Tema 5: Trigonometría

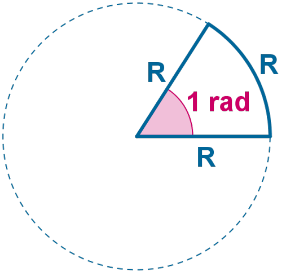
1. **Definiciones. Ángulos: Grados y radianes.**
2. **Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente.**
3. **Relaciones entre seno, coseno y tangente.**
4. **Razones trigonométricas de 30º , 45º y 60º.**
5. **Razones trigonométricas de ángulos no agudos. Signo**
6. *Ángulos complementarios, suplementarios y opuestos*
7. **Problemas con trigonometría.**

Definiciones

Sistema sexagesimal: Es un sistema de numeración posicional que emplea como base aritmética el número 60. Se utiliza para medir el tiempo y los **ángulos**.

En el sistema internacional, la unidad de medida utilizada para medir ángulos es el **radián**.

Se llama **radián** a la amplitud del ángulo de una circunferencia cuyo arco mide lo mismo que su radio (*57 y pico grados*):



Equivalencia entre grados y radianes (I)

El ángulo de la circunferencia completa mide 360º o 2π radianes. Para transformar grados en radianes, o viceversa, utilizamos reglas de tres:

- Si queremos saber cuántos radianes son 30 grados:

$$\begin{array}{lcl} 360 \text{ grados} & \longrightarrow & 2\pi \text{ rad} \\ 30 \text{ grados} & \longrightarrow & x = \dfrac{\pi}{6} \text{ rad} \end{array}$$

- Si queremos saber cuántos radianes son 105 grados:

$$\begin{array}{lcl} 360 \text{ grados} & \longrightarrow & 2\pi \text{ rad} \\ 105 \text{ grados} & \longrightarrow & x = \dfrac{7\pi}{12} \text{ rad} \end{array}$$

Equivalencia entre grados y radianes (II)

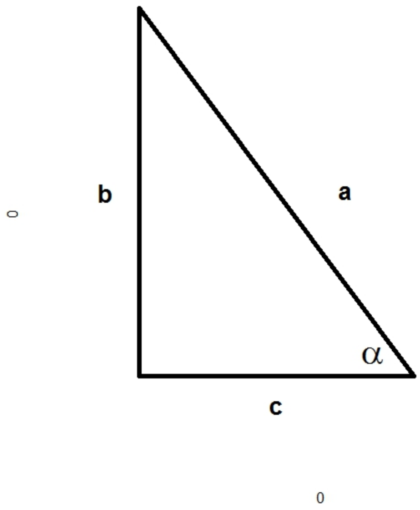
Grados	Radianes	Grados	Radianes
360º	2π rad	180º	π rad
90º	$\frac{\pi}{2}$ rad	45º	$\frac{\pi}{4}$ rad
60º	$\frac{\pi}{3}$ rad	30º	$\frac{\pi}{6}$ rad
120º	$\frac{2\pi}{3}$ rad	150º	$\frac{5\pi}{6}$ rad

Tema 5: Trigonometría

1. Definiciones. Ángulos: Grados y radianes.

2. **Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente.**

Dado un **triángulo rectángulo**



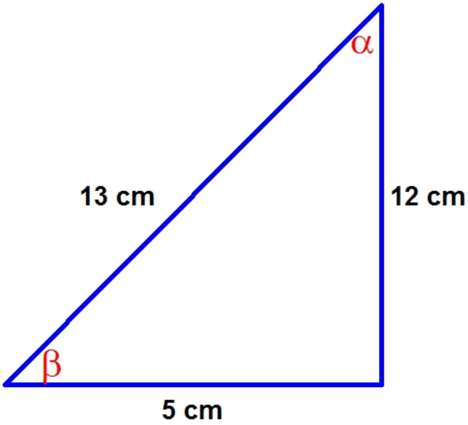
Dado un **triángulo rectángulo**, las **razones trigonométricas** de un ángulo agudo α son:

$$\textbf{seno de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

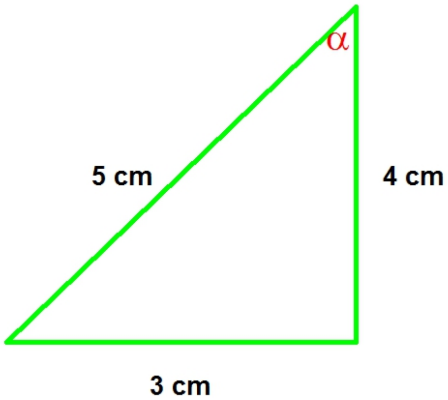
$$\textbf{coseno de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}{\text{longitud de la hipotenusa}}$$

$$\textbf{tangente de } \alpha = \frac{\text{longitud del cateto opuesto a } \alpha}{\text{longitud del cateto contiguo a } \alpha}$$

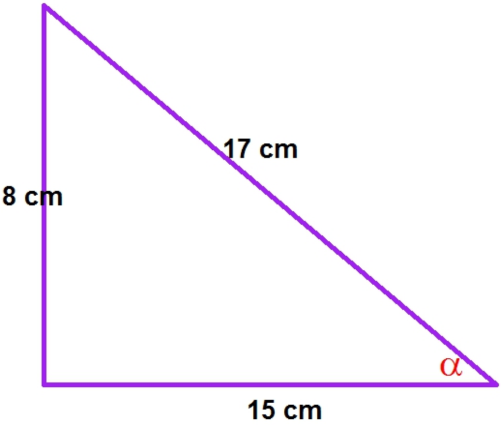
Ejemplo: Halla las razones trigonométricas de los ángulos marcados en el triángulo:



Ejercicio 1: Dado el siguiente triángulo, calcula las razones trigonométricas del ángulo α:



Ejercicio 2: Dado el siguiente triángulo, calcula las razones trigonométricas del ángulo α:



Ejercicio 3: Si el cateto contiguo a un ángulo en un triángulo rectángulo mide 3 cm y la tangente de ese ángulo vale $4/3$, ¿cuánto valen los demás lados?

(Dibuja siempre la figura, indicando los datos)

Llamamos b al cateto opuesto, la hipotenusa es a

Utilizando la definición de tangente:

$$tg\alpha = \frac{b}{3} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{4}{3} = \frac{b}{3}$$

Despejamos y queda $b = 4$

Aplicamos ahora el teorema de Pitágoras, y queda que $a = 5$

$$a^2 = 4^2 + 3^2 \qquad \longrightarrow \qquad a^2 = 25 \qquad \longrightarrow \qquad a = 5$$

$\boxed{\textbf{La hipotenusa 5 cm, el otro cateto, 4 cm}}$

Ejercicio 4: Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 2 cm y la tangente de uno de sus ángulos vale 1, ¿cuánto miden los otros lados?

(Dibuja siempre la figura, indicando los datos)

Por definición, si $tg\alpha = 1$, los dos catetos son iguales, por tanto $b = c$

Utilizamos ahora el teorema de Pitágoras para calculñar su longitud:

$$2^2 = b^2 + b^2 \qquad \longrightarrow \qquad 4 = 2b^2 \qquad \longrightarrow \qquad 2 = b^2$$

Por tanto $b = \sqrt{2} = 1'41$ cm

$\boxed{\textbf{Los catetos miden 1'41 cm}}$

Tema 5: Trigonometría

1. **Definiciones. Ángulos: Grados y radianes.**
2. **Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente.**
3. **Relaciones entre seno, coseno y tangente.**

Relaciones entre seno, coseno y tangente:

$$\boxed{tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}}$$

$$\boxed{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

$$\boxed{tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}}$$

Gracias a estas relaciones, podemos **calcular todas las razones trigonométricas** (seno, coseno y tangente) conociendo tan solo una de ellas.

Ejemplos: Calcula, en cada apartado, las razones trigonométricas que faltan:

(a) $sen\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(b) $cos\beta = \dfrac{1}{2}$

(c) $tg\lambda = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Ejercicio 5: Comprueba si estas parejas de relaciones trigonométricas pertenecen al mismo ángulo:

(a) $\cos\alpha = 0'1736$ y $\operatorname{tg}\alpha = 0'4663$

(b) $\cos\alpha = 0'9397$ y $\operatorname{tg}\alpha = 0'3640$

(c) $\cos\alpha = 0'2588$ y $\operatorname{sen}\alpha = 0'1485$

(d) $\cos\alpha = 0'7313$ y $\operatorname{tg}\alpha = 0'9325$

(e) $\cos\alpha = 0'6691$ y $\operatorname{sen}\alpha = 0'2754$

$\boxed{5a}$ $cos\alpha = 0,1736$ y $tg\alpha = 0,4663$

Se tiene que cumplir $\boxed{tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}}$. Lo comprobamos:

$$tg^2\alpha + 1 \quad \longrightarrow \quad 0,4663^2 + 1 = 1,217$$

$$\frac{1}{cos^2\alpha} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{0,1736^2} = 33,18$$

Conclusión: No existe ningún ángulo α en que se den simultáneamente estos valores.

$\boxed{\text{5b}}$ $cos\alpha = 0,9397$ y $tg\alpha = 0,364$

Se tiene que cumplir $\boxed{tg^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{cos^2\alpha}}$. Lo comprobamos:

$$tg^2\alpha + 1 \quad \longrightarrow \quad 0,364^2 + 1 = 1,132496$$

$$\frac{1}{cos^2\alpha} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{0,9397^2} = 1,132456$$

Conclusión: Existe un ángulo α en que se dan simultáneamente estos valores (*Hay una pequeña diferencia a partir del quinto decimal, pero entendemos que los valores son iguales*).

$\boxed{\text{5c}}$ $cos\alpha = 0,2588$ y $sen\alpha = 0,1485$

Se tiene que cumplir $\boxed{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$. Lo comprobamos:

$0,1485^2 + 0,2588^2 = 0,089$

Conclusión: No existe ningún ángulo α en que se den simultáneamente estos valores.

Ejercicio 6: Decide si existe un ángulo α tal que:

(a) sen $\alpha = \frac{3}{5}$ y cos $\alpha = \frac{4}{5}$

(b) cos $\alpha = \frac{3}{5}$ y tg $\alpha = \frac{7}{5}$

(b) sen $\alpha = \frac{2}{5}$ y tg $\alpha = \frac{7}{5}$

$\boxed{6a}$ $sen\alpha = \frac{3}{5}$ y $cos\alpha = \frac{4}{5}$

Se tiene que cumplir $\boxed{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$. Lo comprobamos:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

Conclusión: Existe un ángulo α en que se dan simultáneamente estos valores.

$\boxed{\text{6b}}$ $cos\alpha = \frac{3}{5}$ y $tg\alpha = \frac{7}{5}$

Se tiene que cumplir $\boxed{tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}}$. Lo comprobamos:

$$tg^2\alpha + 1 \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{7}{5}\right)^2 + 1 = 2,96$$

$$\frac{1}{cos^2\alpha} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = 2,78$$

Conclusión: No existe ningún ángulo α en que se den simultáneamente estos valores.

Otras propiedades de las razones trigonométricas

1. Las razones trigonométricas no dependen del triángulo rectángulo escogido, sino del ángulo.

   un ángulo de 32º tiene siempre los mismos valores de seno, coseno y tangente, independientemente del triángulo en que se encuentre

2. Para calcular el ángulo del que conocemos una razón trigonométrica, utilizamos:

   $\text{sen}^{-1}\,\alpha$ (arcoseno) $\quad$ $\cos^{-1}\,\alpha$ (arcocoseno) $\quad$ $\text{tg}^{-1}\,\alpha$ (arcotangente)

   Para ello pulsamos en la calculadora:

   - *shift* + *sin* + α =
   - *shift* + *cos* + α =
   - *shift* + *tg* + α =

Tema 5: Trigonometría

1. **Definiciones. Ángulos: Grados y radianes.**
2. **Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente.**
3. **Relaciones entre seno, coseno y tangente.**
4. **Razones trigonométricas de 30º , 45º y 60º.**

Razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º:

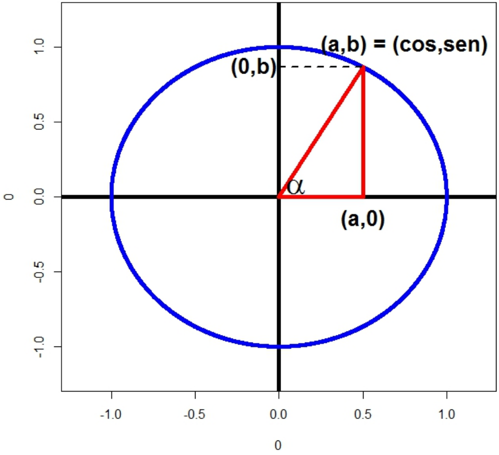
Ángulo (º)	Ángulo (rad)	sen	cos	tg
30º	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Razones trigonométricas de 30º, 45º y 60º:

Ejercicio 7: Halla la altura de un triángulo equilátero de 5 cm de lado **sin usar el teorema de Pitágoras**.

Ejercicio 8: Halla, usando razones trigonométricas, la diagonal de un cuadrado de 3 cm de lado.

Circunferencia goniométrica:



$$\boxed{sen\alpha = b}$$

$$\boxed{cos\alpha = a}$$

?

$$\boxed{tg\alpha = \frac{b}{a}}$$

Calcula los lados que faltan en los siguientes triángulos rectángulos:

(a) Ángulo de 60º con cateto opuesto de 5 cm.

Llamamos b al cateto contiguo y h a la hipotenusa

Por definición sen 60º $= \dfrac{5}{h}$. Así que h $= \dfrac{5}{sen 60ž}$

Por tanto $\boxed{\text{h} = \dfrac{10}{\sqrt{3}} = 5\text{'}77 \text{ cm}}$

Por definición tg 60º $= \dfrac{5}{b}$. Así que b $= \dfrac{5}{tg 60ž}$

Por tanto $\boxed{\text{b} = \dfrac{5}{\sqrt{3}} = 2\text{'}89 \text{ cm}}$

Calcula los lados que faltan en los siguientes triángulos rectángulos:

(b) Ángulo de 30º con cateto opuesto de 2 cm.

Llamamos *b* al cateto contiguo y *h* a la hipotenusa

Por definición sen 30º $= \frac{2}{h}$. Así que h $= \frac{2}{sen 30ž}$

Por tanto $\boxed{\mathrm{h} = \frac{2}{0{,}5} = 4 \text{ cm}}$

Por definición cos 30º $= \frac{b}{h}$. Así que b $= cos 30ž \cdot h$

Por tanto $\boxed{\mathrm{b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = 3'46 \text{ cm}}$

Calcula los lados que faltan en los siguientes triángulos rectángulos:

(c) Ángulo de 45º con cateto contiguo de 7 cm.

Llamamos a al cateto opuesto y h a la hipotenusa

Por definición tg 45º $= \dfrac{a}{7}$. Así que a $= 7 \cdot tg45$ž

Por tanto $\boxed{\text{a} = 7 \cdot 1 = 7 \text{ cm}}$

Utilizamos Pitágoras para calcular la hipotenusa:

$h^2 = 7^2 + 7^2 = 98$. Entonces $\boxed{\text{h} = \sqrt{98} = 9.9 \text{ cm}}$

Calcula los lados que faltan en los siguientes triángulos rectángulos:

(d) Ángulo de 45º con cateto opuesto de 9 cm.

Llamamos b al cateto contiguo y h a la hipotenusa

Por definición tg 45º $= \frac{9}{b}$. Así que b $= \frac{9}{tg 45\check{z}}$

Por tanto $\boxed{\text{b} = \frac{9}{1} = 9 \text{ cm}}$

Utilizamos Pitágoras para calcular la hipotenusa:

$h^2 = 9^2 + 9^2 = 162$. Entonces $\boxed{\text{h} = \sqrt{162} = 12.73 \text{ cm}}$

12 (Ficha 1) Si el cateto contiguo a un ángulo en un triángulo rectángulo mide 6 cm y el ángulo mide 60º, ¿cuánto valen los demás lados del triángulo?

Llamamos *a* al cateto opuesto y *h* a la hipotenusa

Por definición $\cos 60º = \frac{6}{h}$. Así que $\mathrm{h} = \frac{6}{cos60ž}$

Por tanto $\boxed{\mathrm{h} = \frac{6}{0{,}5} = 12 \text{ cm}}$

Utilizamos Pitágoras para calcular el cateto opuesto:

$12^2 = 6^2 + a^2$. Entonces $\boxed{\mathrm{a} = \sqrt{144 - 36} = 10.39 \text{ cm}}$

13 (Ficha 1) Sabiendo que el ángulo de un triángulo rectángulo mide 45º y el cateto opuesto mide 12 cm, halla el resto de lados del triángulo.

Llamamos b al cateto contiguo y h a la hipotenusa

Por definición tg 45º $= \dfrac{12}{b}$. Así que b $= \dfrac{12}{tg45\check{z}}$

Por tanto $\boxed{\text{b} = \dfrac{12}{1} = 12 \text{ cm}}$

Utilizamos Pitágoras para calcular la hipotenusa:

$h^2 = 12^2 + 12^2$. Entonces $\boxed{\text{h} = \sqrt{288} = 16.97 \text{ cm}}$

14 (Ficha 1) La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 30 cm y uno de sus ángulos mide 30º. Calcula los catetos del triángulo.

Llamamos b al cateto contiguo y a al cateto opuesto

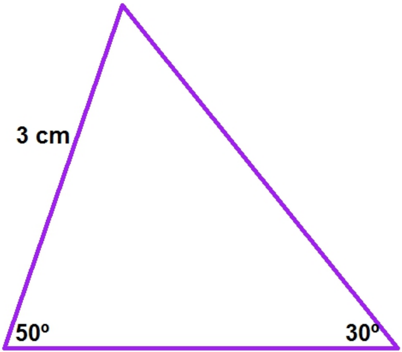
Por definición sen $30º = \frac{a}{30}$. Así que $\mathrm{a} = sen 30ž \cdot 30$

Por tanto $\boxed{\mathrm{a} = 0{,}5 \cdot 30 = 15 \text{ cm}}$

Utilizamos Pitágoras para calcular el cateto contiguo:

$30^2 = 15^2 + b^2$. Entonces $\boxed{\mathrm{b} = \sqrt{30^2 - 15^2} = 25.98 \text{ cm}}$

Cálculo del área de un triángulo (*no rect.*) conocidos dos ángulos y un lado

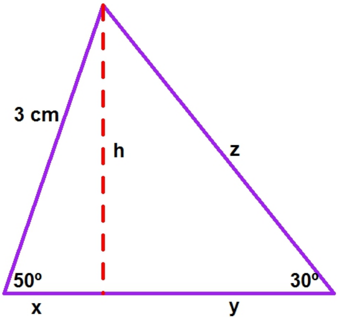


0

0

Cálculo del área de un triángulo (*no rect.*) conocidos dos ángulos y un lado

Paso 1: El área de un triángulo es $\boxed{A = \dfrac{b \cdot h}{2}}$. Necesitamos conocer b y h.



Paso 2: Se calculan las razones trigonométricas que relacionan el lado y un ángulo conocido

$\text{sen } 50º = \dfrac{h}{3} \quad \Longrightarrow \quad h = \text{sen } 50º{\cdot}3 = 2'3 \text{ cm}$

$\cos 50º = \dfrac{x}{3} \quad \Longrightarrow \quad x = \cos 50º{\cdot}3 = 1'93 \text{ cm}$

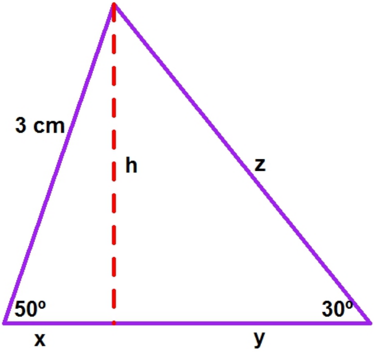
Paso 3: Se hallan las razones trigonométricas que relacionan la altura y el ángulo opuesto.

$\text{tg } 30º = \dfrac{h}{y} = \dfrac{2'3}{y} \quad \Longrightarrow \quad y = \dfrac{2'3}{\text{tg } 30º} = 3'98 \text{ cm}$

Entonces la base es b = x + y = 1'93 + 3'98 = 5'91 cm

Paso 4: Se aplica la fórmula del área:

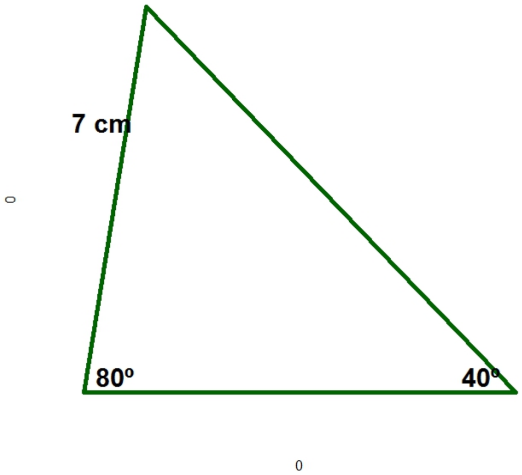
$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5'91 \cdot 2'3}{2} = \boxed{6'8 \text{ cm}^2}$$



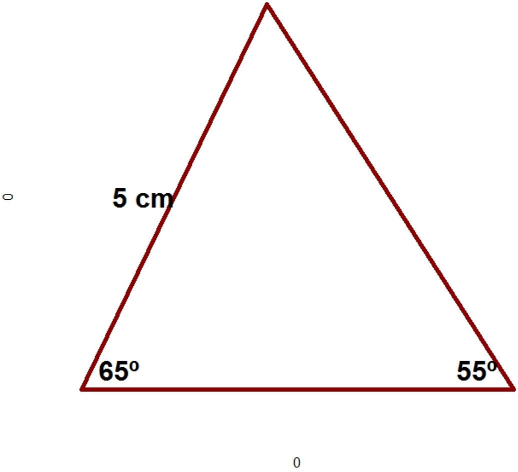
0

0

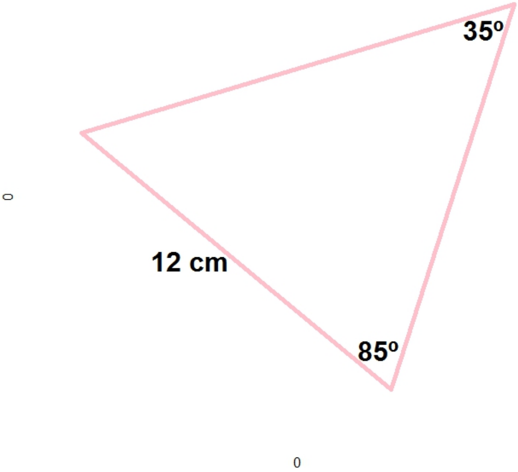
Ejercicio 1: (Ficha 2) Calcula el área de este triángulo:



Ejercicio 2: (Ficha 2) Calcula el área de este triángulo:



Ejercicio 3 (Ficha 2): Calcula el área de este triángulo:



Tema 5: Trigonometría

1. **Definiciones. Ángulos: Grados y radianes.**
2. **Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente.**
3. **Relaciones entre seno, coseno y tangente.**
4. **Razones trigonométricas de 30º , 45º y 60º.**
5. **Razones trigonométricas de ángulos no agudos. Signo**

Razones trigonométricas de ángulos no agudos:

	De 0º a 90º	De 90º a 180º	De 180º a 270º	De 270º a 360º
seno α	**Positiva**	**Positiva**	Negativa	Negativa
coseno α	**Positiva**	Negativa	Negativa	**Positiva**
tangente α	**Positiva**	Negativa	**Positiva**	Negativa

Razones trigonométricas de ángulos no agudos:

	0º	30º	45º	60º	90º	180º	270º
seno α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**	**0**	-1
coseno α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**	**-1**	0
tangente α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	**1**	$\sqrt{3}$	**No existe**	**0**	No existe

Ejercicio 1: Halla las razones trigonométricas de α si está en el 2º cuadrante y $sen\alpha = 0'6427$.

Ejercicio 2: Averigua en qué cuadrante se encuentra α en cada caso y halla la tercera razón trigonométrica:

(a) $sen\alpha =$ 0'9397 $\qquad cos\alpha =$ - 0'342

(b) $sen\alpha =$ - 0'766 $\qquad tg\alpha =$ 1'1918

Tema 5: Trigonometría

1. **Definiciones. Ángulos: Grados y radianes.**
2. **Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente.**
3. **Relaciones entre seno, coseno y tangente.**
4. **Razones trigonométricas de 30º , 45º y 60º.**
5. **Razones trigonométricas de ángulos no agudos. Signo**
6. *Ángulos complementarios, suplementarios y opuestos*

1. Ángulos complementarios

Dos ángulos, α y β, son **complementarios** cuando $\alpha + \beta = 90$. En ese caso:

$$\boxed{sen\beta = cos\alpha} \qquad \boxed{cos\beta = sen\alpha} \qquad \boxed{tg\beta = \frac{1}{tg\alpha}}$$

25º y 65º son complementarios. Por lo tanto:

$$\text{sen } 65º = \cos 25º \qquad \cos 65º = \text{sen } 25º \qquad \text{tg } 65º = \frac{1}{\text{tg } 25º}$$

2. Ángulos suplementarios

Dos ángulos, α y β, son **suplementarios** cuando $\alpha + \beta = 180$. En ese caso:

$\boxed{sen\beta = sen\alpha}$ $\boxed{cos\beta = -cos\alpha}$ $\boxed{tg\beta = -tg\alpha}$

45º y 135º son suplementarios. Por lo tanto:

sen 135º = sen 45º

cos 135º = - cos 45º

tg 135º = - tg 25º

3. Ángulos opuestos

Dos ángulos, α y β, son **opuestos** cuando $\alpha + \beta = 360$ž. En ese caso:

$\boxed{sen\beta = -sen\alpha}$ $\boxed{cos\beta = cos\alpha}$ $\boxed{tg\beta = -tg\alpha}$

60º y 300º son suplementarios. Por lo tanto:

sen 300º = - sen 60º cos 300º = cos 60º tg 300º = - tg 60º

Ejercicio 1: Utiliza la calculadora para hallar las razones trigonométricas de 35º. A partir de ellas, calcula las razones trigonométricas de:

(a) *Su ángulo complementario*

(b) *Su ángulo suplementario*

(c) *Su ángulo opuesto*

Ejercicio 2: Calcula las razones trigonométricas de 65º, 155º y 335º, sabiendo que:

sen 25º = 0'42   cos 25º = 0'91   tg 25º = 0'47

Ejercicio 3: En un triángulo rectángulo, el seno de uno de los ángulos agudos vale 0'9848. Calcula las razones trigonométricas del otro ángulo agudo.

Tema 5: Trigonometría

1. **Definiciones. Ángulos: Grados y radianes.**
2. **Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente.**
3. **Relaciones entre seno, coseno y tangente.**
4. **Razones trigonométricas de 30º , 45º y 60º.**
5. **Razones trigonométricas de ángulos no agudos. Signo**
6. *Ángulos complementarios, suplementarios y opuestos*
7. **Problemas con trigonometría.**

Problemas con trigonometría

- **Calcular el área de un triángulo conocidos dos ángulos y un lado.**
- **Calcular el área de un polígono regular.**
- **Problemas reales con triángulos.**
- **Problemas reales con otras figuras geométricas.**
- **. . .**

Problema 1: Debido al viento, una cometa atada al suelo ha alcanzado una altura de 5 m. Calcula la longitud de la cuerda si cuando ha alcanzado esta altura estaba totalmente estirada, formando un ángulo de 60 grados respecto al suelo.

Problema 2: Fernando va a tirar un penalti en un partido de fútbol donde la portería mide 2'44 m de altura, y golpea recto con un ángulo de inclinación de 38 grados. Si el punto de penalti está a 11 metros, ¿entrará el balón en la portería o pasará alto?

Problema 3: Halla la altura de la ventana de María si cuando se asoma ve el foco de una farola, que está a 7 m de distancia, en linea recta, y la base la farola está bajando la mirada 45 grados.