Determina las asíntotas y estudia sus posiciones relativas respecto de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{3x^3-1}{x^2-2x}$

El codominio de f es $\{0,2\}$ por tanto nuestros candidatos a asíntota vertical son $x=0, x=2.$ Además comprobamos que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^3-1}{x^2-2x}=\frac{-1}{0}=\infty \Rightarrow x=0 \text{ es A. V.}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^3-1}{x^2-2x}=\frac{23}{0}=\infty \Rightarrow x=2 \text{ es A. V.}$$

Estudiemos ahora la posición relativa:

$$x=0\quad\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{3x^3-1}{x^2-2x}=\frac{-1}{0^+}=-\infty\\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{3x^3-1}{x^2-2x}=\frac{-1}{0^-}=+\infty\end{cases}\qquad\qquad x=2\quad\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to 2^-}\frac{3x^3-1}{x^2-2x}=\frac{23}{0^-}=-\infty\\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to 2^+}\frac{3x^3-1}{x^2-2x}=\frac{23}{0^+}=+\infty\end{cases}$$

Veamos ahora si hay asíntotas horizontales u oblicuas:

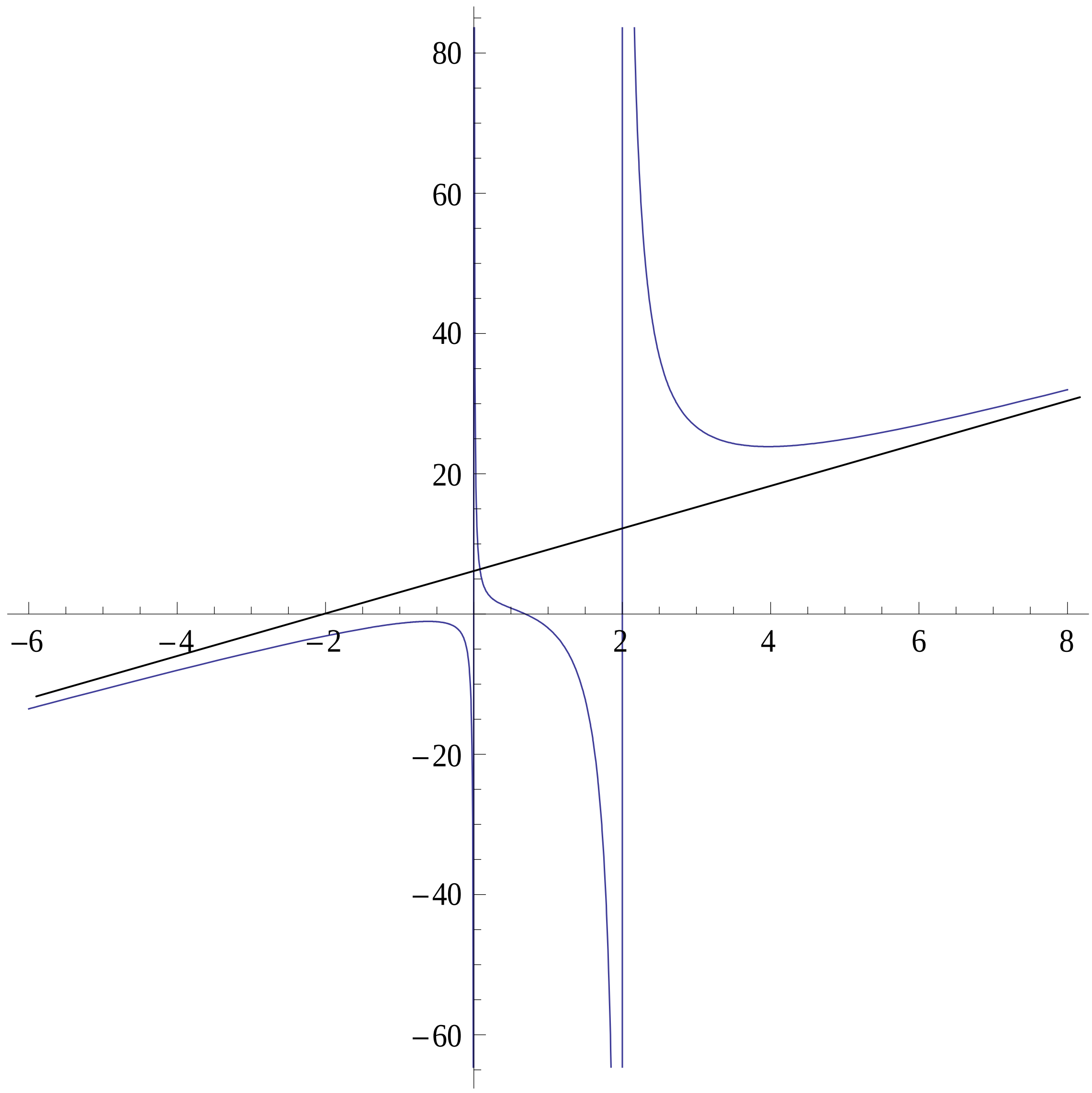
$$\text{Como se cumple que: }\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^3-1}{x^2-2x}=+\infty\\[2ex] \displaystyle m=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{3x^3-1}{x^2-2x}}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^3-1}{x^3-2x^2}=3\\[2ex] \displaystyle n=\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^3-1}{x^2-2x}-3x=\lim_{x\to +\infty}\frac{6x^2-1}{x^2-2x}=6\end{cases}$$

Entonces existe una asíntota oblicua que es $y=3x+6$. Veamos ahora su posición relativa:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{3x^3-1}{x^2-2x}-(3x+6)=\lim_{x\to -\infty}\frac{12x-1}{x^2-2x}=0^- \quad \text{gráfica por debajo de la asíntota}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{3x^3-1}{x^2-2x}-(3x+6)=\lim_{x\to +\infty}\frac{12x-1}{x^2-2x}=0^+ \quad \text{gráfica por encima de la asíntota}$$

Así pues la gráfica queda:



80
60
40
20
−20
−40
−60
−6
−4
−2
2
4
6
8

b) $f(x) = \dfrac{3x^2}{2x+2}$

El codominio de *f* es $\{-1\}$ por tanto nuestro candidato a asíntota vertical $x = 1$. Además comprobamos que:

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2}{2x+2} = \dfrac{3}{0} = \infty \Rightarrow x = -1$ es A. V.

Estudiemos ahora la posición relativa:

$$x = -1 \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{3x^2}{2x+2} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{3x^2}{2x+2} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

Veamos ahora si hay asíntotas horizontales u oblicuas:

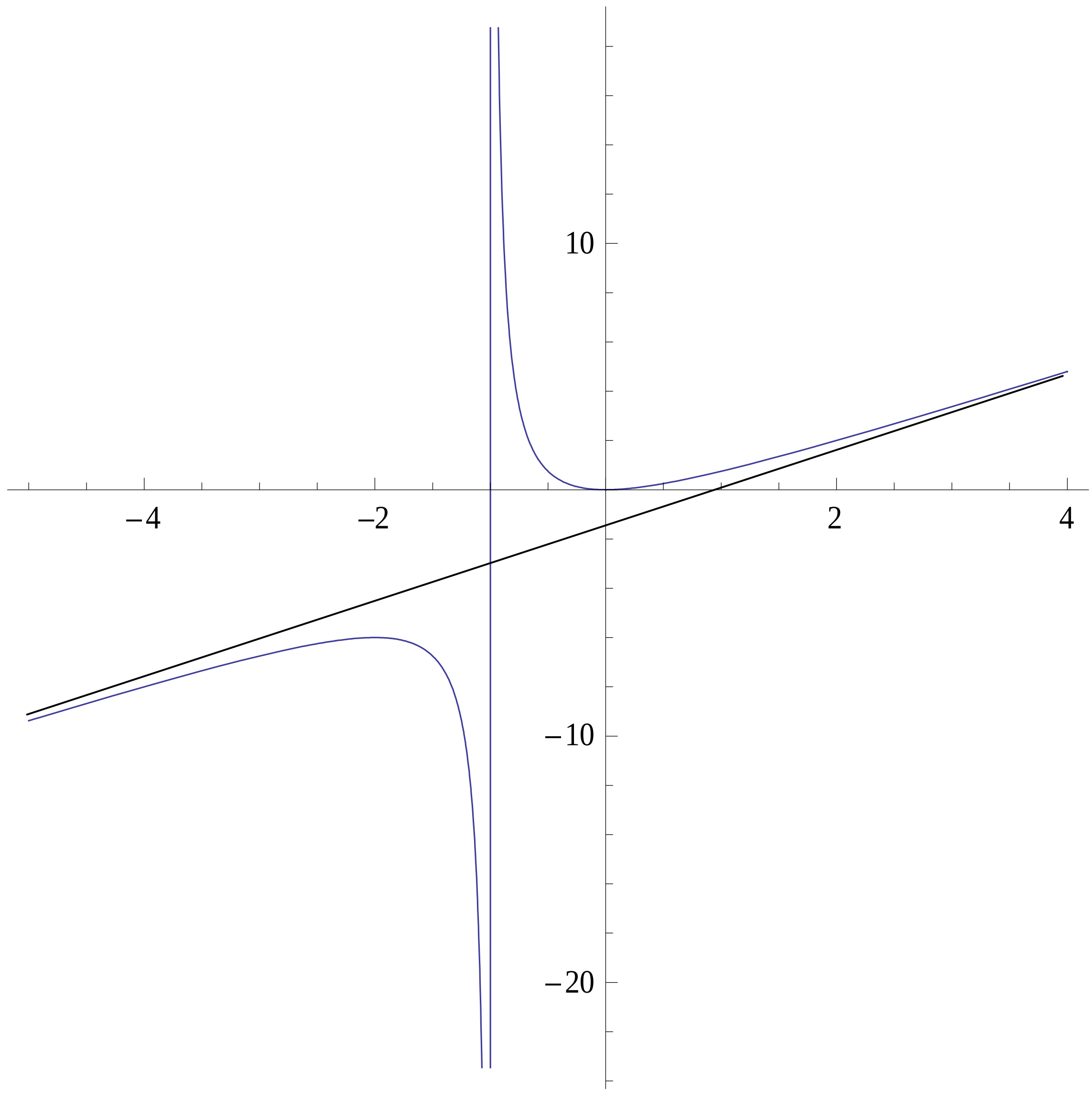
$$\text{Como se cumple que: } \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{2x+2} = +\infty \\ m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{3x^2}{2x+2}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{2x^2+2x} = \dfrac{3}{2} \\ n = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{2x+2} - \dfrac{3x}{2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3x}{2x+2} = \dfrac{-3}{2} \end{cases}$$

Entonces existe una asíntota oblicua que es $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}$. Veamos ahora su posición relativa:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2}{2x+2} - \left(\dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2} \right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{2x+2} = 0^-$ gráfica por debajo de la asíntota

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{2x+2} - \left(\dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2} \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{2x+2} = 0^+$ gráfica por encima de la asíntota

Así pues la gráfica queda:


10
−10
−20
−4
−2
2
4

c) $f(x)=\dfrac{-x^2+1}{x^2-4}$

El codominio de *f* es $\{2,-2\}$ por tanto nuestros candidatos a asíntota vertical son $x=2, x=-2.$ Además comprobamos que:

$$\lim_{x\to 2}\frac{-x^2+1}{x^2-4}=\frac{-3}{0}=\infty \Rightarrow x=2 \text{ es A. V.}$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{-x^2+1}{x^2-4}=\frac{-3}{0}=\infty \Rightarrow x=-2 \text{ es A. V.}$$

Estudiemos ahora la posición relativa:

$$x=-2\quad\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{-x^2+1}{x^2-4}=\dfrac{-3}{0^+}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{-x^2+1}{x^2-4}=\dfrac{-3}{0^-}=+\infty\end{cases}\qquad x=2\quad\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-x^2+1}{x^2-4}=\dfrac{-3}{0^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{-x^2+1}{x^2-4}=\dfrac{-3}{0^+}=-\infty\end{cases}$$

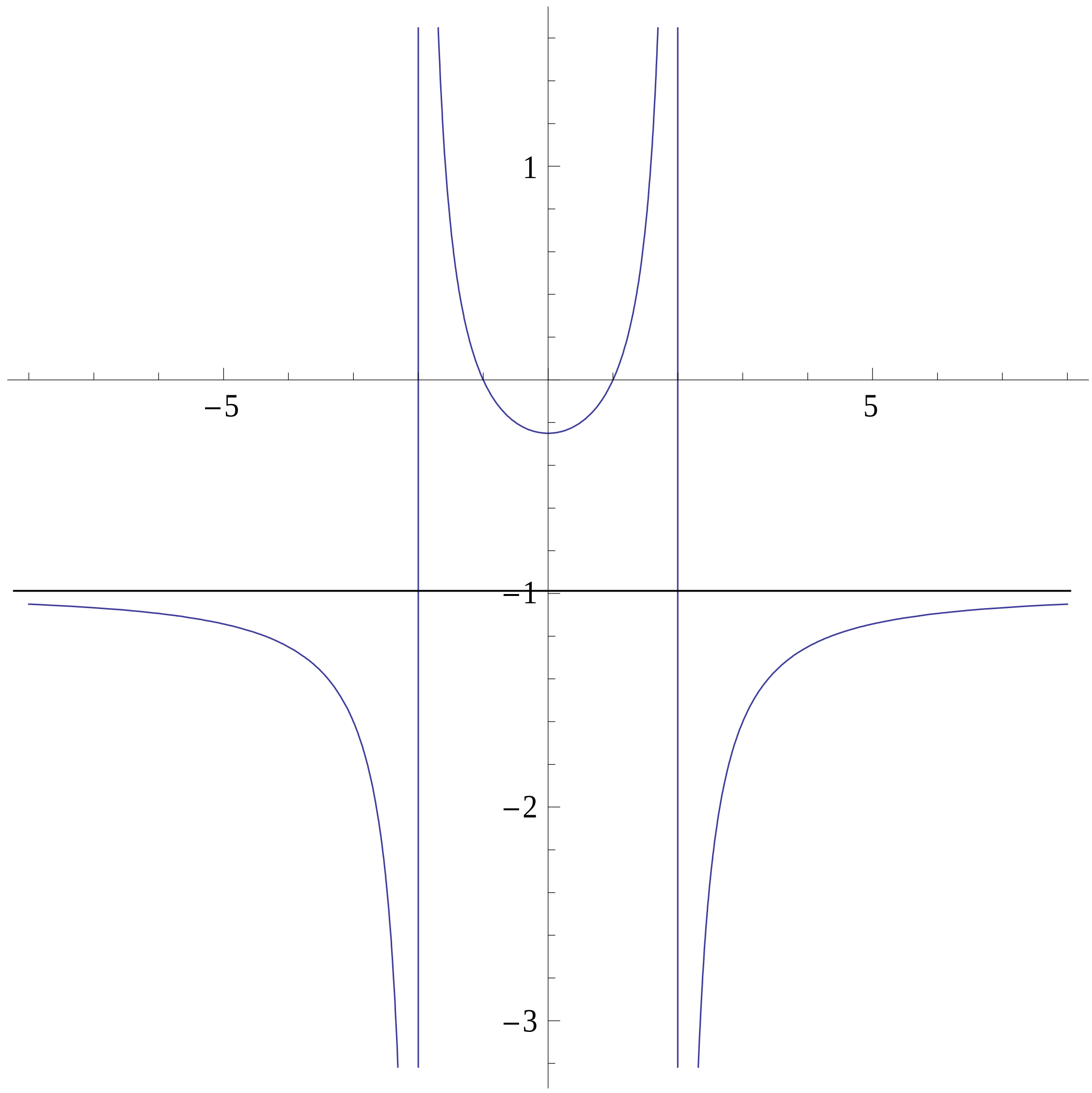
Veamos ahora si hay asíntotas horizontales u oblicuas:

Como se cumple que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2+1}{x^2-4}=-1$. Entonces existe una asíntota horizontal que es $y=-1$. Veamos ahora su posición relativa:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+1}{x^2-4}-(-1)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3}{x^2-4}=0^-$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+1}{x^2-4}-(-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{x^2-4}=0^-$$

Así pues la gráfica queda:


1
−5
5
−1
−2
−3

d) $f(x) = \dfrac{-x+1}{3x+6}$

El codominio de *f* es $\{-2\}$ por tanto nuestro candidato a asíntota vertical son $x = -2$.
Además comprobamos que:

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{-x+1}{3x+6} = \dfrac{3}{0} = \infty \Rightarrow x = -2$ es A. V.

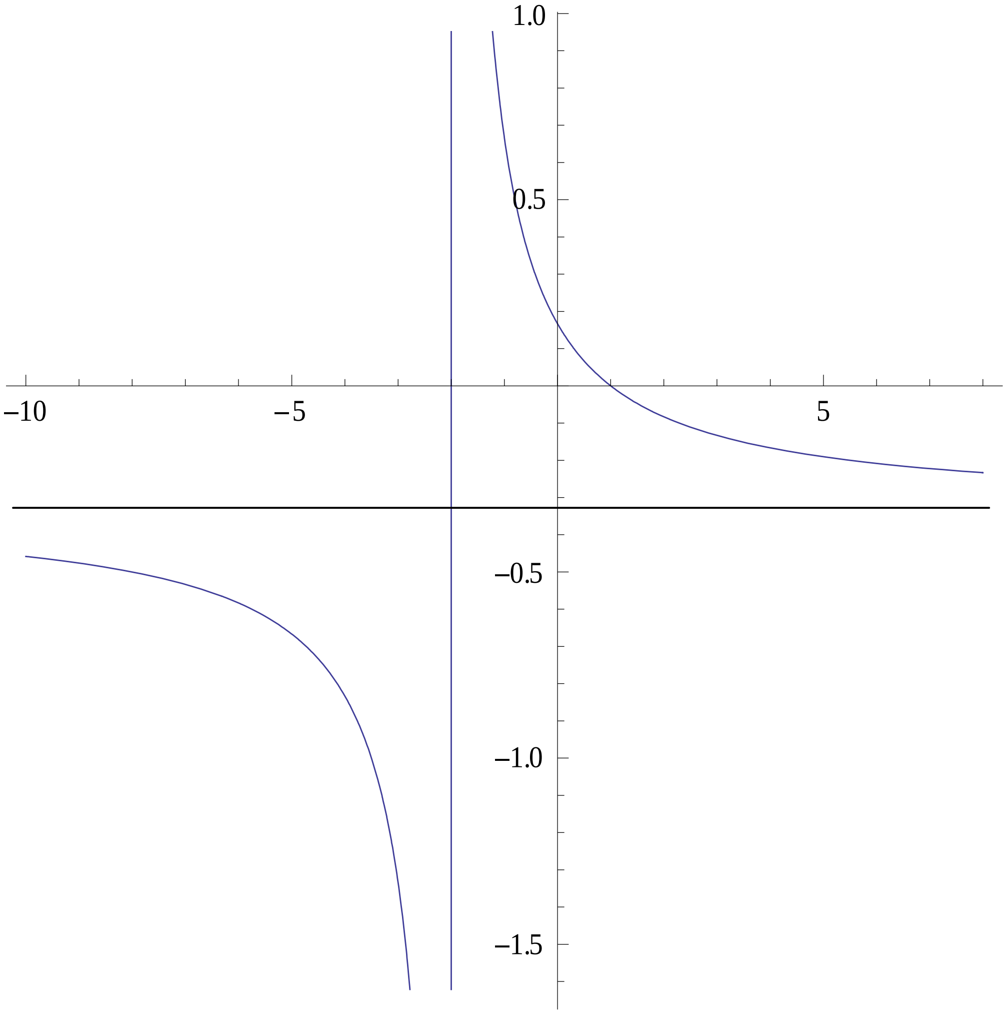
Estudiemos ahora la posición relativa:

$$x = -2 \quad \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{-x+1}{3x+6} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{-x+1}{3x+6} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

Veamos ahora si hay asíntotas horizontales u oblicuas:
Como se cumple que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x+1}{3x+6} = \dfrac{-1}{3}$. Entonces existe una asíntota horizontal que es $y = \dfrac{-1}{3}$. Veamos ahora su posición relativa:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-x+1}{3x+6} - \frac{-1}{3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{3x+6} = 0^-$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x+1}{3x+6} - \frac{-1}{3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{3x+6} = 0^+$$

Así pues la gráfica queda:


1.0
0.5
−10
−5
5
−0.5
−1.0
−1.5