Tema 3. Polinomios. Sucesiones numéricas.

- **1. Lenguaje algebraico.**
- **2. Monomios.**
  - *Suma y resta*
  - *Multiplicación y división*
- **3. Polinomios.**
  - *Suma y resta*
  - *Multiplicación de un monomio por un polinomio*
  - *Igualdades notables*
- **4. Sucesiones**
  - *Sucesiones recurrentes*
  - *Progresiones aritméticas*
  - *Progresiones geométricas*

Lenguaje algebraico

Es una forma de representar información en Matemáticas utilizando letras (x) como incógnitas para representar aquello que no conocemos.

Edad de Jose $\longrightarrow x$

Edad de Nayara (un año más) $\longrightarrow x + 1$

Edad de Andrea B (un año menos) $\longrightarrow x - 1$

Edad del profesor (el doble que Jose y siete años más) $\longrightarrow 2x + 7$

$\boxed{\textbf{Lenguaje algebraico}} \longrightarrow \boxed{\textbf{Valor numérico}}$

Es una forma de representar información en Matemáticas utilizando letras (x) como incógnitas para representar aquello que no conocemos.

Edad de Jose $\longrightarrow x = 15$ años

Edad de Nayara (un año más) $\longrightarrow x + 1 = 15 + 1 = 16$ años

Edad de Andrea B (un año menos) $\longrightarrow x - 1 = 15$ - $1 = 14$ años

Edad del profesor (el doble que Jose y siete años más) $\longrightarrow 2x + 7 = 2 \cdot 15 + 7 = 37$ años

Ejercicio 1: Expresa en lenguaje algebraico. En una partida de bolos . . .

(a) Berta ha tirado un número de bolos desconocido

$$x$$

(b) Abel ha tirado 3 bolos más que Berta

$$x+3$$

(c) Silvia tira el doble de bolos que Berta

$$2x$$

(d) Ignacio tira la mitad de bolos que Berta

$$\frac{x}{2}$$

(e) David tira la tercera parte de bolos que Silvia

$$2x/3$$

Ejercicio 2: Calcula los valores del ejercicio anterior sabiendo que Berta ha tirado 18 bolos:

(a) Berta ha tirado un número de bolos desconocido

$$x = \textbf{18 bolos}$$

(b) Abel ha tirado 3 bolos más que Berta

$$x + 3 = \textbf{21 bolos}$$

(c) Silvia tira el doble de bolos que Berta

$$2x = 2 \cdot 18 = \textbf{36 bolos}$$

(d) Ignacio tira la mitad de bolos que Berta

$$\frac{x}{2} = \frac{18}{2} = \textbf{9 bolos}$$

(e) David tira la tercera parte de bolos que Silvia

$$2x \quad 2 \cdot 18$$

Tema 3. Polinomios. Sucesiones numéricas.

- **1. Lenguaje algebraico.**

- **2. Monomios.**
  - *Suma y resta*
  - *Multiplicación y división*

Un **monomio** es el producto de un número (**coeficiente**) por unos valores desconocidos representados con letras (**parte literal**).

El **grado** de un monomio es la suma de los exponentes de la parte literal.

El **valor numérico** de un monomio es su valor cuando las letras toman valores concretos.

Se dice que dos **monomios son semejantes** cuando sus partes literales sean iguales (**exponentes incluidos**).

$3x\ ,\ 4x^3$	No son semejantes	$5xy^2\ ,\ 3x^2y$	No son semejantes
$2y^2\ ,\ -\frac{1}{3}y^2$	Son semejantes	$xyz\ ,\ zxy$	Semejantes

Un **monomio** es el producto de un número (**coeficiente**) por unos valores desconocidos representados con letras (**parte literal**).

El **grado** de un monomio es la suma de los exponentes de la parte literal.

Monomio	**Coeficiente**	**Parte literal**	**Grado**
$-3x$	-3	x	1
$\frac{x^2}{3}$	$\frac{1}{3}$	x^2	2
$7xyz$	7	xyz	3
$x^2 + x$	No	es	monomio

Suma y resta de monomios

Dos monomios **sólo** pueden sumarse o restarse **cuándo son semejantes**. En ese caso:

- Se suman (o restan) los coeficientes.
- Se deja la misma parte literal que tenían.

$8x - 2x \qquad = \qquad 6x$

$7x + 2x^2 \qquad \longleftarrow$ No son semejantes

$7x - 2y^2 - x - 6y^2 \qquad = \qquad 6x - 8y^2$

$xy^2 - 3x^2y \qquad \longleftarrow$ No son semejantes

Multiplicación y división de monomios

Dos monomios se pueden multiplicar o dividir **siempre** (*no hace falta que sean semejantes*). Para multiplicarlos o dividirlos:

1. Se multiplican o dividen los coeficientes (números).
2. Se multiplican o dividen las letras (*utilizando las propiedades de las potencias*)

Ejemplo 1: $7x^2 \cdot 4x = \quad \boxed{28x^3}$

Ejemplo 2: $\dfrac{8x^5}{2x^3} = \quad \boxed{4x^2}$

Ejemplo 3: $(-2x) \cdot 5x^6 = \quad \boxed{-10x^7}$

Tema 3. Polinomios. Sucesiones numéricas.

- **1. Lenguaje algebraico.**
- **2. Monomios.**
  - *Suma y resta*
  - *Multiplicación y división*
- **3. Polinomios.**
  - *Suma y resta*
  - *Multiplicación de un monomio por un polinomio*
  - *Igualdades notables*

Un **polinomio** es la suma de dos o más monomios. El **grado** de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo componen.

El **valor numérico** de un polinomio es el resultado que da cuando se sustituyen las letras por unos valores determinados.

$$\boxed{5x^3 - 2xy^2 - x^2y}$$

Para $x = 1$, $y = -1$ $\longrightarrow$

$$5 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1 \cdot (-1)^2 - 1^2 \cdot (-1) = 5 - 2 + 1 = 4$$

Para $x = 0$, $y = 3$ $\longrightarrow$ $5 \cdot 0^3 - 2 \cdot 0 \cdot 3^2 - 0^2 \cdot 3 = 0$

Suma y resta de polinomios

- Para **sumar dos polinomios**, se suman los monomios semejantes.
- Para **restar dos polinomios**, se suma el minuendo con el opuesto del sustraendo.

- $(3x^2 + 5x - 2) + (-4x^3 - 3x + 5) = \boxed{-4x^3 + 3x^2 + 2x + 3}$

- $(2x^3 - 3x + 1) - (5x^3 - 2x^2 - 3) =$

  $2x^3 - 3x + 1 - 5x^3 + 2x^2 + 3 =$

  $\boxed{-3x^3 + 2x^2 - 3x + 4}$

- $(6x^2 - 12xy + y) - (5y + 10xy - 2x^2) =$

  $6x^2 - 12xy + y - 5y - 10xy + 2x^2 =$

  $\boxed{8x^2 - 22xy - 4y}$

Producto de un polinomio por un monomio

Se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

- $(-x^3) \cdot (2x^2 - 5x - 1) = \boxed{-2x^5 + 5x^4 + x^3}$
- $(2x^2 - y^3 + 4xy) \cdot (-4xy) = \boxed{-8x^3y + 4xy^4 - 16x^2y^2}$
- $6a \cdot (ab^2 - 2ab + 5a^3 - b) = \boxed{6a^2b^2 - 12a^2b + 30a^4 - 6ab}$

Igualdades Notables

1. Cuadrado de una suma

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

2. Cuadrado de una diferencia

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

3. Suma por diferencia

$$(x+y)\cdot(x-y) = x^2 - y^2$$

Igualdades Notables

1. Cuadrado de una suma

$$\boxed{(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2}$$

$$(xy+z)^2 = \quad (xy)^2 + 2\cdot xy\cdot z + z^2 \quad = \boxed{x^2y^2 + 2xyz + z^2}$$

$$(3+x)^2 = \quad 3^2 + 2\cdot 3\cdot x + x^2 \quad = \boxed{9 + 6x + x^2}$$

$$(y+2)^2 = \quad y^2 + 2\cdot y\cdot 2 + 2^2 \quad = \boxed{y^2 + 4y + 4}$$

$$(x+5y)^2 = \quad x^2 + 2\cdot x\cdot 5y + (5y)^2 \quad = \boxed{x^2 + 10xy + 25y^2}$$

Igualdades Notables

1. Cuadrado de una suma

$$\boxed{(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2}$$

$$(1 + z)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot z + z^2 = \boxed{1 + 2z + z^2}$$

$$(\sqrt{2x} + 1)^2 = (\sqrt{2x})^2 + 2 \cdot \sqrt{2x} \cdot 1 + 1^2 = \boxed{2x + 2\sqrt{2x} + 1}$$

$$(3z + 2)^2 = (3z)^2 + 2 \cdot 3z \cdot 2 + 2^2 = \boxed{9z^2 + 12z + 4}$$

$$(7x + 6)^2 = (7x)^2 + 2 \cdot 7x \cdot 6 + 6^2 = \boxed{49x^2 + 84x + 36}$$

Ejercicio 1: Desarrolla las siguientes igualdades notables:

(a) $(6+y)^2 =$

(b) $(x+1)^2 =$

(c) $(ab+2)^2 =$

(d) $(5x+2)^2 =$

(e) $(y+1)^2$

(f) $(ab+2)^2$

(g) $(x+10)^2$

(h) $(2x+4)^2$

Ejercicio 2: Realiza las siguientes operaciones:

(a) $(-6x^3y^2) \cdot 6xz =$

(b) $(4x^3 - 6x^2 - x + 4) - (x^3 + 3x^2 - 3x - 1) =$

(c) $(2x^2 - 3x + 1) \cdot 5x =$

Igualdades Notables

2. Cuadrado de una diferencia

$$\boxed{(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2}$$

$$(x-1)^2 = \quad x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = \quad \boxed{x^2 - 2x + 1}$$

$$(4-y)^2 = \quad 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot y + y^2 = \quad \boxed{16 - 8y + y^2}$$

$$(3-8x)^2 = \quad 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8x + (8x)^2 = \quad \boxed{9 - 48x + 64x^2}$$

$$(5z-x)^2 = \quad (5z)^2 - 2 \cdot 5z \cdot x + x^2 = \quad \boxed{25z^2 - 10xz + x^2}$$

Igualdades Notables

3. Suma por diferencia

$$\boxed{(x+y)\cdot(x-y)=x^2-y^2}$$

$$(y+2)\cdot(y-2)= \qquad y^2-2^2= \qquad \boxed{y^2-4}$$

$$(5-x)\cdot(5+x)= \qquad 5^2-x^2= \qquad \boxed{25-x^2}$$

$$(2x+3y)\cdot(2x-3y)= \qquad (2x)^2-(3y)^2= \qquad \boxed{4x^2-9y^2}$$

$$(a^2-4)\cdot(a^2+4)= \qquad (a^2)^2-4^2= \qquad \boxed{a^4-16}$$

Ejercicio 1: Desarrolla las siguientes suma por diferencia:

(a) $(4-b)\cdot(4+b)=$

(b) $(3x-y)\cdot(3x+y)=$

(c) $(7-xy)\cdot(7+xy)=$

(d) $(5-2x)\cdot(5+2x)=$

Ejercicio 2: Desarrolla las igualdades notables:

(a) $(2x+y)^2=$

(b) $(10-x)^2=$

(c) $(3-2a)^2=$

(d) $(1+ab)^2=$

Ejercicio 3: Resuelve

(a) $(-2x^2)\cdot(3x^3-5x-4)=$

(b) $7xy^5\cdot(-9x^3y)=$

(c) $(6x^2-7x-1)-(4x^2-8x+5)=$

Tema 3. Polinomios. Sucesiones numéricas.

- **1. Lenguaje algebraico.**
- **2. Monomios.**
  - *Suma y resta*
  - *Multiplicación y división*
- **3. Polinomios.**
  - *Suma y resta*
  - *Multiplicación de un monomio por un polinomio*
  - *Igualdades notables*
- **4. Sucesiones**
  - *Sucesiones recurrentes*
  - *Progresiones aritméticas*
  - *Progresiones geométricas*

Sucesiones

Una **sucesión** es un conjunto ordenado de números reales:

$$a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3 \ , \ a_4 \ , \ a_5 \ , \ a_6 \ , \ldots$$

Cada término de la sucesión se designa por a_i donde i indica el lugar que ocupa en la sucesión.

Ejemplo 1: **2, 4, 6, 8, 10, 12, ...**

Ejemplo 2: **3, 9, 27, 81, 243, 729, ...**

Ejemplo 3: **0, -3, -6, -9, -12, -15, ...**

Ejemplo 4: **50, 48, 46, 44, 42, 40, ...**

Regla de formación: Criterio por el que se obtienen los términos de una sucesión.

Para conocer la **regla de formación**, estudiamos la relación entre los términos de una sucesión:

Ejemplo 1: **2, 4, 6, 8, 10, 12, . . .**

$\longrightarrow$ **Cada término es el anterior más dos**

Ejemplo 2: **3, 9, 27, 81, 243, 729, . . .**

$\longrightarrow$ **Cada término es el anterior multiplicado por tres**

Ejemplo 3: **0, -3, -6, -9, -12, -15, . . .**

$\longrightarrow$ **Cada término es el anterior menos tres**

Ejemplo 4: **50, 48, 46, 44, 42, 40, . . .**

$\boxed{\textbf{Sucesiones}} \longrightarrow \boxed{\textbf{Regla de formación}}$

Regla de formación: Criterio por el que se obtienen los términos de una sucesión.

Para conocer la **regla de formación**, estudiamos la relación entre los términos de una sucesión:

Ejemplo 5: **1, 11, 111, 1111, 11111, . . .**

$\longrightarrow$ **Cada término tiene tantos unos como el lugar que le corresponde**

Ejemplo 6: **1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, . . .**

$\longrightarrow$ **Cada término es la suma de los dos anteriores (Sucesión de Fibonacci)**

Ejercicio 1: Di cuales son los términos a_1, a_3 y a_6 de las siguientes sucesiones:

(a) 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , . . .

$\mathbf{a}_1 = 6$ **,** $\mathbf{a}_3 = 8$ **y** $\mathbf{a}_6 = 11$

(b) 0 , -2 , -4 , -6 , -8 , . . .

$\mathbf{a}_1 = 0$ **,** $\mathbf{a}_3 = -4$ **y** $\mathbf{a}_6 = -10$

(c) 1 , 0'1 , 0'01 , 0'001 , 0'0001 , . . .

$\mathbf{a}_1 = 1$ **,** $\mathbf{a}_3 = 0'01$ **y** $\mathbf{a}_6 = 0'00001$

(d) -2 , 4 , -8 , 16 , -32 , . . .

$\mathbf{a}_1 = -2$ **,** $\mathbf{a}_3 = -8$ **y** $\mathbf{a}_6 = 64$

Ejercicio 2: Escribe la regla de formación y los seis siguientes términos de las siguientes sucesiones:

(a) $3\ ,\ 6\ ,\ 12\ ,\ 24\ ,\ \ldots$

Regla de formación: Cada término es el doble del anterior

$\mathbf{a}_5 = 48$ **,** $\mathbf{a}_6 = 96$ **,** $\mathbf{a}_7 = 192$ **,** $\mathbf{a}_8 = 384$ **,** $\mathbf{a}_9 = 768$ **,** $\mathbf{a}_{10} = 1536$

(b) $3\ ,\ 7\ ,\ 11\ ,\ 15\ ,\ \ldots$

Regla de formación: Cada término es el anterior más cuatro

$\mathbf{a}_5 = 19$ **,** $\mathbf{a}_6 = 23$ **,** $\mathbf{a}_7 = 27$ **,** $\mathbf{a}_8 = 31$ **,** $\mathbf{a}_9 = 35$ **,** $\mathbf{a}_{10} = 39$

Ejercicio 2: Escribe la regla de formación y los seis siguientes términos de las siguientes sucesiones:

(c) 3 , -1 , -5 , -9 , . . .

Regla de formación: Cada término es el anterior menos cuatro

$\mathbf{a}_5 = -13$ **,** $\mathbf{a}_6 = -17$ **,** $\mathbf{a}_7 = -21$ **,** $\mathbf{a}_8 = -25$ **,** $\mathbf{a}_9 = -29$ **,** $\mathbf{a}_{10} = -33$

(d) 3 , 4 , 7 , 11 , 18 , 29. . .

Regla de formación: Cada término es la suma de los dos anteriores

$\mathbf{a}_5 = 47$ **,** $\mathbf{a}_6 = 76$ **,** $\mathbf{a}_7 = 123$ **,** $\mathbf{a}_8 = 199$ **,** $\mathbf{a}_9 = 322$ **,** $\mathbf{a}_{10} = 521$

Progresión aritmética

Es una sucesión en la que cada término se obtiene a partir del anterior sumándole un número fijo d, llamado **diferencia** de la progresión.

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots$$

Ejemplo 1: **6 , 11 , 16 , 21 , 26 , . . .**

Ejemplo 2: **-8 , -3 , 2 , 7 , 12 , . . .**

Ejemplo 3: **14 , 16 , 18 , 20 , 22 , . . .**

$\boxed{\text{Progresión aritmética}}$ $\longrightarrow$ Término general

El **término general** de una progresión aritmética es:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$$

Ejemplo 1: **6 , 11 , 16 , 21 , 26 , . . .**

$\boxed{a_n = 6 + (n-1) \cdot 5} \longrightarrow \boxed{a_n = 5n + 1}$

Ejemplo 2: **-8 , -3 , 2 , 7 , 12 , . . .**

$\boxed{a_n = -8 + (n-1) \cdot 5} \longrightarrow \boxed{a_n = 5n - 13}$

Ejemplo 3: **14 , 16 , 18 , 20 , 22 , . . .**

$\boxed{a_n = 14 + (n-1) \cdot 2} \longrightarrow \boxed{a_n = 2n + 12}$

Ejemplo 4: **0 , -7 , -14 , -21 , -28 , . . .**

$\boxed{a_n = 0 + (n-1) \cdot (-7)} \longrightarrow \boxed{a_n = -7n + 7}$

$$6\ ,\ 14\ ,\ 22\ ,\ 30\ ,\ \ldots$$

¿Es una progresión aritmética?

Sí, cada término es el anterior más 8

¿Cuánto vale la diferencia d?

$$\boxed{d = 8}$$

¿Cuál es el término general a_n?

$$\boxed{a_n = 6 + (n-1)\cdot 8}$$

$$2 , 6 , 11 , 17 , \ldots$$

¿Es una progresión aritmética?

No, la diferencia entre dos términos seguidos no es un valor fijo

¿Cuánto vale la diferencia d?

$\boxed{\textbf{No procede}}$

¿Cuál es el término general a_n?

$\boxed{\textbf{No procede}}$

$$100 \ , \ 85 \ , \ 70 \ , \ 55 \ , \ \ldots$$

¿Es una progresión aritmética?

Sí, cada término es el anterior menos 15

¿Cuánto vale la diferencia d?

$$\boxed{d = -15}$$

¿Cuál es el término general a_n?

$$\boxed{a_n = 100 + (n-1) \cdot (-15)}$$

$14 , 10 , 6 , 0 , \ldots$

¿Es una progresión aritmética?

No, la diferencia entre dos términos seguidos no es un valor fijo:

De 14 a 10 se restan 4

De 10 a 6 se restan 4

De 6 a 0 se restan 6

¿Cuánto vale la diferencia d?

$\boxed{\textbf{No procede}}$

5 , 2 , -1 , -4 , . . .

¿Es una progresión aritmética?

Sí, cada término es el anterior menos 3

¿Cuánto vale la diferencia d?

$$\boxed{d = -3}$$

¿Cuál es el término general a_n?

$$\boxed{a_n = 5 + (n-1) \cdot (-3)}$$

Ejercicio 1: Calcula el décimo término de una sucesión con término general $a_n = 3n + 2$

Décimo término $\longrightarrow$ Posición 10 $\longrightarrow$ $n = 10$

Sustituimos n en la fórmula del término general:

$a_{10} = 3 \cdot 10 + 2$

Y hacemos cuentas:

$a_{10} = 3 \cdot 10 + 2 = 30 + 2 = 32$

$\boxed{a_{10} = 32}$

Ejercicio 2: Calcula el término que va en la posición 35 de una sucesión con término general $a_n = 5 + (n-1) \cdot 2$

Posición 35 $\longrightarrow n = 35$

Sustituimos n en la fórmula del término general:

$a_{35} = 5 + (35-1) \cdot 2$

Y hacemos cuentas:

$a_{35} = 5 + (35-1) \cdot 2 = 5 + 34 \cdot 2 = 5 + 68 = 73$

$\boxed{a_{35} = 73}$

Ejercicio 3: Calcula el término que va en la posición 60 de una sucesión con término general $a_n = 14 + 10n$

Posición 60 $\longrightarrow n = 60$

Sustituimos n en la fórmula del término general:

$a_{60} = 14 + 10 \cdot 60$

Y hacemos cuentas:

$a_{60} = 14 + 10 \cdot 60 = 14 + 600 = 614$

$\boxed{a_{60} = 614}$

Progresión geométrica

Es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo r, llamado **razón** de la progresión.

En una progresión geométrica se cumple que:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots$$

Ejemplo 1: **2 , 6 , 18 , 54 , . . .**

Ejemplo 2: **1 , 5 , 25 , 125 , . . .**

Ejemplo 3: **-3 , 6 , -12 , 24 , . . .**

Progresión geométrica

Es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo r, llamado **razón** de la progresión.

El término general de una progresión aritmética es:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Información útil para aquellas progresiones geométricas en las que se divide:

	es lo mismo que ...	**Razón**
Dividir entre 2	Multiplicar por $1/2$	$r = \frac{1}{2}$
Dividir entre 3	Multiplicar por $1/3$	$r = \frac{1}{3}$
Dividir entre 4	Multiplicar por $1/4$	$r = \frac{1}{4}$
Dividir entre N	Multiplicar por $1/N$	$r = \frac{1}{N}$

Ejercicio 1: Indica si son progresiones geométricas:

(a) 4 , 8 , 16 , 20 , . . .

(b) 1 , 4 , 8 , 12 , . . .

(c) 1 , 4 , 16 , 64 , . . .

(d) -1 , -3 , -9 , -27 , . . .

(e) 4 , 8 , 16 , 32 , . . .

(f) 25 , 5 , 1 , 0'2 , . . .

(g) 2 , 6 , 24 , 108 , . . .