hormona en la sangre de las personas en la muestra.
- [40%] ¿Cuál fue el nivel medio de la hormona en la sangre en esas 200 personas?
 - [30%] En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación?

- c) [30%] Uno de los dos intervalos siguientes: $(8'5681, 8'8319)$ y $(8'5514, 8'8486)$ se obtuvo a partir de la misma muestra al 88% de confianza. Razona adecuadamente cuál de los dos corresponde al nivel de confianza del 88%.
71. [Canarias] Una empresa de reparto de comida a domicilio quiere estudiar el tiempo que tardan sus repartidores en entregar los pedidos. Se estudió una muestra de 200 pedidos y se obtuvo el intervalo de confianza $(16'84, 18'16)$ para el tiempo medio, en minutos, que tardan los repartidores en entregar la comida desde el momento en que la recogen en los locales. Sabiendo que la desviación típica es 4 minutos, calcula:
- a) [50%] ¿Cuál fue el tiempo medio obtenido en la muestra? ¿Cuál fue el error de estimación cometido? ¿Cuál fue el nivel de confianza con el que se obtuvo el intervalo?
- b) [50%] Si un día se hicieron 425 repartos, utilizando la estimación puntual obtenida en el apartado anterior para la media, calcula la probabilidad de que el tiempo medio de entrega de los pedidos sea superior a 18 minutos.
72. [Cantabria] Un profesor ha determinado que el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. De una muestra de 100 estudiantes seleccionados al azar, se calcula un tiempo medio de 90 minutos por examen.
- a) Calcule el intervalo de confianza del 93% para el tiempo medio que los estudiantes tardan en completar el examen.
- b) ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que habría que considerar para que el error al estimar el tiempo medio de completar el examen, con un nivel de confianza del 97%, sea de 2 minutos?
73. [Castilla la Mancha] Un centro de procesamiento de datos ha tomado una muestra de su consumo eléctrico en una muestra de 10 meses, obteniendo 26, 33, 25, 24, 32, 28, 38, 29, 22 y 33 MWh . Si el consumo mensual de electricidad sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 5 MWh$
- a) [40%] Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del consume eléctrico con un nivel de confianza del 97'08%
- b) [40%] Calcula el tamaño mínimo necesario de una muestra para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 2 MWh .
- c) [20%] Razona si, con los datos y resultados disponibles, se puede afirmar que el consumo eléctrico mensual es inferior a 25 MWh .
74. [Extremadura] Una compañía energética realiza un estudio de mercado entre sus clientes. El gasto mensual en electricidad de los clientes de esta compañía es una variable que se ajusta a una distribución normal con desviación típica 16 euros. Se examinan las facturas de 81 clientes elegidos al azar, resultando un gasto promedio de 72 euros. Se pide, justificando las respuestas:
- a) [75%] Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90%, para el gasto medio mensual en electricidad de los clientes de esta compañía.
- b) [25%] En base a dicho intervalo, ¿podemos decir que el gasto medio mensual en electricidad de los clientes de esta compañía superó los 70 euros?
75. [Galicia] El tiempo de formación, en horas, que precisa un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta sigue una distribución normal con desviación típica igual a 15 horas.
- a) [50%] Si, en una muestra de 25 empleados, el tiempo medio precisado fue de 97 horas, calcule un intervalo de confianza con un 95% de confianza para la media del tiempo de formación precisado.

- b) [50%] Si la media del tiempo de formación precisado es de 97 horas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio precisado de muestras de 36 trabajadores se encuentre entre 90 y 104 horas?
76. [Madrid] Una comunidad autónoma española quiere evaluar el nivel de compromiso con el reciclaje de sus ciudadanos y ciudadanas. Para ello, se realiza un estudio en dos municipios seleccionados al azar. En el primer municipio, la proporción de personas comprometidas con el reciclaje es de $p = 0'7$. Se toma una muestra aleatoria simple de 600 personas de dicho municipio:
- [40%] Determine el número esperado de personas en la muestra elegida que no estarán comprometidas con prácticas de reciclaje.
 - [60%] Mediante la aproximación por una normal, calcule la probabilidad de que el número de personas comprometidas con el reciclaje esté entre 408 y 432, ambos inclusive.
77. [Madrid] Una comunidad autónoma española quiere evaluar el nivel de compromiso con el reciclaje de sus ciudadanos y ciudadanas. Para ello, se realiza un estudio en dos municipios seleccionados al azar. En el segundo municipio:
- [50%] Se tomó una muestra aleatoria simple de 450 personas de las cuales 351 se declaran comprometidas con prácticas de reciclaje. Obtenga un intervalo de confianza del 90 % para la proporción de personas del segundo municipio comprometidas con prácticas de reciclaje.
 - [50%] Asumiendo que la proporción poblacional de los comprometidos con el reciclaje en este segundo municipio es $p = 0'8$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de personas para garantizar, con un nivel de confianza del 95 %, que el margen de error en la estimación no supere el 3 % ($\pm 3\%$).
78. [Murcia] El saldo en la cuenta bancaria de los estudiantes de segundo de bachillerato de un instituto de Murcia se distribuye según la distribución normal $N(100, 15)$. Calcule:
- [30%] La probabilidad de que un estudiante tenga menos de 80 euros.
 - [40%] La probabilidad de que un estudiante tenga entre 90 y 110 euros.
 - [30%] Si la media fuese desconocida y tuviésemos una muestra de tamaño 36, ¿cuál sería el error máximo admisible para un intervalo de confianza del 95 % para el saldo medio en la cuenta bancaria de estos estudiantes?
79. [País vasco] En un determinado mes el tiempo diario de conexión a Internet del alumnado de una cierta universidad sigue una distribución normal de media 210 minutos y de varianza 144 minutos².
- [40%] Obtén el intervalo característico para el 80 %.
 - [12%] ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día sea superior a 228 minutos?
 - [32%] ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día esté entre 200 y 210 minutos?
 - [16%] Seleccionada una muestra aleatoria simple de tamaño 30, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de conexión a Internet sea inferior a 207 minutos?
80. [País Vasco] Para estimar el coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de cierta universidad, se ha tomado una muestra aleatoria de tamaño 100, a partir de la que se han obtenido los siguientes valores:

$$\bar{x} = 98 \text{ puntos} \quad \sigma = 15 \text{ puntos}$$

Hemos hecho la siguiente afirmación: “El coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de esta universidad está entre 94'5 puntos y 101'5 puntos”. ¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta afirmación?

81. [Castilla y León] Un instituto está preocupado por el impacto que el uso de redes sociales está teniendo en el rendimiento académico de sus estudiantes de bachillerato. Para investigar este tema, se revisan algunos informes publicados sobre el uso de redes sociales durante las horas de estudio. A partir de los informes revisados, se ha determinado que el 70 % de los estudiantes usa redes sociales mientras estudia y que el 30 % no lo hace. Del grupo de estudiantes que usa redes sociales, el 60 % estudia menos de 2 horas diarias, mientras que el 40 % estudia 2 o más horas al día. Del grupo que no usa redes sociales, el 20 % estudia menos de 2 horas y el 80 % estudia 2 o más horas.

Responda a una de las dos siguientes cuestiones:

- a) PREGUNTA A. Se sabe que el tiempo diario de estudio de los estudiantes sigue una distribución normal con una media de 2'5 horas y una desviación estándar de 0'5 horas.
- 1) [50%] ¿Cuál es el tiempo mínimo de estudio diario que alcanza el 90 % de los estudiantes?
 - 2) [50%] Calcular la probabilidad de que un estudiante estudie entre 2 y 4'5 horas al día.
- b) PREGUNTA B. El director del instituto selecciona 5 estudiantes al azar para entrevistarles sobre sus hábitos de estudio.
- 1) [50%] Calcular la probabilidad de que al menos 4 estudiantes usen redes sociales durante el estudio.
 - 2) [50%] Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de los 5 estudiantes seleccionados usen redes sociales mientras estudian.
82. [Castilla la Mancha] Una tienda online de telefonía ha vendido en mayo 360 teléfonos móviles, de los cuales 144 son iPhone, 126 Samsung y el resto Xiaomi. Sin embargo, se devolvieron el 4 % de los iPhone, el 5 % de los Samsung y el 3 % de los Xiaomi.
- a) [30%] Elegida una venta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no se produzca la devolución del teléfono?
 - b) [20%] Si se sabe que un teléfono ha sido devuelto, ¿cuál es la probabilidad de que sea Samsung?
 - c) [50%] Si se sabe que la venta diaria de teléfonos sigue una función de la forma: $V(x) = ax^3 + bx^2 + c$, encuentra los valores de los parámetros a , b y c sabiendo que la venta en el instante inicial es tres, $V(0) = 3$, el primer día se venden 8 móviles y la función tiene como recta tangente en ese punto la ecuación $y = 2x + 6$.

Ejercicios Extra procedentes de Distrito único Andaluz

Análisis matemático

83. [Andalucía] Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} a - \ln(x) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -x^2 + x + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) Determine los valores de a y b para que la función f sea continua y derivable en su dominio.
 - b) Considere los valores de $a = 1$ y de $b = 1$.
 - 1) Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
 - 2) Halle los puntos de corte con los ejes coordenados y represente gráficamente la función.
84. [Andalucía] Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < -6 \\ 2^{-x/2} & \text{si } x \geq -6 \end{cases}$$

- a) Determine los valores de a y b para que la función f sea continua y derivable en su dominio.
- b) Para los valores de $a = 1$ y de $b = 1$.
- 1) Estudie la monotonía, extremos relativos y asíntotas de la función.
 - 2) Represente gráficamente la función.
 - 3) Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función, el eje de abscisa y las rectas $x = -10$ y $x = 10$.

85. [Andalucía] El cultivo de un determinado tipo de bacteria comienza con un recuento de 100 células y media hora después asciende hasta 449 células. Además, se sabe que el número de bacterias en este cultivo para cada instante t viene expresado por la función:

$$f(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$$

donde $t \geq 0$ es el tiempo expresado en minutos y a y k son parámetros reales positivos.

- a) Calcule los valores de a y de k .
- b) Para los valores de $a = 100$ y de $k = 0'05$ obtenidos en el apartado anterior:
- 1) Estudie la monotonía y la curvatura de f .
 - 2) Represente gráficamente f .
 - 3) ¿Cuántos minutos se tardará en llegar a las 4700 células?
86. [Andalucía] Una sustancia química se desintegra según la función $F(t) = a \cdot 2^{(-t/b)}$, $t \geq 0$, donde $F(t)$, medida en gramos, es la cantidad de sustancia presente al cabo de t años.
- a) Determine los valores de a y b sabiendo que inicialmente había 100 gramos de sustancia y que transcurridos 6 años quedan solamente 25 gramos.
- b) Para $a = 100$ y $b = 3$:
- 1) ¿Cuántos años han de transcurrir para que la cantidad de sustancia inicial se reduzca a la mitad?
 - 2) Calcule las asíntotas de la función e interprete el resultado en términos de la cantidad de sustancia.
 - 3) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función y calcule los extremos relativos en caso de que existan.
 - 4) Represente gráficamente la función F .
87. [Andalucía] Se considera la función $f(x) = 1 - e^x$.
- a) Estudie la monotonía de la función.
 - b) Calcule las asíntotas de la función.
 - c) Represente la gráfica de f .
88. [Andalucía] Se considera la función $f(x) = e^{2x-1} - 1$.
- a) Estudie la monotonía de la función.
 - b) Halle la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.
 - c) Represente la gráfica de f .
89. [Andalucía] Se considera la función $f(x) = \ln(x^2 + 1)$
- a) Halle el dominio de f y los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes coordenados.
 - b) Estudie la monotonía y la curvatura de la función f , y calcule sus extremos relativos y puntos de inflexión, caso de que existan.
 - c) Represente la gráfica de f .

90. [Andalucía] Se considera la función $f(x) = x \cdot e^{(1-x^2)}$
- Estudie la monotonía de la función y calcule sus extremos relativos.
 - Represente el recinto limitado por las rectas $x = -1$, $x = 1$, el eje de abscisas y la gráfica de f . Calcule el área del recinto descrito.

Números y Álgebra

91. [Andalucía] Una tienda de informática dispone de tres tipos de tabletas A, B y C cuyo coste por unidad es de 300, 230 y 420 euros respectivamente. El mes pasado vendió 280 tabletas en total, recaudando por todas ellas 83650 euros. Calcule el número de tabletas que vendió de cada tipo sabiendo que la cantidad de tabletas vendidas del tipo C se corresponde con una tercera parte de las vendidas conjuntamente de los tipos A y B.
92. [Andalucía] En una empresa de logística se realizan tres tipos de envíos: paquetes pequeños, medianos y grandes. Durante una semana se procesaron un total de 150 envíos y se generaron ingresos por un total de 2450 euros. Se sabe que el número de envíos de paquetes medianos es la suma de los envíos de paquetes grandes y la mitad de los paquetes pequeños. Los precios por envío son de 10 euros para los paquetes pequeños, 15 euros para los paquetes medianos y 20 euros para los paquetes grandes. ¿Cuántos envíos de cada tipo se realizaron?
93. [Andalucía] Resuelva los siguientes apartados:
- Plantee, sin resolver, un sistema de ecuaciones asociado al siguiente problema: “Lorena invierte 20000 euros en tres productos financieros A, B y C. Sabemos que invierte en C lo mismo que en A y B juntos. Pasado un año, obtiene un beneficio del 4% en el producto A, un 8% en el B y un 10% en el C. Si el beneficio total fue de 1640 euros. ¿Cuánto dinero invirtió en cada producto?”
 - Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvalo si es posible:

$$\begin{cases} 3x + 4y - z = -3 \\ x + 2y + z = 5 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$$

94. [Andalucía] Resuelva los siguientes apartados
- Plantee, sin resolver, un sistema de ecuaciones asociado al siguiente problema: “Un monedero contiene 3 euros en monedas de 10, 20 y 50 céntimos. Hay 15 monedas en total. Sabiendo que el número de monedas de 20 y 50 céntimos juntas excede en 3 unidades al número de monedas de 10 céntimos, obtenga el número de monedas de cada tipo que hay en el monedero”
 - Clasifique el siguiente sistema de ecuaciones y resuélvalo si es posible:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 5y - z = -5 \\ 2x - y + 5z = 10 \end{cases}$$

95. [Andalucía] Los empleados de una empresa se dividen en tres categorías: mozos de almacén, comerciales y administrativos. Se sabe que los mozos de almacén son el triple que los comerciales. Entre comerciales y administrativos hay 25 empleados. Finalmente, si a la suma de mozos y comerciales añadimos 5 tenemos el triple de los administrativos. ¿Cuántos empleados de cada uno de estos tipos hay en esta empresa?

Distribución Binomial

96. [Andalucía] Se quiere estudiar el peso de los huevos de unas gallinas alimentadas con un nuevo pienso. El peso de estos huevos, en gramos, puede modelizarse mediante una variable aleatoria que se distribuye según una ley Normal de media 60 gramos y desviación típica de 5 gramos.
- Determine la probabilidad de que un huevo de este estudio pese más de $62\frac{1}{2}$ gramos.
 - Se elige una muestra aleatoria conteniendo 10 huevos.
 - ¿Qué distribución sigue la variable aleatoria “*número de huevos con un peso superior a $62\frac{1}{2}$ en esta muestra*”?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos 2 huevos con un peso superior a $62\frac{1}{2}$ gramos?
97. [Andalucía] Un jugador de baloncesto tiene una probabilidad de 0'8 de encestar un tiro libre. Si en un partido lanza 6 tiros libres, halle la probabilidad de que enceste:
- Exactamente cuatro tiros libres.
 - Al menos cuatro tiros.
 - Ninguno de ellos.
 - Alguno de ellos.
98. [Andalucía] Una empresa de publicidad en línea está considerando insertar un banner publicitario en una página web popular. La página web recibe en promedio 100 visitantes por día, teniendo cada uno de ellos una probabilidad de 0'05 de hacer clic en el banner. La empresa tiene dos opciones: pagar una tarifa fija de 500 euros por mes por la inserción del banner o pagar 0'10 euros por clic. Si la empresa elige la opción de pagar por clic:
- ¿Cuál es la probabilidad de que en un día 5 visitantes hagan clic en el banner publicitario?
 - Dado que la empresa tiene un presupuesto limitado, ¿cuántos clics debe esperar recibir en promedio por día para que la opción de pagar por clic sea más rentable que la opción de pagar una tarifa fija?
 - Basándose en los resultados anteriores, ¿debería la empresa optar por pagar una tarifa fija o por clic?
99. [Andalucía] Se ha desarrollado una variedad de soja con una tasa de germinación del 90%. Se plantan diez de estas semillas en suelos de igual composición. Calcule la probabilidad de que:
- Germinen 9 semillas
 - Germinen entre 8 y 10 semillas.
 - Germinen como máximo 8 semillas.
100. [Andalucía] Un prestigioso Instituto de Investigación envía invitaciones para una conferencia y se sabe que generalmente asisten un 60% de los invitados. Si se eligen al azar 15 invitados, calcule la probabilidad de que:
- Asistan todos a la conferencia.
 - Ninguno de ellos asista a la conferencia.
 - A lo sumo 1 acuda a la conferencia.
 - Al menos asista 1 invitado.