Tema 6: Estadística y Probabilidad

1. **Combinatoria**
   - *Métodos de conteo*
   - *Variaciones*
   - *Permutaciones*
   - *Combinaciones*
2. **Probabilidad**
   - *Experimentos aleatorios. Sucesos*
   - *Probabilidad de un suceso*
   - *Regla de Laplace*
   - *Probabilidad condicionada*
3. **Estadística**
   - *Variables estadísticas. Tablas de frecuencias.*
   - *Medidas de centralización, posición y dispersión.*
   - *Gráficas estadísticas.*

Tema 6: Estadística y Probabilidad

1. **Combinatoria**

   - *Métodos de conteo*
   - *Variaciones*
   - *Permutaciones*
   - *Combinaciones*

Métodos de conteo

Los **métodos de conteo** son estrategias utilizadas para hallar **el número de posibles resultados** de un experimento.

- **Método del producto**
- **Diagramas de árbol**

Ejemplo 1: *Se lanza una moneda 5 veces y se anotan los resultados (cara o cruz) en el orden en que aparecen. ¿Cuántas posibilidades pueden producirse?*

Ejemplo 2: *Un equipo deportivo tiene equipaciones compuestas de tres piezas: camiseta, pantalón y medias. Para cada pieza tienen 3 colores diferentes: blanco, verde y azul. ¿Con cuántas combinaciones diferentes se pueden vestir?*

Ejemplo 3: *Se lanza un dado 3 veces para formar números de tres cifras. ¿Cuántos números diferentes se pueden formar?*

Ejemplo 4: *En un restaurante se ofrecen dos entrantes, cuatro platos principales y tres postres. Si solamente se puede escoger un plato de cada tipo, ¿cuántos menús diferentes se pueden formar?*

Factorial

Dado un número natural n, el **factorial de n**, $n!$, es el producto de n por todos los números naturales menores que él.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$1! = 1$

$2! = 2 \cdot 1 = 2$

$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Binomio Newton - Número combinatorio

Dados dos números naturales n y m, con n $>$ m, se define el binomio de Newton $\binom{n}{m}$ como:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3!} = 20$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = 10$$

$$\binom{11}{4} = \frac{11!}{4! \cdot 7!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{4! \cdot 7!} = 330$$

Ejercicio 1: *Calcula el valor de los siguientes números combinatorios:*

(a) $\binom{7}{3}$ (b) $\binom{3}{1}$ (c) $\binom{5}{4}$

(d) $\binom{10}{0}$ (e) $\binom{8}{5}$ (f) $\binom{6}{4}$

Ejercicio 2: *Calcula*

(a) $\binom{7}{3} + \binom{7}{4}$ (b) $\binom{3}{2} + \binom{5}{3}$

I. Variaciones (sin repetición)

Las **variaciones de n elementos tomados de m en m**, $V_{n,m}$ se utilizan para contar los diferentes grupos de m elementos que se pueden tomar en un conjunto de n elementos $(m < n)$. Los elementos **no se pueden repetir** e **influye el orden** en que los colocamos:

$$V_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Ejemplo: Un equipo se compone de 12 jugadoras. Entre la plantilla hay que escoger una capitana, una delegada de campo y una organizadora. Calcula el número de posibilidades si:

(a) **Una persona no puede tener más de un cargo**

$$V_{12,3} = \frac{12!}{(12-3)!} = \boxed{1320 \text{ posibilidades}}$$

II. Variaciones (con repetición)

Las **variaciones con repetición de n elementos tomados de m en m**, $V_{n,m}$ se utilizan para contar los diferentes grupos de m elementos que se pueden tomar en un conjunto de n elementos ($m < n$). Los elementos **se pueden repetir** e **influye el orden** en que los colocamos:

$$VR_{n,m} = n^m$$

Ejemplo: Un equipo se compone de 12 jugadoras. Entre la plantilla hay que escoger una capitana, una delegada de campo y una organizadora. Calcula el número de posibilidades si:

(b) **Una persona puede tener varios cargos**

$$VR_{12,3} = 12^3 = \boxed{1728 \text{ posibilidades}}$$

Ejercicio 1: *Calcula las siguientes variaciones:*

(a) $V_{4,2}$ (b) $VR_{6,3}$ (c) $V_{20,3}$ (d) $VR_{2,5}$ (e) $VR_{7,3}$

Problema 1: *Con las cifras 1, 2, 3, 4 y 5 queremos formar números de tres cifras. Calcula cuántos números podemos obtener:*
(a) Si podemos repetir cifras.
(b) Si no podemos repetir cifras.

Problema 2: *En una comunidad de 9 vecinos, ¿cuántas combinaciones de presidente y secretario de la comunidad de vecinos hay?*

Permutaciones

Las **permutaciones**, P_n, se utilizan para contar las posibles ordenaciones de un conjunto de n elementos. Los elementos **no se pueden repetir** e **influye el orden** en que los colocamos.

$$P_n = V_{n,n} = n!$$

Ejemplo 1: *Inés, Juan Carlos y Fátima han sido los ganadores de una carrera.*
(a) ¿De cuántas formas posibles han podido llegar a la meta?
(b) Comprueba el resultado obtenido con un diagrama de árbol.

Ejemplo 2: *Un artesano vende pulseras de 8 bolas, con cada bola de un color distinto. Dice que puede hacer más de treinta mil pulseras diferentes. ¿Es cierto?*

Ejercicio 1: *Calcula las siguientes permutaciones:*

(a) P_4 (b) P_5 (c) P_9 (d) P_{10}

Ejercicio 2: *¿De cuántas maneras se pueden ordenar doce candidatos para unas elecciones?*

Problema 1: *Tenemos 3 colores para formar una bandera. ¿Cuántas banderas se pueden formar si tienen que tener como mínimo 2 colores, como máximo 3, no se pueden repetir, y pueden colocarse en horizontal o en vertical?*

Combinaciones

Las **combinaciones de n elementos tomados de m en m**, $C_{n,m}$, se utilizan para contar el número de grupos diferentes que se pueden formar con m elementos distintos elegidos de un grupo de n elementos. **No se pueden repetir** y **influye el orden** en que los colocamos.

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

Ejemplo 1: *En una clase de 25 alumnos, el profesor quiere elegir a 4. ¿Cuántas elecciones diferentes puede hacer?*

Ejemplo 2: *El Euromillón es un juego de azar a nivel europeo que consiste en acertar 5 números de un bloque de 50 y otros 2 de un bloque de 11. ¿Cuántos posibles resultados se pueden dar?*

Ejemplo 1: *En una clase de 25 alumnos, el profesor quiere elegir a 4. ¿Cuántas elecciones diferentes puede hacer?*

Usamos combinaciones *(no influye el orden):*

$$C_{25,4} = \binom{25}{4} = \frac{25!}{4! \cdot (25-4)!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \boxed{12\ 650 \text{ elecciones}}$$

Ejemplo 2: *El Euromillón es un juego de azar a nivel europeo que consiste en acertar 5 números de un bloque de 50 y otros 2 de un bloque de 11. ¿Cuántos posibles resultados se pueden dar?*

Estudiamos por un lado el bloque de 50 y por otro lado el bloque de 11:

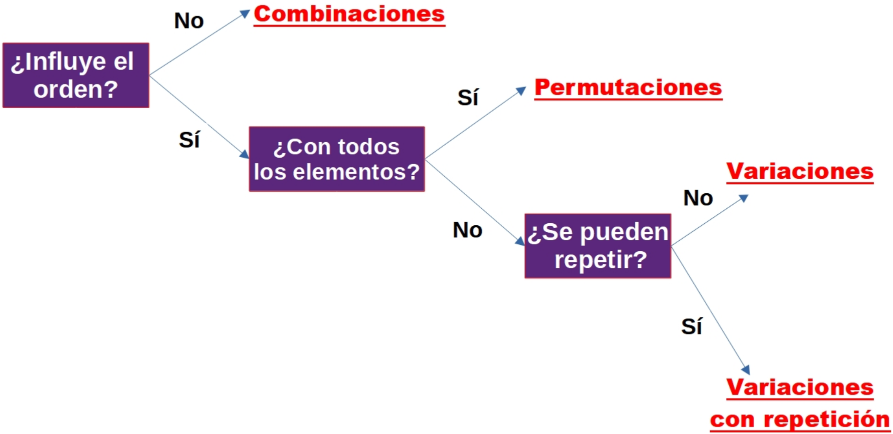
$$C_{50,5} = \binom{50}{5} = \frac{50!}{5! \cdot (50-5)!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \boxed{2\ 118\ 760 \text{ posibilidades}}$$

$$C_{11,2} = \binom{11}{2} = \frac{11!}{2! \cdot (11-2)!} = \frac{11 \cdot 10}{2 \cdot 1} = \boxed{55 \text{ posibilidades}}$$

Multiplicamos y tenemos el total de posibles resultados:

$$2\ 118\ 760 \cdot 55 = \boxed{116\ 531\ 800 \text{ posibles resultados}}$$

Distinguir entre Variaciones, Permutaciones y Combinaciones



Distinguir entre Variaciones, Permutaciones y Combinaciones

Ejemplo: Halla el número de posibilidades que hay:

(a) Al formar equipos de 5 jugadores de entre 20 alumnos.

No importa el orden $\longrightarrow$ Combinaciones

(b) Al hacer una clave de 8 letras distintas con las primeras 8 letras del alfabeto.

Importa el orden. Todos los elementos $\longrightarrow$ Permutaciones

(c) Al hacer una clave de 4 letras distintas con las 27 letras del abecedario.

Importa el orden. Sin todos los elementos. No se puede repetir $\longrightarrow$ Variaciones

(d) Al hacer una clave de 8 letras con las 4 primeras del abecedario.

Importa el orden. Sin todos los elementos. Se puede repetir $\longrightarrow$ Variaciones con repetición

Tema 6: Estadística y Probabilidad

1. **Combinatoria**
    - *Métodos de conteo*
    - *Variaciones*
    - *Permutaciones*
    - *Combinaciones*
2. **Probabilidad**
    - *Experimentos aleatorios. Sucesos*
    - *Probabilidad de un suceso*
    - *Regla de Laplace*
    - *Probabilidad condicionada*

Experimentos aleatorios

Un **experimento aleatorio** es aquel en el que no podemos conocer qué resultado vamos a obtener.

Lanzamiento de un dado

Cuando conocemos el resultado de un experimento antes de realizarlo, se llama **experimento determinista**.

Medir tu propia estatura

Sucesos y Espacio muestral

Un **suceso elemental** es cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Sacar un 5 al lanzar un dado

El conjunto de todos los sucesos elementales se llama **espacio muestral** (E).

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Un **suceso compuesto** es aquel que está formado por dos o más sucesos elementales.

Sacar resultado par al lanzar un dado

Ejemplo: *Extraemos una bola de una urna donde tenemos bolas de 1, 2, 3 y 4 colores. Describe el espacio muestral e indica dos sucesos que no sean elementales.*

El espacio muestral tiene 4 sucesos elementales:

$$\mathrm{E} = \{1 \text{ color}, 2 \text{ colores }, 3 \text{ colores}, 4 \text{ colores}\}$$

Dos sucesos compuestos son, por ejemplo:

$$\mathrm{A} = \text{sacar una bola de al menos 3 colores}$$

$$\mathrm{B} = \text{sacar una bola con un número impar de colores}$$

Ejercicio 1: *Clasifica los siguientes experimentos en deterministas o aleatorios.*

(a) Extraer una carta de la baraja española.

(b) Medir la altura del puente de A Illa.

(c) Coger un partido de fútbol al azar y contar los goles.

(d) Medir el ángulo de un triángulo dibujado al azar.

(e) Elegir un refresco de un estante del super con los ojos tapados.

(f) Abrir un libro aleatoriamente y anotar la página.

(g) Medir la hipotenusa de un triángulo rectángulo conocidos los catetos.

Operaciones con sucesos

- La **unión de dos sucesos**, A y B, es otro suceso, $A \cup B$, formado por todos los sucesos elementales que hay en A o en B.

- La **intersección de dos sucesos**, A y B, es otro suceso, $A \cap B$, formado por todos los sucesos que están a la vez en A y B.

- Si $A \cap B$ no contiene ningún suceso, A y B son sucesos **incompatibles**.

  Si $A \cap B$ contiene algún suceso, los sucesos A y B pueden ocurrir simultáneamente y se dicen **compatibles**.

- El **suceso contrario** o **complementario** de un suceso A, es otro suceso $\overline{A}$, que está formado por los sucesos del espacio muestral que **no están en A**.

Ejemplo: *En el experimento Lanzar un dado y anotar su puntuación, consideramos los siguientes sucesos:*

$A =$ *número par* $\quad B =$ *Múltiplo de 3* $\quad C =$ *Divisor de 5*

(a) Calcula sus uniones e intersecciones

Los sucesos son:

$\mathrm{A} = \{2, 4, 6\} \qquad \mathrm{B} = \{3, 6\} \qquad \mathrm{C} = \{1, 5\}$

Las uniones de sucesos son:

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\} \qquad A \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6\} \qquad B \cup C = \{1, 3, 5, 6\}$$

Las intersecciones de sucesos son:

$$A \cap B = \{6\} \qquad A \cap C = \emptyset \qquad B \cap C = \emptyset$$

Ejemplo: *En el experimento Lanzar un dado y anotar su puntuación, consideramos los siguientes sucesos:*

$A =$ *número par* $\quad B =$ *Múltiplo de 3* $\quad C =$ *Divisor de 5*

(b) ¿Qué parejas de sucesos son compatibles?

$\text{A} = \{2, 4, 6\} \quad \text{B} = \{3, 6\} \quad \text{C} = \{1, 5\}$

Los únicos sucesos compatibles son A y B porque $A \cap B = \{6\}$

El resto de parejas son incompatibles:

$$A \cap C = \emptyset \qquad B \cap C = \emptyset$$

Ejemplo: *En el experimento Lanzar un dado y anotar su puntuación, consideramos los siguientes sucesos:*

$A =$ *número par* $\quad B =$ *Múltiplo de 3* $\quad C =$ *Divisor de 5*

(c) Calcula los sucesos contrarios de A, B y C

$\mathrm{A} = \{2, 4, 6\} \quad \mathrm{B} = \{3, 6\} \quad \mathrm{C} = \{1, 5\}$

Tenemos entonces que:

$\overline{A} = \{1, 3, 5\}$

$\overline{B} = \{1, 2, 4, 5\}$

$\overline{C} = \{2, 3, 4, 6\}$

Ejemplo: *En el experimento Lanzar un dado y anotar su puntuación, consideramos los siguientes sucesos:*

$A =$ *número par* $\quad B =$ *Múltiplo de 3* $\quad C =$ *Divisor de 5*

(d) Calcula $\overline{A \cap B}$ *y* $\overline{A \cap C}$

$\mathrm{A} = \{2, 4, 6\} \qquad \mathrm{B} = \{3, 6\} \qquad \mathrm{C} = \{1, 5\}$

Sabemos, por los anteriores apartados:

$$A \cap B = \{6\} \qquad\qquad A \cap C = \emptyset$$

Calculamos ahora los contrarios:

$$\overline{A \cap B} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad\qquad \overline{A \cap C} = \mathrm{E} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Ejemplo 2: *En el experimento Extraer una carta de la baraja española, se consideran estos sucesos:*

$A =$ *Salir as* $\qquad\qquad$ $B =$ *Salir bastos*

(a) Calcula $A \cup B$ *y* $A \cap B$*. ¿Son compatibles* A *y* B*?*

(b) Calcula $\overline{A}$ *y* $\overline{B}$*. ¿Son compatibles estos dos sucesos?*

Probabilidad

La probabilidad, P, de un suceso de un experimento aleatorio es **un número entre 0 y 1**, que indica la facilidad de que el suceso ocurra.

Si repetimos un experimento aleatorio un número muy grande de veces, **la probabilidad del suceso coincide con la frecuencia relativa con la que ocurre**.

Si lanzas una moneda 100 o 1000 veces, la frecuencia relativa de las caras obtenidas es un valor en torno a 0.5

Esta propiedad se conoce como **ley de los grandes números**.

Un **suceso seguro** es aquel que siempre ocurre y su probabilidad es 1.

Un **suceso imposible** es aquel que nunca sucede y su probabilidad es 0.

Ejemplo 1: En una urna hay tarjetas numeradas del 4 al 9. Se extrae una tarjeta, se anota el resultado y se devuelve a la urna. Estos son los resultados tras realizar el experimento 300 veces:

Número	4	5	6	7	8	9
Frecuencia	50	49	45	47	57	52

Calcula la probabilidad de que, al extraer una tarjeta se obtenga:

(a) Múltiplo de 3 (b) Un número mayor que 7

Ejemplo 2: Halla las probabilidades de estos sucesos al extraer una carta de la baraja española:

(a) Sacar el caballo de copas (b) Sacar el as de oros

(c) Sacar el tres de bastos (d) Sacar un rey o una copa

(e) Sacar un basto (f) Sacar un as

Regla de Laplace

Un experimento es regular cuando todos sus sucesos elementales tienen la misma probabilidad, es decir, son sucesos equiprobables.

La **regla de Laplace** afirma que la probabilidad de un suceso es igual al nº de posibilidades que incluyen el suceso dividido entre el nº de posibilidades totales:

$$P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables a A}}{\text{nº de casos posibles}}$$

Regla de Laplace. Pasos a seguir:

- Hallamos el espacio muestral e identificamos los sucesos de los que queremos conocer la probabilidad.

- Evaluamos si los sucesos elementales son equiprobables. *(en caso negativo, no podemos usar Laplace)*

- Contamos el nº de posibilidades totales y el nº de posibilidades favorables al suceso. *(puede que tengamos que usar combinatoria)*

- Aplicamos la fórmula de Laplace.

Ejemplo 1: *En una bolsa tenemos 50 bolas de colores: 25 blancas, 15 rojas, 5 azules y 5 amarillas.*
(a) Si extraemos una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de sacar cada uno de los colores?
(b) Si extraemos dos bolas al azar, ¿cuál es el espacio muestral?

Ejemplo 2: *Marta tiene en su estuche pinturas de diferentes colores: 4 rojas, 6 amarillas, 9 azules y 2 verdes. Si escoge al azar una de ellas, calcula la probabilidad de que sea:*
(a) Roja
(b) Azul
(c) No amarilla

Ejemplo 3: *En el partido de balonmano de hoy, Amaya ha marcado 7 goles, Jorge 4 y Samara 3. Escogido un gol de forma aleatoria, calcula la probabilidad de que lo marcase:*
(a) Amaya
(b) Cualquiera menos Samara

Propiedades de la probabilidad

- La probabilidad no puede ser menor que 0 ni mayor que 1.
- La probabilidad de un suceso seguro es 1. La probabilidad de un suceso imposible es 0.
- La probabilidad de cualquier suceso es igual a 1 menos la probabilidad de su contrario.

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

- Para **dos sucesos incompatibles, la probabilidad de su unión** es la suma de las probabilidades:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Para dos sucesos, A y B, se verifica que **la probabilidad de la unión es igual a la suma de las probabilidades menos la probabilidad de la intersección**.

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Ejemplo 1: Se extrae una carta de la baraja española. Calcula la probabilidad de que sea:
(a) Una figura o una espada
(b) Un basto o menor que 3

Ejemplo 2: Sean A y B dos sucesos incompatibles de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0{,}2$ y $P(A \cup B) = 0{,}6$. Calcula $P(B)$.

Ejemplo 3: En una bolsa hay 3 canicas blancas, 8 negras, 6 azules y una verde. Calcula la probabilidad de que, cogida una al azar, sea:
(a) Blanca o verde.
(b) Negra o azul.
(c) Ni blanca ni azul.
(d) Ni verde ni negra.

Problema 1: Calcula la probabilidad de no sacar ases ni figuras al extraer una carta de la baraja española.

Problema 2: En un grupo de amigos, al 70 % les gusta el futbol o el baloncesto, y al 12 % les gustan ambos deportes. Sabiendo que al 74 % no les gusta el fútbol, calcula la probabilidad de que, escogido al azar un amigo, le guste sólo el baloncesto.

Problema 3: Se ha trucado un dado de 6 caras, de modo que las caras con números primos tienen doble probabilidad que las de los no primos. ¿Cuál es la probabilidad de cada cara? ¿Cuál es la probabilidad de obtener número par?

Probabilidad condicionada

El cálculo de la probabilidad de un suceso B, cuando sabemos que ha ocurrido otro suceso A, se denomina **probabilidad condicionada**. Se escribe $P(B/A)$ y se lee *probabilidad de B condicionada a A*.

Ejemplo: A una excursión van 10 chicos y 15 chicas. Llevan botas 8 chicos y 10 chicas y escogemos una persona al azar. Halla la probabilidad de que:
(a) Lleve botas y sea chico.
(b) No lleve botas o sea chico.
(c) Sea chica, sabiendo que lleva botas.

Regla del producto

Dos sucesos, A y B, son **independientes** cuando que ocurra uno no influye en que ocurra el otro. En caso contrario, decimos que son **dependientes**.

si son independientes, $P(B/A) = P(B)$ *y* $P(A/B) = P(A)$

Regla del producto

La **regla del producto** es una forma de calcular la probabilidad de la intersección de sucesos:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)}$$

o también

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)}$$

Si A y B son independientes, entonces $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Probabilidades en experimentos compuestos

En los problemas de probabilidad con experimentos compuestos tenemos a menudo que calcular probabilidades condicionadas ($P(B/A)$), probabilidades de uniones ($P(A \cup B)$) o intersecciones ($P(A \cap B)$).

Para ello podemos utilizar diferentes técnicas:

- **Tablas de contingencia:** Muy útiles para calcular probabilidades condicionadas e intersecciones.
- **Diagramas de árbol:** De ayuda en el cálculo de probabilidades de intersecciones.
- **Aplicación de fórmulas:** Es para lo que fueron descubiertas...

Ejemplo 1: En una clase leen el periódico 10 de las 15 chicas y 6 de los 11 chicos. Si elegimos un estudiante al azar, halla la probabilidad de que:
(a) Lea el periódico y sea chico.
(b) No lea el periódico o sea chico.
(c) Sea chica, sabiendo que lee el periódico.
(d) Lea el periódico, sabiendo que es chica.

Ejemplo 2: En una guardería hay 10 niños y 12 niñas. Si 6 niños saben andar y 6 niñas no saben andar, calcula la probabilidad de que, elegido uno de ellos al azar, sea niño y no sepa andar.

Ejemplo 3: En una clase hay 8 chicos y 12 chicas. De ellos, 5 chicos y 8 chicas van a clase en bicicleta, y el resto usa transporte escolar. Eligiendo un estudiante al azar, calcula la probabilidad de que sea chica y vaya en bicicleta.

Ejemplo 4: Se extraen tres cartas de la baraja española. Calcula la probabilidad de que cada una sea de distinto palo.

Problema 1: Se lanza un dado. Si sale 1, se lanza una moneda; si sale otro número, se extrae una carta de la baraja española. Calcula la probabilidad de obtener:

(a) Un 3 y una sota
(b) Una sota
(c) Cara en la moneda
(d) Número par y figura
(e) Número impar y as
(f) Número impar y cruz

Problema 2: En una caja de bombones hay 5 bombones de chocolate blanco y 15 de chocolate negro. Si 2 bombones de chocolate blanco y 10 de chocolate negro tienen relleno de licor, y escogemos un bombón al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

(a) Sea de chocolate negro y esté relleno
(b) No tenga relleno o sea de chocolate blanco
(c) Sea de chocolate blanco, sabiendo que es relleno
(d) Sea relleno, sabiendo que es de chocolate negro

Problema 3: Se lanzan dos monedas. Si salen dos caras, se lanza otra moneda; si no, se lanza un dado. Calcula la probabilidad de que se obtengan:

(a) Tres caras (b) Dos cruces y un 6 (c) Una cara, una cruz, y un 2