Tema 5: Funciones

1. **Coordenadas cartesianas. Localizar y representar puntos**
2. **Tablas y gráficas**
3. **Concepto de función**
4. **Formas de expresar una función. Representación gráfica**
   - Mediante un enunciado
   - Mediante una tabla de valores
   - Mediante una ecuación
   - Mediante una gráfica
5. **Características de una función:**
   - Continuidad
   - Crecimiento y decrecimiento
   - Máximos y mínimos
   - *Puntos de corte*
6. **Funciones lineales y cuadráticas**

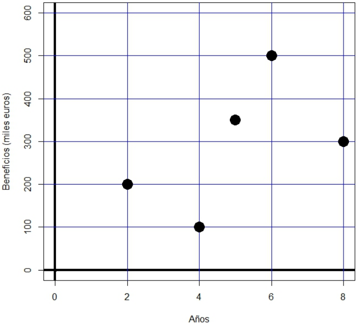
Localizar y representar puntos

Cada punto (x, y) del plano se identifica con un par de números que son sus coordenadas cartesianas.

Ejemplo: Los puntos representados expresan la relación entre los años que lleva en funcionamiento una empresa y sus beneficios.

¿Cuántos años llevaba en activo la empresa cuando logró los máximos beneficios?

¿Qué beneficios logró a los 4 años?



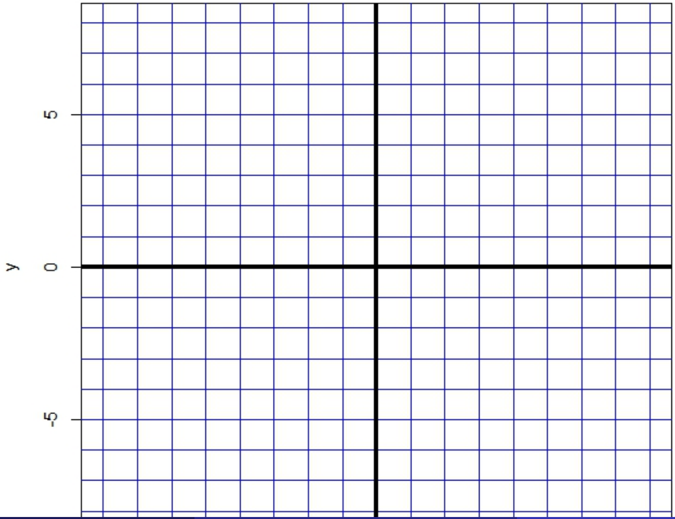
Coordenadas cartesianas

- Las **coordenadas cartesianas** (x, y) nos sirven para situar un punto en un plano de dos dimensiones.
- El eje X (**eje de abscisas**) indica la posición horizontal del punto.
- El eje Y (**eje de ordenadas**) indica la posición vertical del punto.
- El **origen** o punto (0,0) es el punto donde se cruzan los dos ejes.
- Los ejes forman **cuatro cuadrantes**.

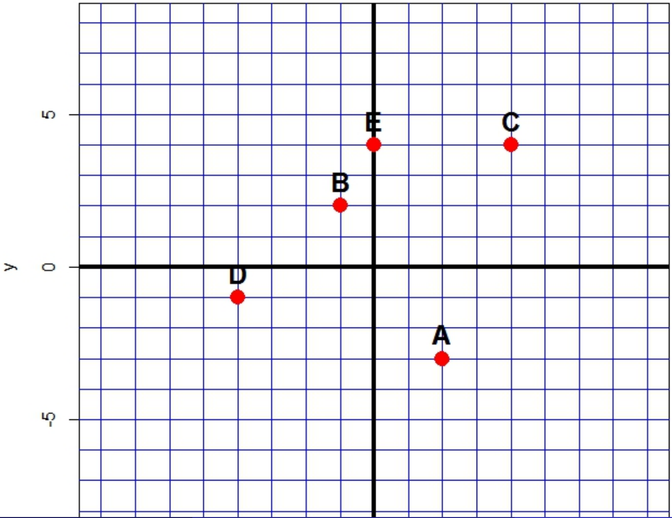

Eje Y
Segundo cuadrante
Primer cuadrante
5
y
0
Eje X
-5
Tercer cuadrante
Cuarto cuadrante

Ejercicio: Representa los siguientes puntos en un sistema de coordenadas:

$A = (2, -3)$ $\quad B = (-1, 2)$ $\quad C = (4, 4)$ $\quad D = (-4, -1)$ $\quad E = (0, 4)$



Ejercicio: Representa los siguientes puntos en un sistema de coordenadas:
$A = (2, -3)$ $B = (-1, 2)$ $C = (4, 4)$ $D = (-4, -1)$ $E = (0, 4)$



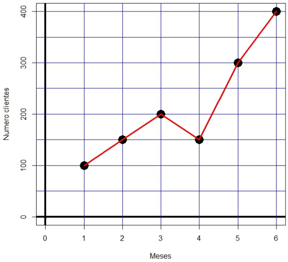
Ejercicio: Representa los siguientes puntos en el plano y determina en qué cuadrante se encuentra cada uno:

$A = (4, -1) \quad B = (3, 4) \quad C = (-3, 2) \quad D = (-2, -3)$
$E = (5, 0)$

Ejercicio 1: La gráfica representa el número de clientes de una heladería en los 6 primeros meses del año.

(a) ¿Cuántos clientes hubo cada mes y cuántos hubo en total?

(b) ¿Cuáles son los meses de máxima y mínima afluencia de público?



Ejercicio 2: Representa en el plano los puntos $A = (-3, 5)$, B $= (4, 6)$, $C = (-1, -4)$, $D = (2, -5)$ y $E = (-5, 4)$

Tema 5: Funciones

1. Coordenadas cartesianas. Localizar y representar puntos
2. Tablas y gráficas
3. **Concepto de función**

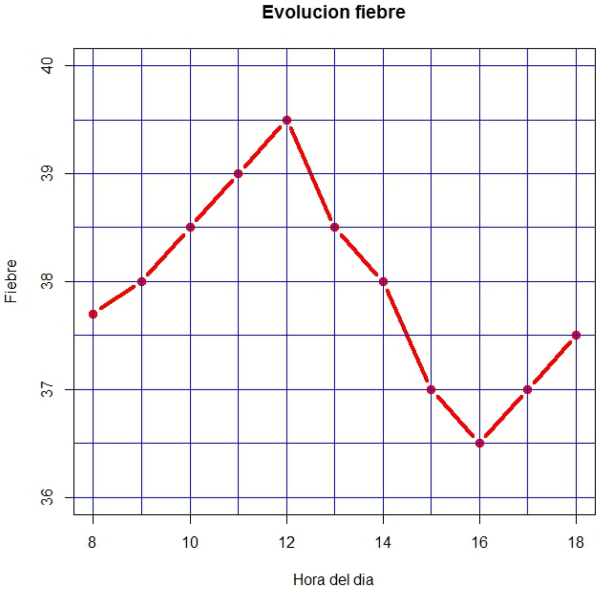
Concepto de función

Una función es una relación entre dos variables x e y, de modo que **a cada valor de x le corresponde un único valor de y**.

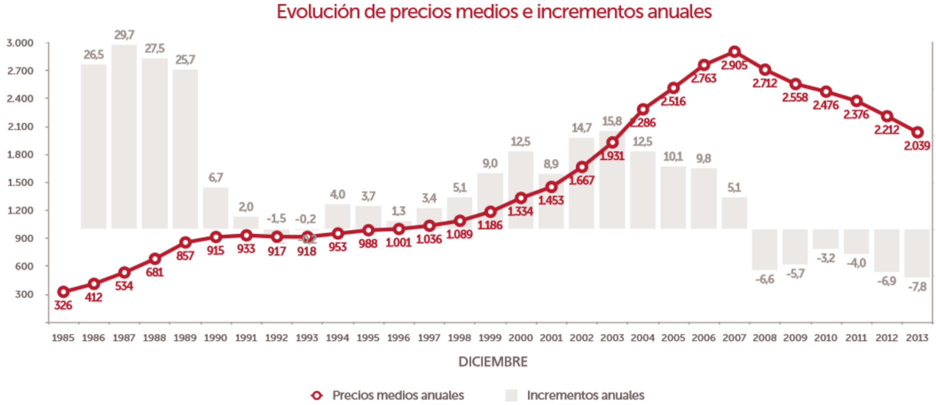
Ejemplos:

- $x =$ Hora del día
  $y =$ Fiebre
- $x =$ Año
  $y =$ Precio medio de la leche
- $x =$ Kg de fresas
  $y =$ Precio que pagamos
- $x = \text{m}^2$ de pared a pintar
  $y =$ litros de pintura necesarios

Evolución de la fiebre de un paciente a lo largo de un día.



Precio medio del m^2 de vivienda en España desde 1985 hasta 2013.



Ejercicio: La siguiente tabla representa la evolución de las temperaturas máximas a lo largo de una semana:

Días	1	2	3	4	5	6	7
Máxima (ºC)	16	10	12	24	20	16	14

(a) ¿Es una función?

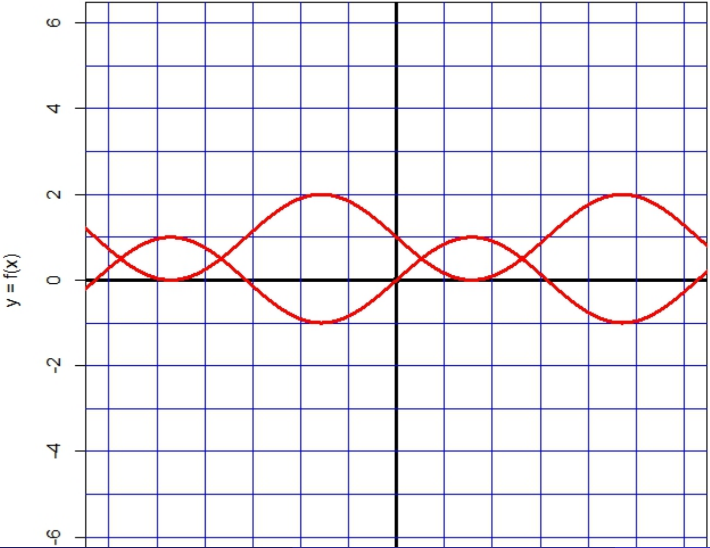
(b) Representa los valores en un eje de coordenadas

Ejercicio: Decide si son funciones o no:

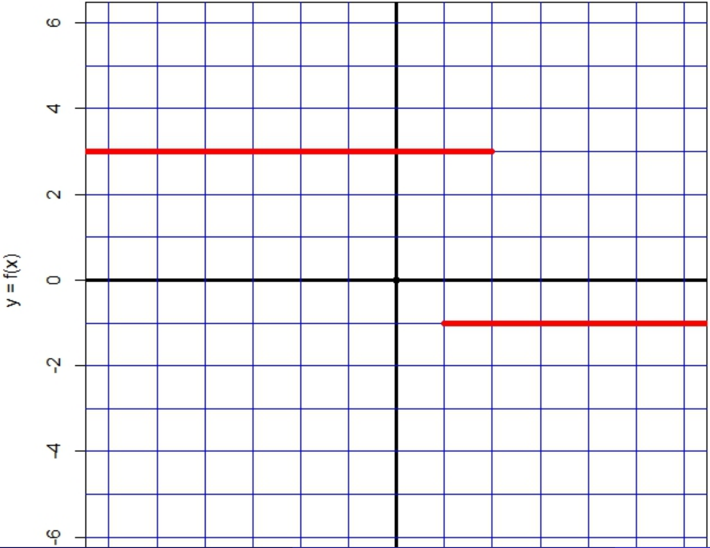
(a) A cada número natural le asociamos su triple menos tres.

(b) A cada número natural le asociamos sus dos raíces cuadradas.

¿Es una función?



¿Es una función?



Tema 5: Funciones

1. **Coordenadas cartesianas. Localizar y representar puntos**
2. **Tablas y gráficas**
3. **Concepto de función**
4. **Formas de expresar una función. Representación gráfica**
    - *1. Mediante un enunciado*
    - *2. Mediante una tabla de valores*
    - *3. Mediante una ecuación*
    - *4. Mediante una gráfica*

Formas de expresar una función.

1. Mediante un enunciado

- *Una persona bebe dos litros de agua al día*

  $x =$ Días

  $y =$ Litros bebidos

- *Juan sale de paseo. En los dos primeros minutos recorre 500 m. En el siguiente minuto recorre 100 m. En los tres minutos siguientes corre 800 m*

  $x =$ Tiempo (minutos)

  $y =$ Distancia (m)

- *En una cafetería el precio de un café es 1'10 euros*

  $x =$ Número de cafés

  $y =$ Precio

- *Un grifo pierde agua. En las tres primeras horas pierde 1 litro de agua. Después el problema se agrava y en dos horas pierde 5 litros*

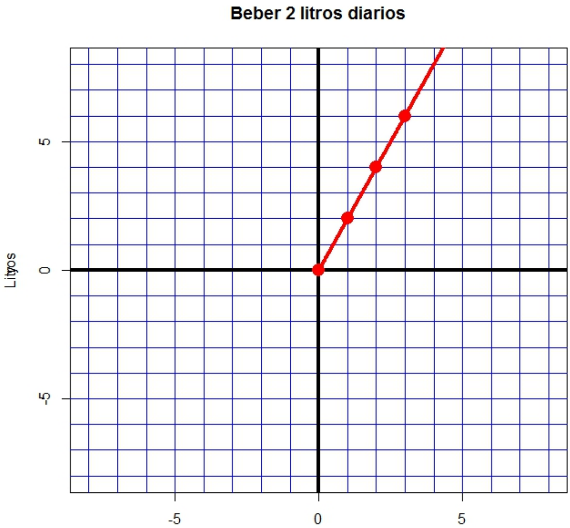
  $x =$ Tiempo (horas)

  $y =$ Litros de agua perdidos

Formas de expresar una función.

1. Mediante un enunciado

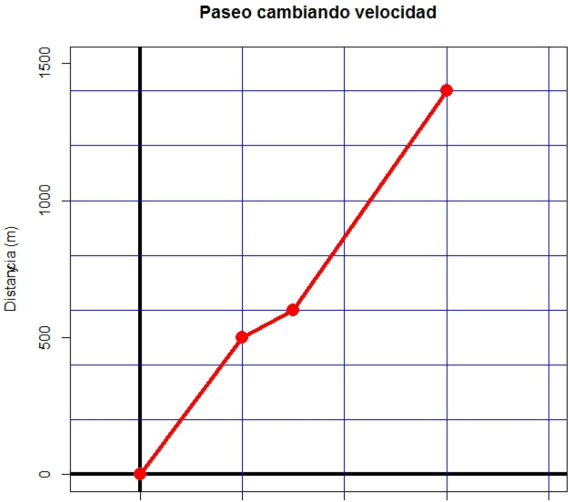
Una persona bebe dos litros de agua al día



Formas de expresar una función.

1. Mediante un enunciado

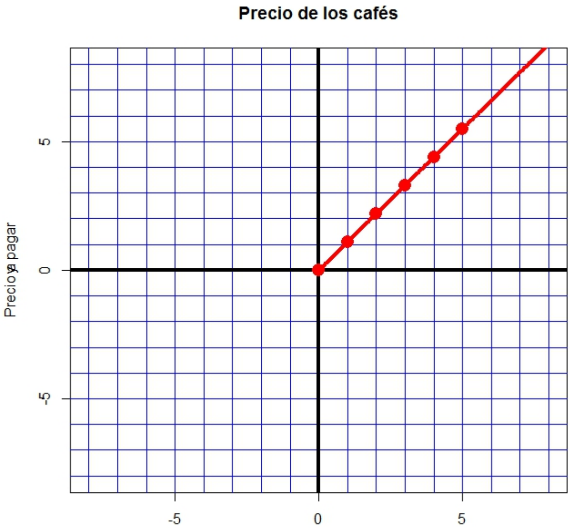
Juan sale de paseo. En los dos primeros minutos recorre 500 m. En el siguiente minuto recorre 100 m. En los tres minutos siguientes corre 800 m



Formas de expresar una función.

1. Mediante un enunciado

En una cafetería el precio de un café es 1'10 euros



Formas de expresar una función.

1. Mediante un enunciado

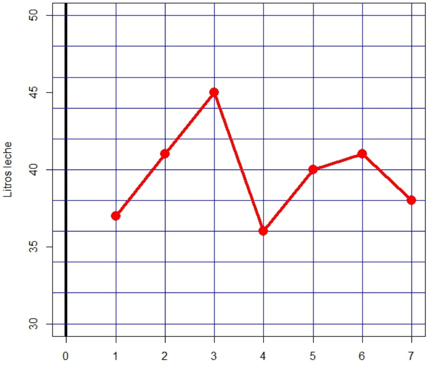
Un grifo pierde agua. En las tres primeras horas pierde 1 litro de agua. Después el problema se agrava y en dos horas pierde 5 litros

Formas de expresar una función.

2. Mediante una tabla de valores

1. Litros de leche recogidos para una vaca en varios días

Días	1	2	3	4	5	6	7
Litros	37	41	45	36	40	41	38

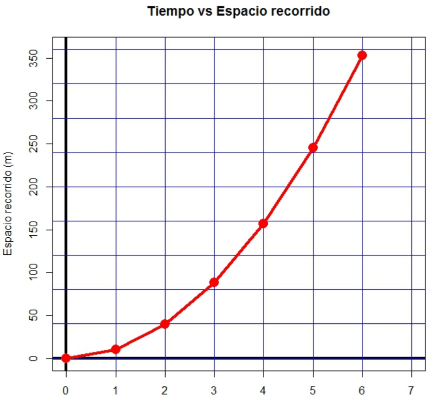


Formas de expresar una función.

2. Mediante una tabla de valores

2. Espacio recorrido por un objeto en caída libre (sin rozamiento)

Tiempo (seg)	0	1	2	3	4	5	6
Espacio (m)	0	9’8	39’2	88’2	156’8	245	352’8

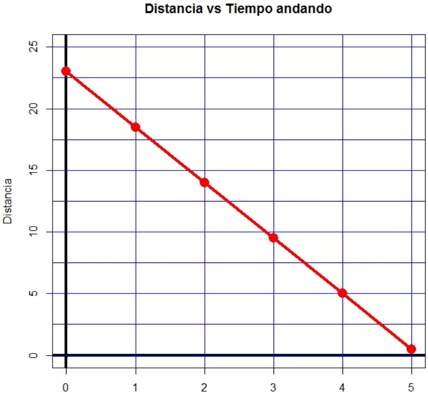


Formas de expresar una función.

2. Mediante una tabla de valores

3. Vamos andando a Santiago (23 km) a una velocidad de 4'5 km/h

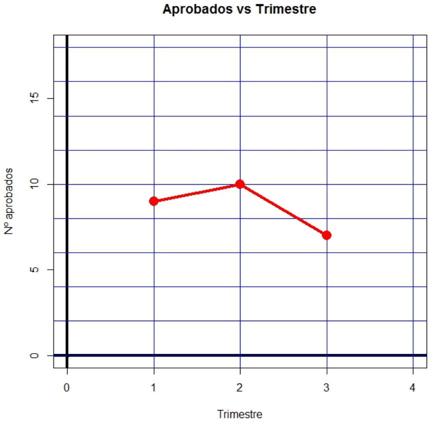
Tiempo (h)	0	1	2	3	4	5
Distancia (km)	23	18'5	14	9'5	5	0'5



Formas de expresar una función.

2. Mediante una tabla de valores

4. Número de aprobados en 2C



Trimestre	1	2	3
Aprobados	9	10	7

Formas de expresar una función.

3. Mediante una ecuación

Ejemplo 1. Un kg de fresas cuesta 5 euros $\longrightarrow$ El precio de las fresas (y) en función de los kg comprados (x) viene dado por la ecuación $\boxed{y = 5x}$

Kg fresas	1	2	3	5	10
Precio (euros)	5	10	15	25	50

Formas de expresar una función.

3. Mediante una ecuación

Ejemplo 2. Alquilar una bicicleta cuesta 4 euros. Este precio incluye la primera hora de alquiler. El tiempo extra cuesta 1'50 euros cada media hora. La ecuación que relaciona el precio a pagar (y) con el tiempo (horas) (x) es $\boxed{y = 4 + 3 \cdot (x - 1)}$

Tiempo (horas)	1	1'5	2	2'5	3	5
Precio (euros)	4	5'50	7	8'50	10	16

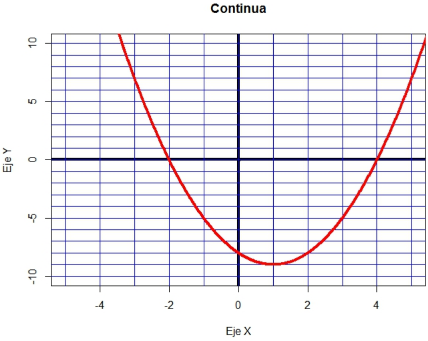
Tema 5: Funciones

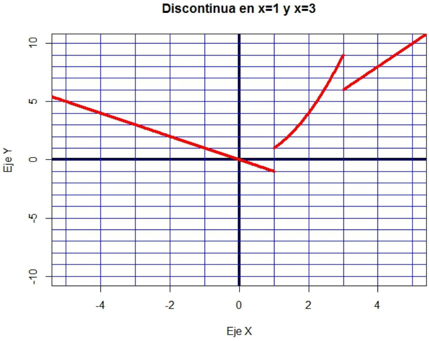
1. **Coordenadas cartesianas. Localizar y representar puntos**
2. **Tablas y gráficas**
3. **Concepto de función**
4. **Formas de expresar una función. Representación gráfica**
    - *1. Mediante un enunciado*
    - *2. Mediante una tabla de valores*
    - *3. Mediante una ecuación*
    - *4. Mediante una gráfica*
5. **Características de una función:**
    - *Continuidad*
    - *Crecimiento y decrecimiento*
    - *Máximos y mínimos*
    - *Puntos de corte*

Características de las funciones

1. Continuidad

Decimos que una función es continua si la gráfica se puede dibujar de un solo trazo.





Características de las funciones

2. Crecimiento y decrecimiento

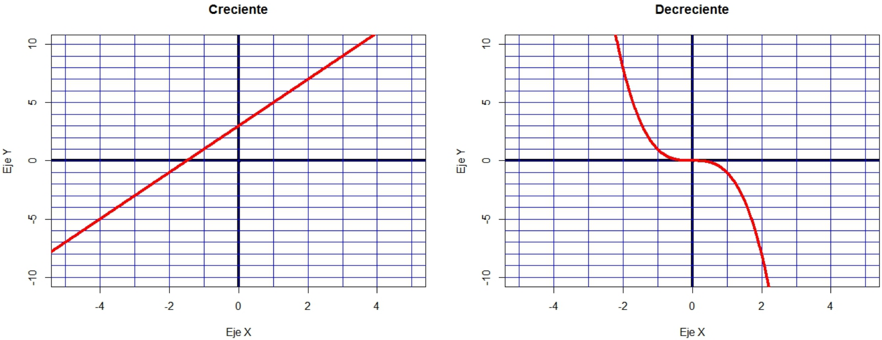
- Una función es **creciente** cuando **al aumentar el valor de** x **también aumenta el valor de** y. Gráficamente presentará una cuesta arriba (*de izquierda a derecha*).

- Una función es **decreciente** cuando **al aumentar el valor de** x **disminuye el valor de** y. Gráficamente presentará una cuesta abajo (*de izquierda a derecha*).

- Cuando una función no es ni creciente ni decreciente mostrará alternativamente **intervalos de crecimiento** e **intervalos de decrecimiento**.

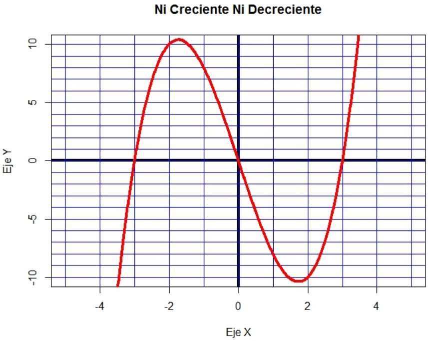
Características de las funciones

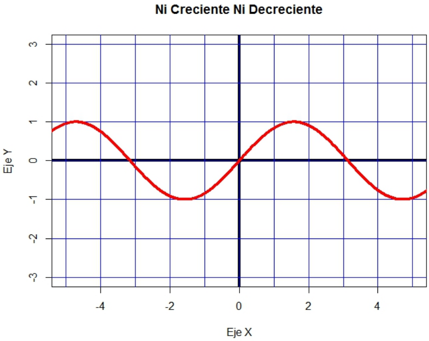
2. Crecimiento y decrecimiento



Características de las funciones

2. Crecimiento y decrecimiento





Características de las funciones

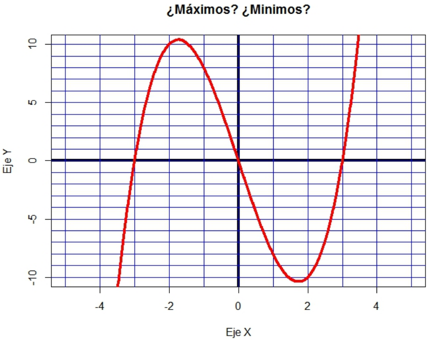
3. Máximos y Mínimos

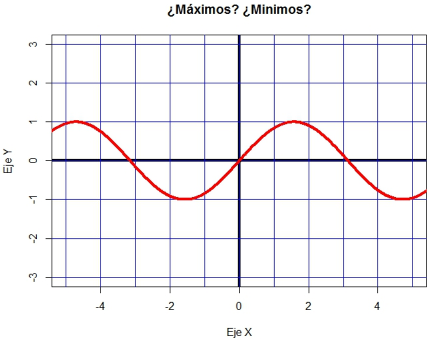
- Cuando una función pasa de ser creciente a decreciente, se dice que en ese punto tiene un **Máximo**.

- Cuando una función pasa de ser decreciente a creciente, se dice que en ese punto tiene un **Mínimo**.

Características de las funciones

3. Máximos y Mínimos





Características de las funciones

4. Puntos de corte

- **Paso 1.** Para hallar el punto de corte de una función con el **eje X** le damos a x el valor 0 y resolvemos la ecuación en y.

  El punto de corte será el $(0, y)$.

- **Paso 2.** Para hallar el punto de corte de una función con el **eje Y** le damos a y el valor 0 y resolvemos la ecuación en x.

  El punto de corte será el $(x, 0)$.

Características de las funciones

4. Puntos de corte

Ejercicio 1: Halla los puntos de corte con los ejes de $y = 4x + 1$

Le damos a x el valor 0:

$$x = 0 \qquad \longrightarrow \qquad y = 4 \cdot 0 + 1 = 1$$

La función corta el eje Y en el punto $(0, 1)$

Le damos a y el valor 0:

$$y = 0 \qquad \longrightarrow \qquad 0 = 4 \cdot x + 1 \qquad \longrightarrow \qquad x = \frac{-1}{4}$$

La función corta el eje Y en el punto $(\frac{-1}{4}, 0)$

Características de las funciones

4. Puntos de corte

Ejercicio 2: Halla los puntos de corte con los ejes de $y = -5x + 10$

Le damos a x el valor 0:

$$x = 0 \qquad \longrightarrow \qquad y = -5 \cdot 0 + 10 = 10$$

La función corta el eje Y en el punto $(0, 10)$

Le damos a y el valor 0:

$$y = 0 \qquad \longrightarrow \qquad 0 = -5 \cdot x + 10 \qquad \longrightarrow \qquad x = \frac{10}{5} = 2$$

La función corta el eje Y en el punto $(2, 0)$

Funciones lineales

Son de la forma:

$\boxed{y = ax + b}$ (*ecuación de una recta*)

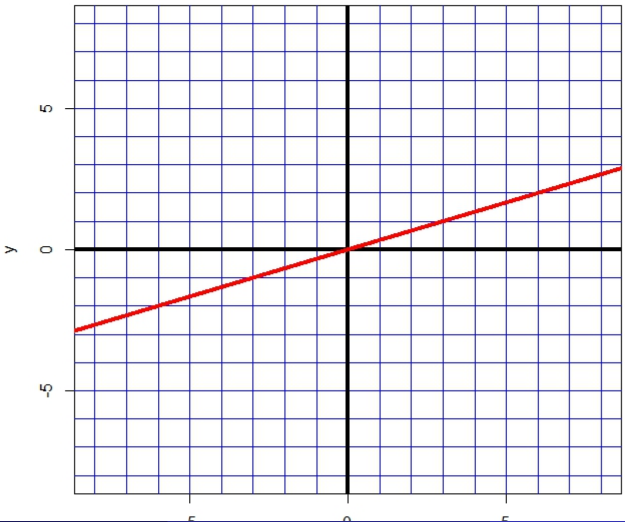
donde

a = **Pendiente de la recta**

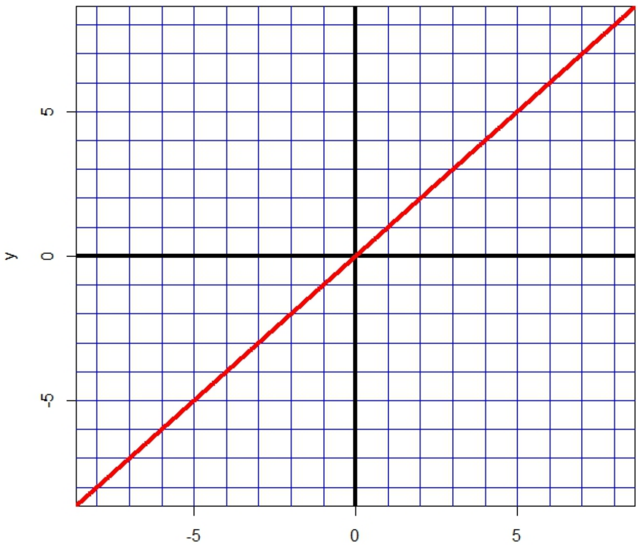
- Si $a > 0 \longrightarrow$ función (recta) creciente
- Si $a < 0 \longrightarrow$ función (recta) decreciente
- Si $a = 0 \longrightarrow y = b$ (función constante)

Cuánto mayor es el valor de a, mayor es la inclinación de la recta.

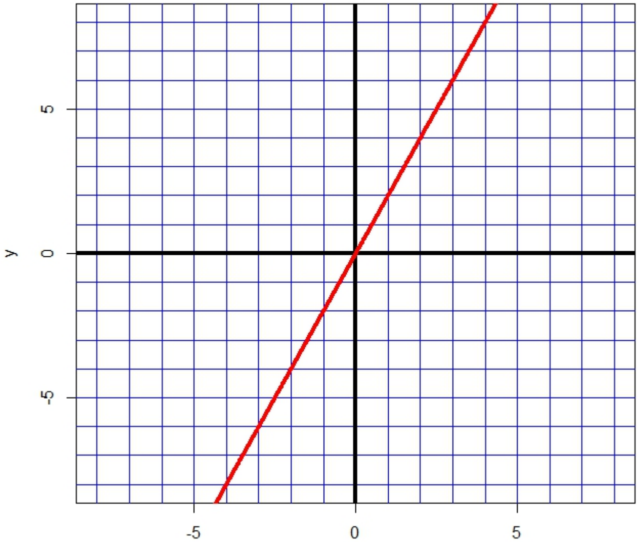
$$\boxed{y = \frac{1}{3}x}$$



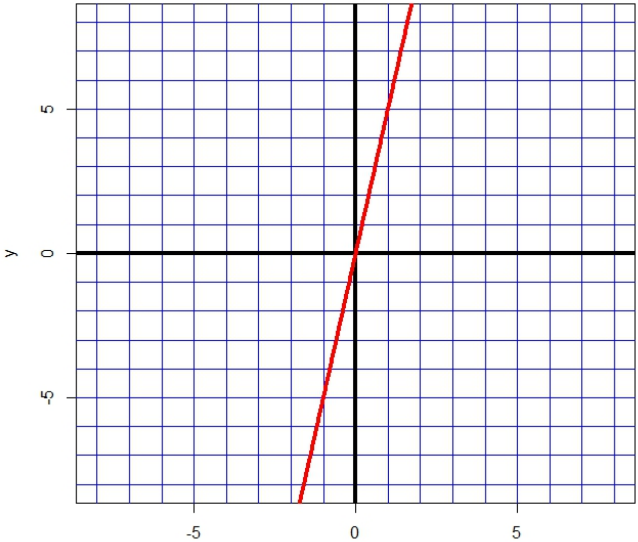
$$\boxed{y = x}$$

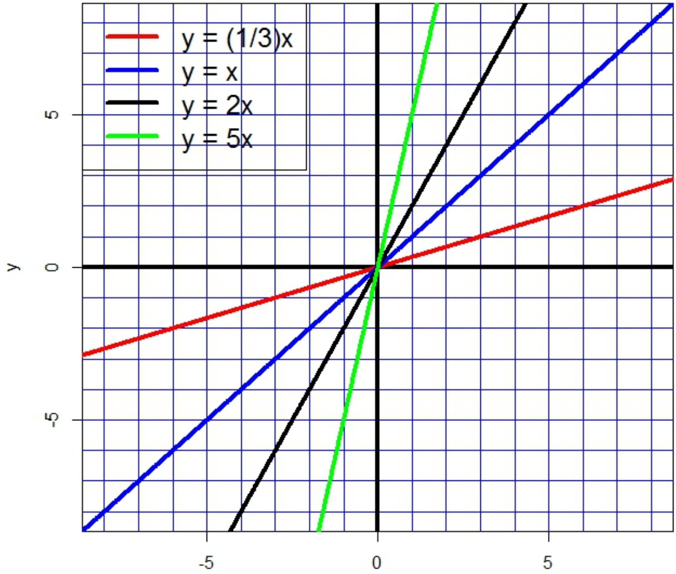


$$\boxed{y = 2x}$$



$$\boxed{y = 5x}$$




y = (1/3)x
y = x
y = 2x
y = 5x
y
5
0
-5
-5
0
5

Funciones lineales

Son de la forma:

$\boxed{y = f(x) = ax + b}$ (*ecuación de una recta*)

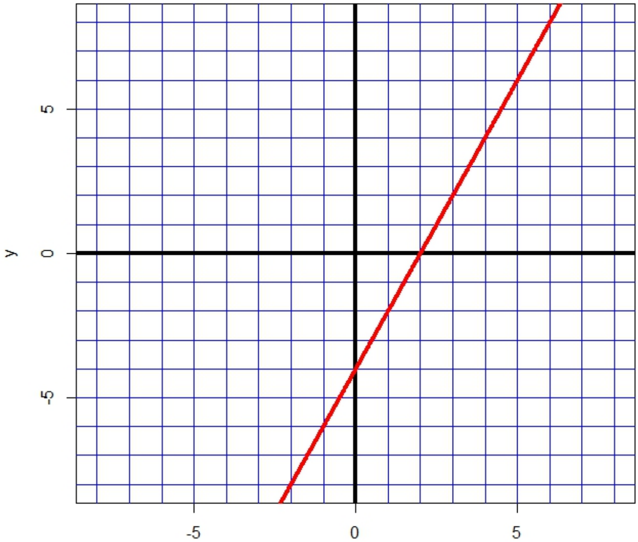
donde

b = **Ordenada en el origen**

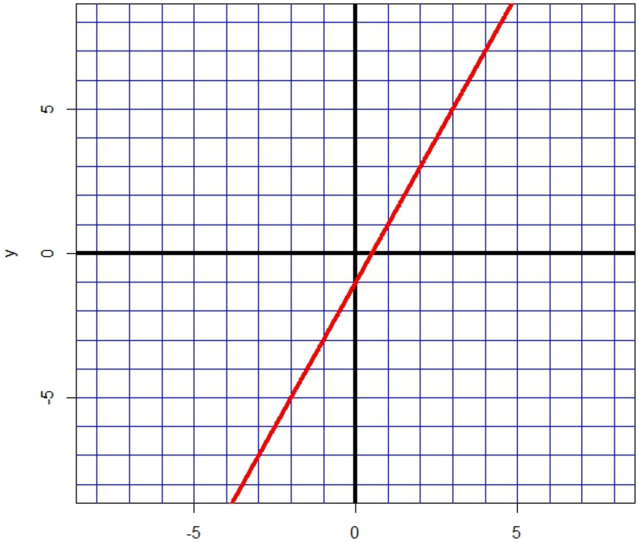
- Si $b = 0 \longrightarrow y = ax$ La función pasa por el origen.

Si cambiamos el valor de b, la función se traslada hacia la izquierda o la derecha.

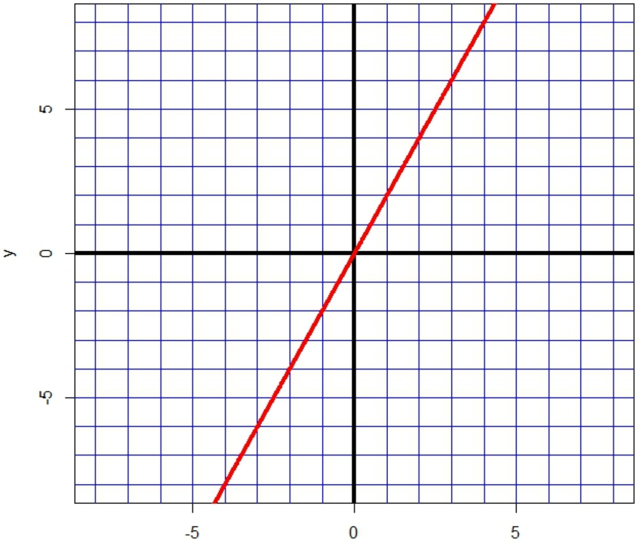
$$\boxed{y = 2x - 4}$$



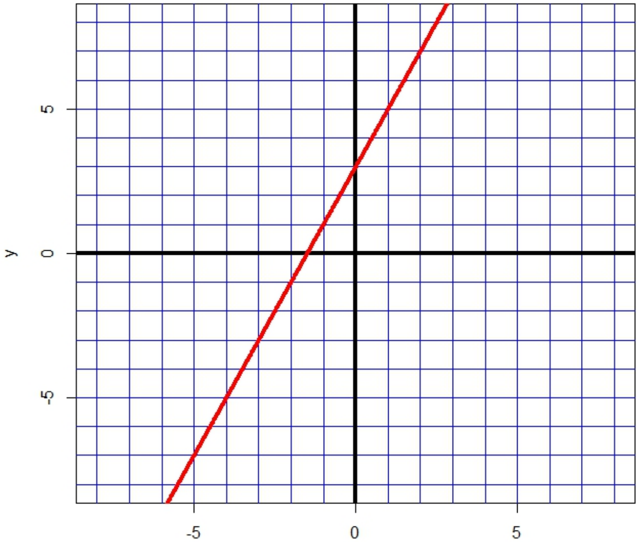
$$\boxed{y = 2x - 1}$$

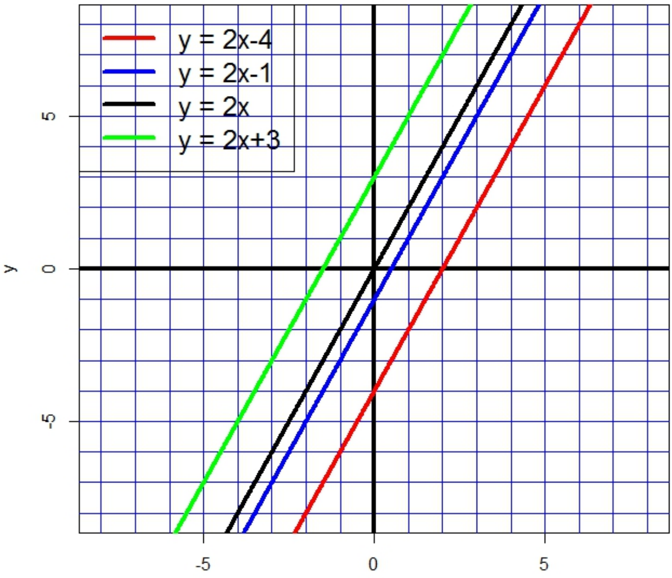


$$\boxed{y = 2x}$$



$$\boxed{y = 2x + 3}$$




y = 2x-4
y = 2x-1
y = 2x
y = 2x+3
5
0
-5
y
-5
0
5

1. **Coordenadas cartesianas. Localizar y representar puntos**
2. **Tablas y gráficas**
3. **Concepto de función**
4. **Formas de expresar una función. Representación gráfica**
   - Mediante un enunciado
   - Mediante una tabla de valores
   - Mediante una ecuación
   - Mediante una gráfica
5. **Características de una función:**
   - Continuidad
   - Crecimiento y decrecimiento
   - Máximos y mínimos
   - *Puntos de corte*
6. **Ecuación Punto-Pendiente. Funciones lineales y cuadráticas.**

Funciones lineales $\boxed{y = ax + b}$

- Se pueden calcular para cualquier valor de x.
  $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- Si $a \neq 0$ pueden tomar cualquier valor:
  $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- **Son continuas en todo el dominio.**
- **Crecimiento y decrecimiento:**
  - Si $a > 0$ la función es creciente.
  - Si $a < 0$ la función es decreciente.
- **No tienen máximos ni mínimos.**

¿Cómo representar gráficamente una función lineal. . . ?

$\boxed{y = 4x - 1}$

1. Construimos una tabla de valores, obteniendo alguno de los puntos por los que pasa la función. (*para una función lineal, basta obtener tres puntos*)

x	0	1	2
y	-1	3	7

2. Representamos los puntos gráficamente.

3. Unimos los puntos y extendemos la recta.

$\boxed{\text{¿Cómo hallar una función lineal...?}}$

$\boxed{1.}$ Si conocemos un punto (a,b) y la pendiente m:

$$y = b + m \cdot (x - a)$$

Ejemplo 1 $\longrightarrow$ *función que pasa por (1,2) y tiene pendiente -2*

$$y = 2 + (-2) \cdot (x - 1) = 2 - 2x + 2$$

$$\boxed{y = -2x + 4}$$

Ejemplo 2 $\longrightarrow$ *función que pasa por (5,-3) y tiene pendiente 3*

$$y = -3 + 3 \cdot (x - 5) = -3 + 3x - 15$$

$$\boxed{y = 3x - 18}$$

2. Si conocemos dos puntos: (a,b) y (c,d)

Hallamos la pendiente como: $\boxed{m = \dfrac{d-b}{c-a}}$ y procedemos como en el paso anterior.

$$y = b + m \cdot (x - a)$$

ejemplo 1 $\longrightarrow$ *función que pasa por (0,2) y (2,4)*

$$m = \frac{4-2}{2-0} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = 2 + 1 \cdot (x - 0) = 2 + x$$

$$\boxed{y = x + 2}$$

ejemplo 2 $\longrightarrow$ *función que pasa por (-1,-1) y (1,3)*

$$m = \frac{3-(-1)}{1-(-1)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y = -1 + 2 \cdot (x - (-1)) = -1 + 2x + 2$$

$$\boxed{y = 2x - 1}$$

Problema 1: *Un móvil, en el instante inicial, se encuentra situado a 3 m del origen, y se aleja progresivamente de éste con una velocidad de 2 m/s. Halla la ecuación de su posición en función del tiempo y represéntala.*

Problema 2: *Un móvil, que en el instante inicial llevaba una velocidad de 8 m/s, frena de repente con una aceleración de -1 m/s^2. Escribe la ecuación de la velocidad en función del tiempo y represéntala.*

Problema 3: *Halla la ecuación de las siguientes rectas:*

(a) Pasa por (-3,-5) y tiene una pendiente de $4/9$

(b) Pasa por (0,-3) y tiene una pendiente de 4

(c) Pasa por (3,-5) y por (-4,7)

Funciones cuadráticas

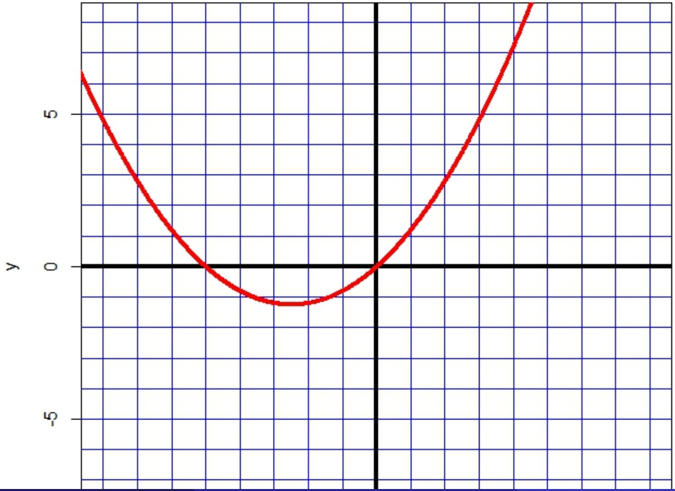
Son de la forma:

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

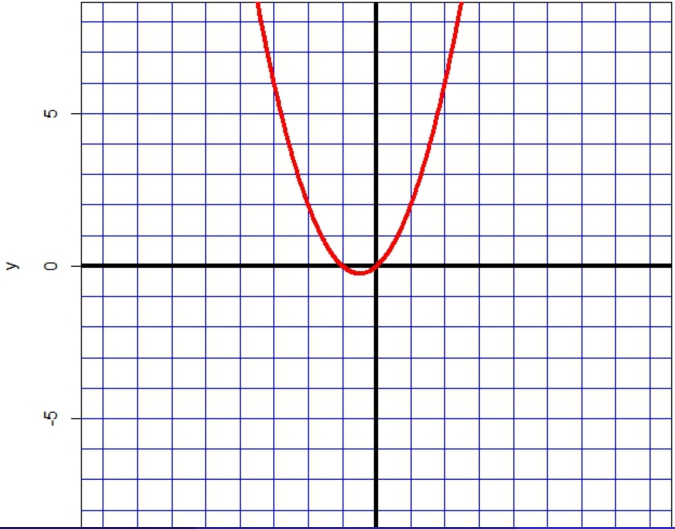
Estudio del coeficiente a

- Si $a > 0$ las ramas de la parábola apuntan hacia arriba.
- Si $a < 0$ las ramas de la parábola apuntan hacia abajo.
- Cuanto menor es el valor de a, más abierta es la parábola.
- Cuanto menor es el valor de a, más cerrada (más estilizada) es la parábola.

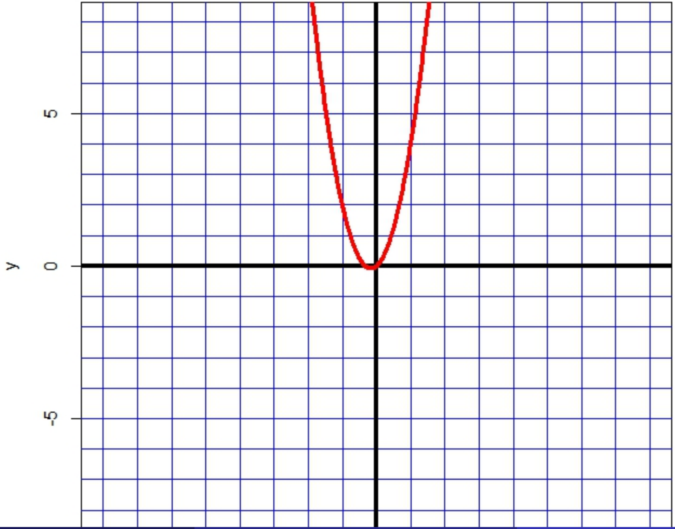
$$\boxed{y = \frac{1}{5}x^2 + x}$$



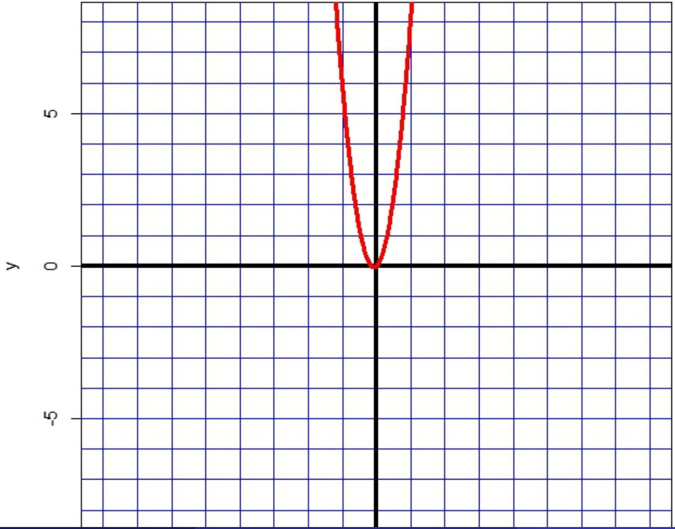
$$\boxed{y = x^2 + x}$$

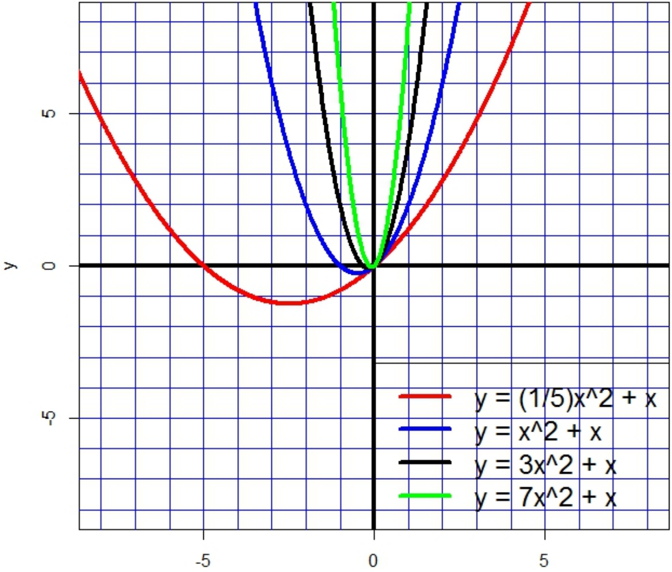


$$\boxed{y = 3x^2 + x}$$



$$\boxed{y = 7x^2 + x}$$




y = (1/5)x^2 + x
y = x^2 + x
y = 3x^2 + x
y = 7x^2 + x
y
5
0
-5
-5
0
5

Funciones cuadráticas

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

- Se pueden calcular para cualquier valor de x (*ya que son funciones polinómicas*).
  $Dom(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
- La imagen o recorrido $Im(f)$ depende de la función que estudiemos.
- Son continuas en todo el dominio.
- Crecimiento y decrecimiento:
  - Si $a > 0$ son **decrecientes** hasta el vértice y **crecientes** a partir de ahí.
  - Si $a < 0$ son **crecientes** hasta el vértice y **decrecientes** a partir de ahí.
- Máximos y mínimos:
  - Si $a > 0$ tienen un mínimo global (vértice).
  - Si $a < 0$ tienen un máximo global (vértice).

Representación gráfica de funciones cuadráticas

$y = -2x^2 + x + 3$

1. Se calcula el vértice

$$x = \frac{-b}{2a} \longrightarrow \qquad x = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4} = 0'25$$

$$y = f\left(\frac{1}{4}\right) = \quad -2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} + 3 = \frac{25}{8} = 3'125$$

$$\boxed{\textbf{Vértice} = (0'25, 3'125)}$$

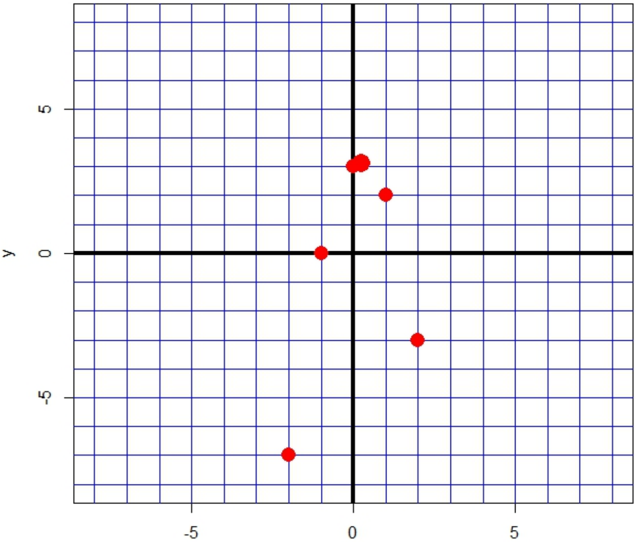
2. Mediante una tabla de valores, se obtienen los valores de la función en torno al vértice ($x = 0'25$)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-7	0	3	2	-3	-12

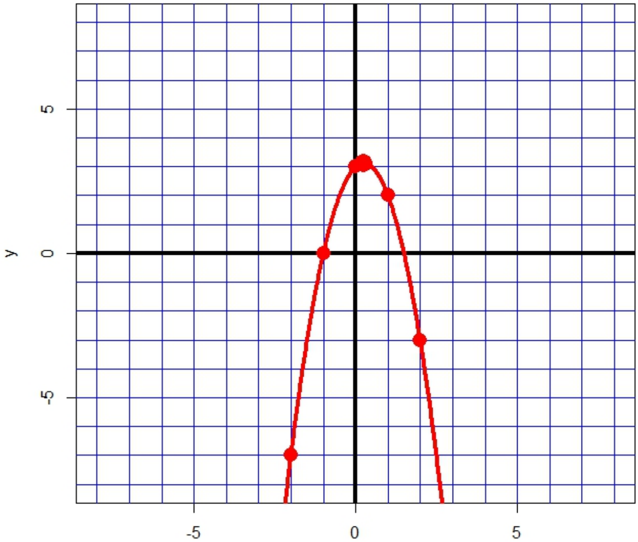
3. Se representan los puntos obtenidos (vértice incluido)

4. Se unen los puntos mediante una parábola, extendiendo las ramas

$$y = -2x^2 + x + 3$$



$$y = -2x^2 + x + 3$$



Representación gráfica de funciones cuadráticas

$$\boxed{y = 5x^2 - 4}$$

1. Se calcula el vértice

$$x = \frac{-b}{2a} \longrightarrow \qquad x = \frac{0}{10} = 0$$

$$y = f(0) = \quad 5 \cdot 0 - 4 = -4$$

$$\boxed{\textbf{Vértice} = (0, -4)}$$

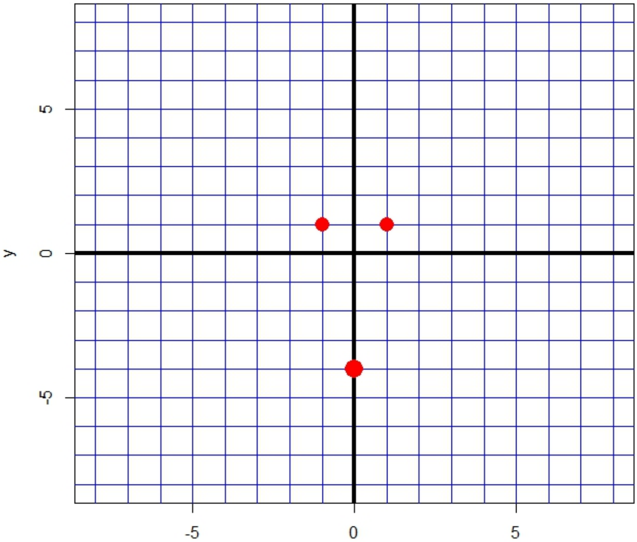
2. Mediante una tabla de valores, se obtienen los valores de la función en torno al vértice ($x = 0'25$)

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	41	16	1	1	16	41

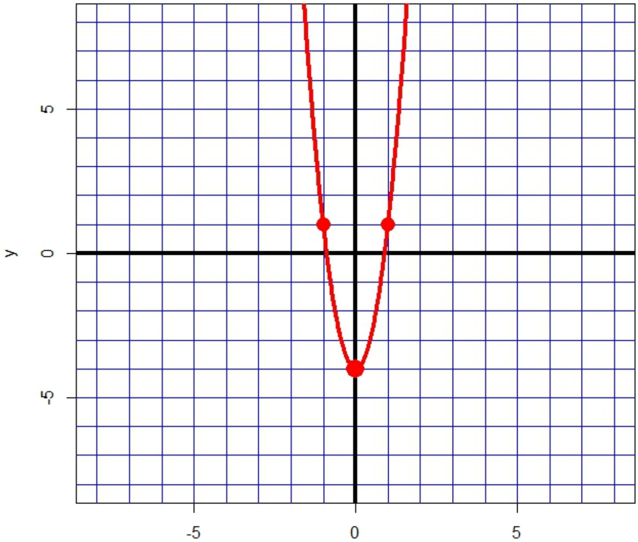
3. Se representan los puntos obtenidos (vértice incluido)

4. Se unen los puntos mediante una parábola, extendiendo las ramas

$$\boxed{y = 5x^2 - 4}$$



$$y = 5x^2 - 4$$



Representación gráfica de funciones cuadráticas

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$$

1. Se calcula el vértice

$$x = \frac{-b}{2a} \longrightarrow \qquad x = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$y = f(3) = \qquad -\frac{1}{2} \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 - 2 = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

$$\boxed{\textbf{Vértice} = (3, 2{,}5)}$$

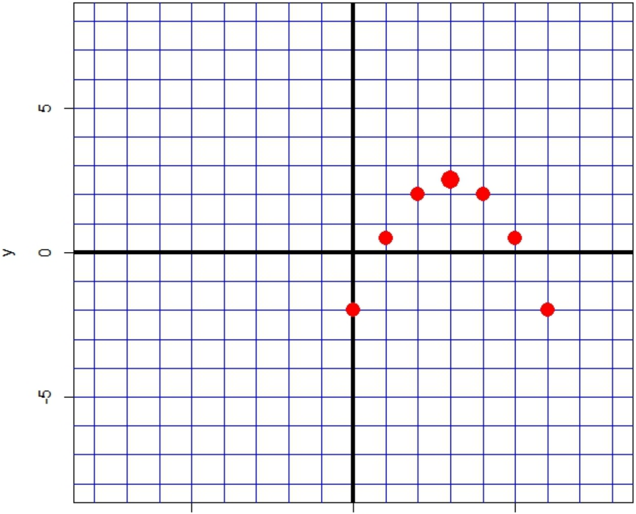
2. Mediante una tabla de valores, se obtienen los valores de la función en torno al vértice ($x = 0'25$)

x	0	1	2	4	5	6
y	-2	$\frac{1}{2}$	2	2	$\frac{1}{2}$	-2

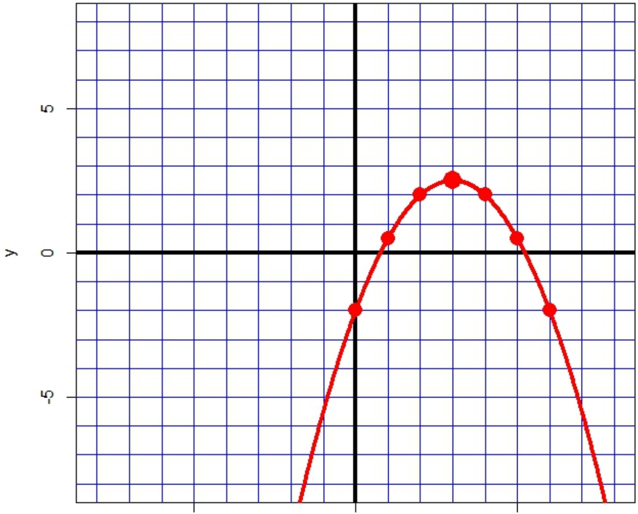
3. Se representan los puntos obtenidos (vértice incluido)

4. Se unen los puntos mediante una parábola, extendiendo las ramas

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2}$$



$$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$$



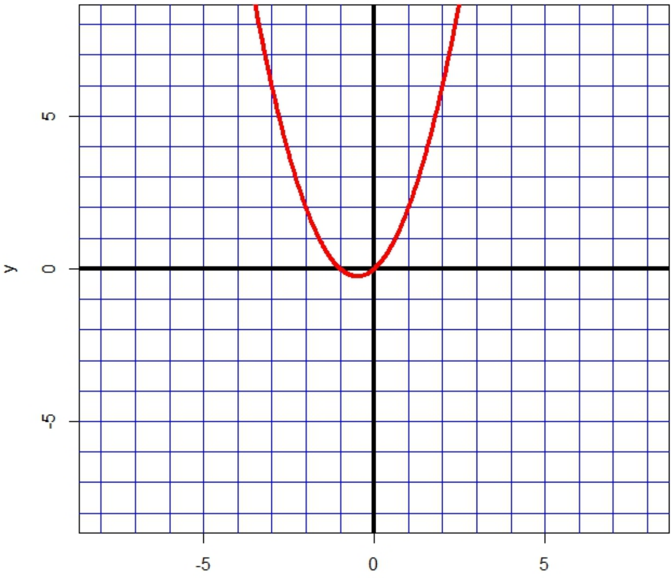
Funciones cuadráticas

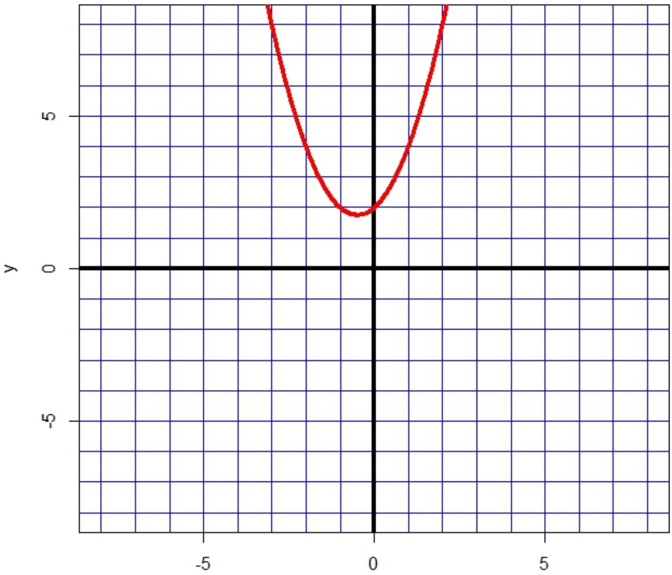
Son de la forma:

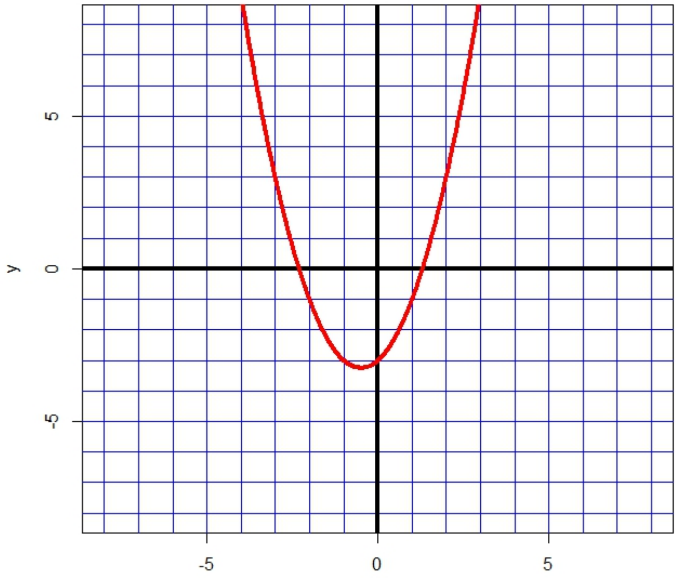
$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

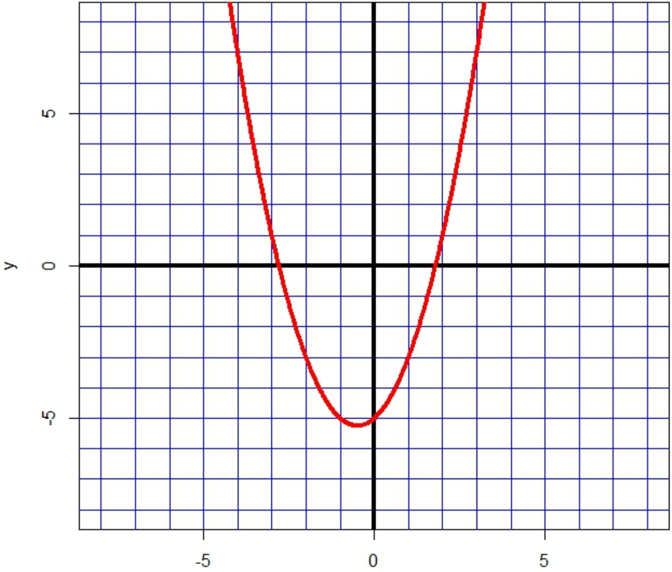
Estudio del coeficiente c

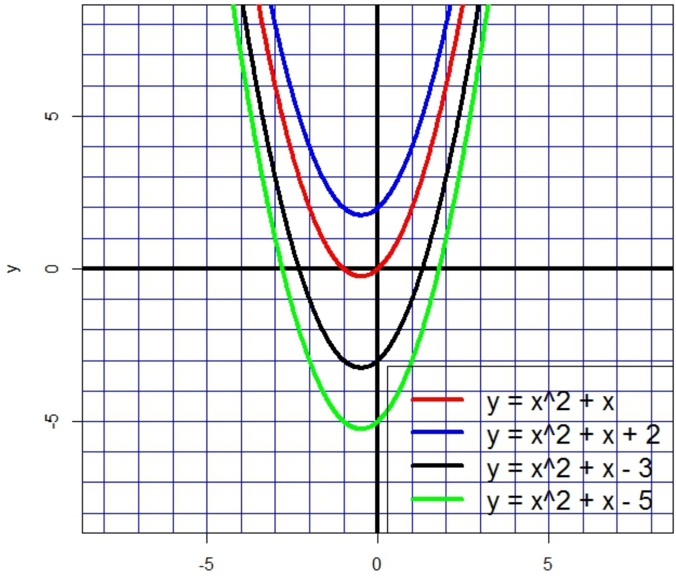
- El valor de c traslada la parábola hacia arriba o hacia abajo.


y
5
0
-5
-5
0
5


y
5
0
-5
-5
0
5


5
0
-5
y
-5
0
5


y
5
0
-5
-5
0
5


y = x^2 + x
y = x^2 + x + 2
y = x^2 + x - 3
y = x^2 + x - 5
y
5
0
-5
-5
0
5

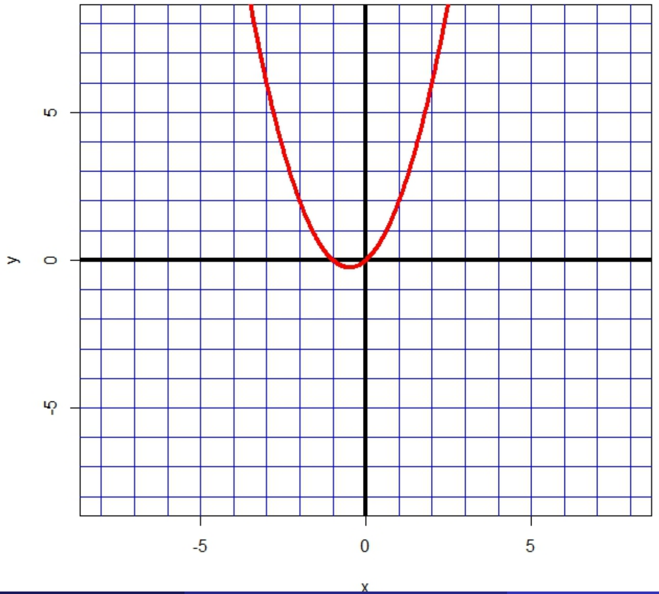
Funciones cuadráticas

Son de la forma:

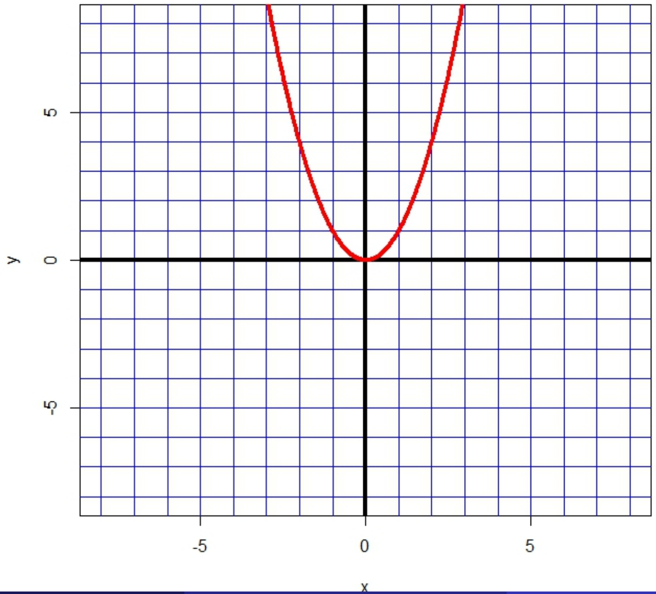
$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

Estudio del coeficiente b

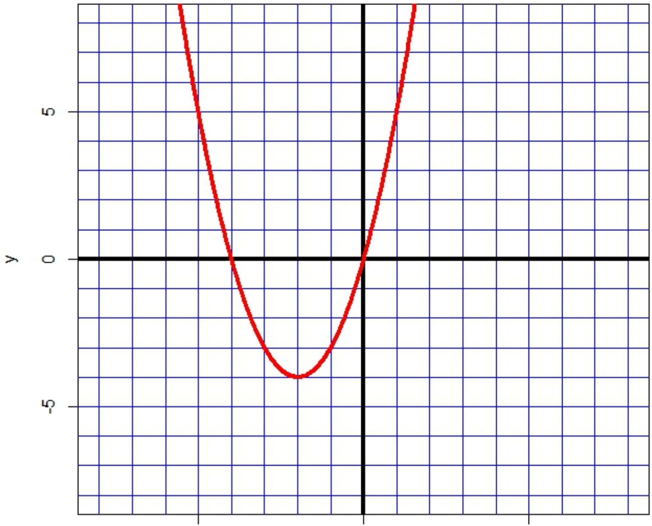
- El valor de b traslada la parábola 'en diagonal' (de arriba a abajo y de izquierda a derecha).

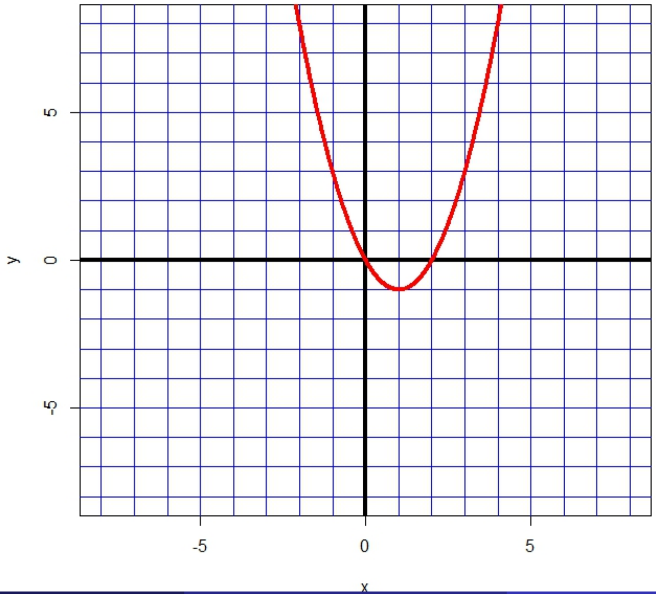


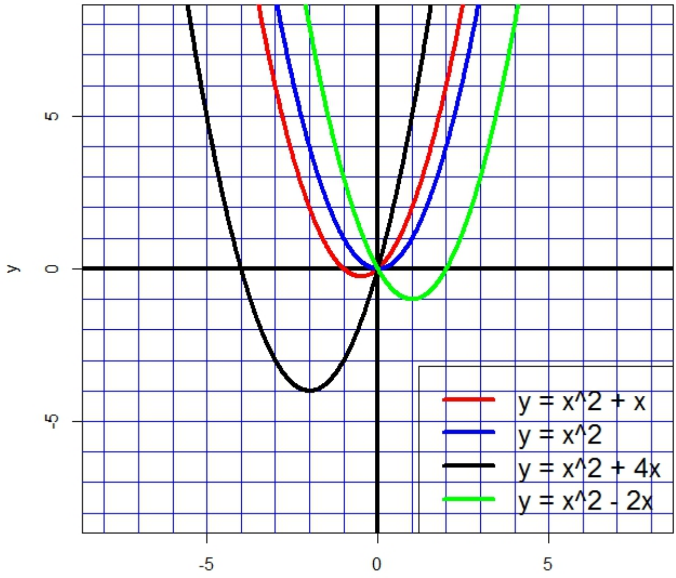
5
0
-5
y
-5
0
5
x


5
0
-5
y
-5
0
5
x

$$\boxed{y = 3x^2 + x}$$




5
0
-5
y
-5
0
5
x


y
5
0
-5
-5
0
5
y = x^2 + x
y = x^2
y = x^2 + 4x
y = x^2 - 2x