Tema 4. Ecuaciones. Sistemas de ecuaciones.

- **1. Elementos de una ecuación.**
- **2. Ecuaciones de primer grado.**
  - Sin paréntesis ni denominadores.
  - Con paréntesis.
  - Con denominadores.
- **3. Ecuaciones de segundo grado.**
- **4. Problemas con ecuaciones.**
- **5. Sistemas de ecuaciones.**

Elementos de una ecuación

- **Miembro:** Es cada una de las dos expresiones a los lados del signo $=$.
- **Términos:** Son los monomios y los números que aparecen en la ecuación.
- **Solución:** Es un valor de x que hace que la ecuación sea cierta.
  - Una ecuación puede no tener solución.
  - Una ecuación de primer grado tiene como máximo una solución.
  - Una ecuación de segundo grado puede tener dos soluciones.

¿Cómo resolver una ecuación?

Los términos de una ecuación pueden cambiarse de miembro. Para ello **pasarán realizando la operación contraria**.

- **1. Lo que suma, pasa restando:**

  $2x + 3 = 5 \quad \longrightarrow \quad 2x = 5 - 3$

- **2. Lo que resta, pasa sumando:**

  $7 - 3x = 2x \quad \longrightarrow \quad 7 = 2x + 3x$

- **3. Lo que multiplica, pasa dividiendo:**

  $5x = 7 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{7}{5}$

- **4. Lo que divide, pasa multiplicando:**

  $\frac{x}{4} = 7 \quad \longrightarrow \quad x = 7 \cdot 4$

Ecuaciones de 1º grado (sin paréntesis y sin denominadores)

$\boxed{3x - 7 = x + 3}$ (*Ejemplo 1*)

1. Mover los términos con x a un miembro y los números a otro. (*Recuerda que al cambiar un término de miembro pasa realizando la operación contraria*)

   $3x - x = 7 + 3$

2. Reducir (hacer cuentas de monomios semejantes).

   $2x = 10$

3. Despejar x

   $$\boxed{x = \frac{10}{2} = 5}$$

Ecuaciones de 1º grado (sin paréntesis y sin denominadores)

$\boxed{4x - 2x = 2x + 10 - 2x}$ (*Ejemplo 2*)

1. Mover los términos con x a un miembro y los números a otro. (*Recuerda que al cambiar un término de miembro pasa realizando la operación contraria*)

   $4x - 2x - 2x + 2x = 10$

2. Reducir (hacer cuentas de monomios semejantes).

   $2x = 10$

3. Despejar x

   $\boxed{x = 5}$

Ecuaciones de 1º grado (sin paréntesis y sin denominadores)

$\boxed{2x - 15 = 3x + 4}$ (*Ejemplo 3*)

1. Mover los términos con x a un miembro y los números a otro. (*Recuerda que al cambiar un término de miembro pasa realizando la operación contraria*)

   $-4 - 15 = 3x - 2x$

2. Reducir (hacer cuentas de monomios semejantes).

   $-19 = x$

3. Despejar x

   $\boxed{x = -19}$

Ejercicio: Resuelve las siguientes ecuaciones:

(a) $4x + 2 = 12x + 10$

(b) $2x + 5x = -12 + 3x$

(c) $11x = 6x + 15$

(d) $\dfrac{3x}{2} = 9$

(e) $5x - 1 = 6 - 2x$

Ecuaciones con paréntesis:

$\boxed{5 \cdot (x - 8) = 3 \cdot (x - 6)}$ (*Ejemplo 1*)

1. Eliminar los paréntesis (utilizando la propiedad distributiva).

   $5x - 40 = 3x - 18$

2. Mover los términos con incógnita a un miembro y los números a otro

   $5x - 3x = 40 - 18$

3. Reducir (operar los monomios semejantes).

   $2x = 22$

4. Despejar x

   $\boxed{x = 11}$

Ecuaciones con paréntesis:

$\boxed{2 \cdot (x+5) = 9x + 31}$ (*Ejemplo 2*)

1. Eliminar los paréntesis (utilizando la propiedad distributiva).

   $2x + 10 = 9x + 31$

2. Mover los términos con incógnita a un miembro y los números a otro

   $10 - 31 = 9x - 2x$

3. Reducir (operar los monomios semejantes).

   $-21 = 7x$

4. Despejar x

   $\boxed{x = -3}$

Ecuaciones con paréntesis:

$\boxed{(4+3x)\cdot(-7)+12=-8x}$ (*Ejemplo 3*)

1. Eliminar los paréntesis (utilizando la propiedad distributiva).

   $-28-21x+12=-8x$

2. Mover los términos con incógnita a un miembro y los números a otro

   $-28+12=21x-8x$

3. Reducir (operar los monomios semejantes).

   $-16=13x$

4. Despejar x

   $$\boxed{x=\frac{-16}{13}}$$

Ejercicio 1: Resuelve las siguientes ecuaciones:

(a) $-1 \cdot (x+3) = 2 \cdot (6+x)$ (b) $-5 \cdot (6-5x) = 5x - 10$

(c) $2 \cdot (x+2) - x = x + 4$ (d) $3 \cdot (2x-4) = x - 1$

(e) $6 \cdot (2-x) = 5 \cdot (2x-3)$ (f) $4 - 2x = 5 \cdot (x+2) - 6$

Ejercicio 2: Comprueba si $x = 5$ es solución de las siguientes ecuaciones:

(a) $2 \cdot (x-3) - x - 2 = 1$ (b) $3 \cdot (2x-6) = 7x - 23$

(c) $\dfrac{3x}{5} - 1 = 12 - 2x$ (d) $4x + 2 = 5x - 1$

Ecuaciones de 1º grado con denominadores:

$2 - \frac{x}{5} = x - 16$ (*Ejemplo 1*)

1. Calcular el mcm de los denominadores.
   $\mathrm{mcm}(5) = 5$

2. Reducimos todos los términos a común denominador. Eliminamos el denominador común.
   $$\frac{5 \cdot 2}{5} - \frac{x}{5} = \frac{5 \cdot x}{5} - \frac{5 \cdot 16}{5} \iff 10 - x = 5x - 80$$

3. Eliminar los paréntesis (utilizando la propiedad distributiva).

4. Mover los términos con incógnita a un miembro y los números a otro
   $10 + 80 = 5x + x$

5. Reducir (hacer cuentas de términos semejantes). $90 = 6x$

6. Despejar x $\boxed{x = \frac{90}{6} = 15}$

Ecuaciones de 1º grado con denominadores:

$\frac{2x}{3} - 4 = 6 - x$ (*Ejemplo 2*)

1. Calcular el mcm de los denominadores.
   $\text{mcm}(3) = 3$
2. Reducimos todos los términos a común denominador. Eliminamos el denominador común.
   $\frac{2x}{3} - \frac{3 \cdot 4}{3} = \frac{3 \cdot 6}{3} - \frac{3 \cdot x}{3} \iff 2x - 12 = 18 - 3x$
3. Eliminar los paréntesis (utilizando la propiedad distributiva).
4. Mover los términos con incógnita a un miembro y los números a otro
   $2x + 3x = 18 + 12$
5. Reducir (hacer cuentas de términos semejantes). $5x = 30$
6. Despejar x $\boxed{x = \frac{30}{5} = 6}$

Ecuaciones de 1º grado con denominadores:

$-4x - \frac{3}{2} = 5 + \frac{x}{4}$ (*Ejemplo 3*)

1. Calcular el mcm de los denominadores.
   $\text{mcm}(2,4) = 4$
2. Reducimos todos los términos a común denominador. Eliminamos el denominador común.
   $\frac{4 \cdot (-4x)}{4} - \frac{2 \cdot 3}{4} = \frac{4 \cdot 5}{4} + \frac{x}{4} \iff -16x - 6 = 20 + x$
3. Eliminar los paréntesis (utilizando la propiedad distributiva).
4. Mover los términos con incógnita a un miembro y los números a otro
   $-20 - 6 = 16x + x$
5. Reducir (hacer cuentas de términos semejantes). $-26 = 17x$
6. Despejar x
   $\boxed{\frac{-26}{17} = x}$

Ecuaciones de 1º grado con denominadores:

$x + \frac{4x-5}{3} = \frac{6x-7}{5} + 2$ (*Ejemplo 4*)

1. Calcular el mcm de los denominadores.
   $\text{mcm}(3,5) = 15$
2. Reducimos todos los términos a común denominador. Eliminamos el denominador común.
   $\frac{15 \cdot x}{15} + \frac{5 \cdot (4x-5)}{15} = \frac{3 \cdot (6x-7)}{15} + \frac{15 \cdot 2}{15} \Longleftrightarrow$
   $15x + 5 \cdot (4x-5) = 3 \cdot (6x-7) + 30$
3. Eliminar los paréntesis (utilizando la propiedad distributiva).
   $15x + 20x - 25 = 18x - 21 + 30$
4. Mover los términos con incógnita a un miembro y los números a otro
   $15x + 20x - 18x = 25 - 21 + 30$
5. Reducir (hacer cuentas de términos semejantes). $17x = 34$
6. Despejar x $\boxed{x = \frac{34}{17} = 2}$

Tema 4. Ecuaciones. Sistemas de ecuaciones.

- **1. Elementos de una ecuación.**
- **2. Ecuaciones de primer grado.**
    - Sin paréntesis ni denominadores.
    - Con paréntesis.
    - Con denominadores.
- **3. Ecuaciones de segundo grado.**

Ecuaciones de segundo grado

Son ecuaciones en las que en alguno de los términos tenemos la incógnita elevada al cuadrado (x^2). Su forma general es:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

$a =$ Es el número que multiplica a x^2

$b =$ Es el número que multiplica a x

$c =$ Es el término independiente

Ejercicio 1: Indica los coeficientes a , b y c de las siguientes ecuaciones de segundo grado:

(a) $x^2 - 3x + 5 = 0$

$a = 1 \qquad b = -3 \qquad c = 5$

(b) $3x^2 + 5x = 0$

$a = 3 \qquad b = 5 \qquad c = 0$

(c) $-x^2 - x - 1 = 0$

$a = -1 \qquad b = -1 \qquad c = -1$

(d) $4x^2 - 3 = 0$

$a = 4 \qquad b = 0 \qquad c = -3$

Ejercicio 2: Indica los coeficientes a , b y c de las siguientes ecuaciones de segundo grado:

(a) $-3x^2 + 6x = 0$

(b) $2x^2 + x + 6 = 0$

(c) $3x^2 - 1 = 0$

(d) $-5x^2 + 7x = 0$

(e) $x^2 - 5x + 8 = 0$

Ecuaciones de segundo grado

Para resolverlas, hay que aplicar la fórmula de las ecuaciones de segundo grado, que utiliza los coeficientes a , b y c:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a}}$$

- *Pueden tener dos soluciones*
- *Pueden tener una solución*
- *Pueden no tener solución*

Tema 4. Ecuaciones. Sistemas de ecuaciones.

- **1. Elementos de una ecuación.**
- **2. Ecuaciones de primer grado.**
  - Sin paréntesis ni denominadores.
  - Con paréntesis.
  - Con denominadores.
- **3. Ecuaciones de segundo grado.**
- **4. Problemas con ecuaciones.**

$\boxed{\textbf{Problemas con ecuaciones:}}$ Para resolver problemas con ecuaciones, no existe un método universal, pero sí una serie de pasos que es conveniente seguir:

1. Se le llama x a uno de los valores desconocidos
2. Se relacionan con x los otros valores desconocidos
3. Se convierte (traduce) el enunciado a una ecuación
4. Se resuelve la ecuación

Problema 1: *Teresa es siete años mayor que su hermano Antonio y dos años menor que su hermana Blanca. Calcula la edad de cada uno sabiendo que entre los tres suman 34 años.*

1. Se le llama x a uno de los valores desconocidos

   $x =$ Edad Teresa

2. Se relacionan con x los otros valores desconocidos

   $x - 7 =$ Edad Antonio $\qquad x + 2 =$ Edad Blanca

3. Se convierte (traduce) el enunciado a una ecuación

   Las tres edades sumadas dan 34 como resultado:

   $x + x - 7 + x + 2 = 34$

4. Se resuelve la ecuación

   $3x = 39 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 13$

   $\boxed{\text{Solución: Teresa tiene 13 años, Antonio tiene 6 años y Blanca tiene 15 años}}$

Problema 2: *Pablo pesa 7 kg menos que Federico. Federico pesa 5 kg más que Marta. Andrea pesa la mitad que Federico. Todos juntos pesan 177 kg. ¿Cuánto pesa cada uno?*

1. Se le llama x a uno de los valores desconocidos

   $x =$ Peso Federico

2. Se relacionan con x los otros valores desconocidos

   Peso Pablo $= x - 7$ Peso Marta $= x - 5$

   Peso Andrea $= \dfrac{x}{2}$

3. Se convierte (traduce) el enunciado a una ecuación

   $$x + (x - 7) + (x - 5) + \frac{x}{2} = 177$$

4. Se resuelve la ecuación

   Solución: Marta pesa 49 kg, Federico 54 kg, Pablo 47 kg, Andrea 27 kg

Problema 3: *Marco se gasta 130 euros en cuatro camisetas y dos pantalones. Si cada pantalón vale 20 euros más que una camiseta, ¿cuánto vale cada artículo?*

1. Se le llama x a uno de los valores desconocidos
   $x =$ Precio camiseta
2. Se relacionan con x los otros valores desconocidos
   $x + 20 =$ Precio pantalón
3. Se convierte (traduce) el enunciado a una ecuación
   $4x + 2 \cdot (x + 20) = 130$
4. Se resuelve la ecuación
   $4x + 2x + 40 = 130 \Longleftrightarrow 6x = 90$
   $x = 15$
   $\boxed{\text{Solución: Las camisetas valen 15 euros y los pantalones 35 euros}}$

Problema 4: *Un atleta de triatlon hace la mitad de un recorrido corriendo, una tercera parte en bicicleta, una doceava parte nadando y el último km lo hace caminando. ¿Qué distancia ha recorrido en total?*

1. Se le llama x a uno de los valores desconocidos

   $x =$ Distancia total

2. Se relacionan con x los otros valores desconocidos

3. Se convierte (traduce) el enunciado a una ecuación

   $$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{12} + 1 = x$$

4. Se resuelve la ecuación

   $6x + 4x + x + 12 = 12x$

   $12 = x$

   Solución: El recorrido tiene 12 km (6 km corriendo, 4 km en bici, 1 km nadand

Tema 4. Ecuaciones. Sistemas de ecuaciones.

- **1. Elementos de una ecuación.**
- **2. Ecuaciones de primer grado.**
  - Sin paréntesis ni denominadores.
  - Con paréntesis.
  - Con denominadores.
- **3. Ecuaciones de segundo grado.**
- **4. Problemas con ecuaciones.**
- **5. Sistemas de ecuaciones.**

¿Qué es una ecuación lineal?

- Las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas x e y reciben el nombre de **ecuaciones lineales**

  $x - 3y = 3$

- Una **solución** de una ecuación lineal es un par de valores para x e y que hacen cierta la igualdad

  $x = 3$, $y = 0$ es solución de $x - 3y = 3$

- Una ecuación lineal tiene **infinitas soluciones**

- Una ecuación lineal puede representarse como una **recta** (*cada punto de la recta es una solución*)

Sistemas de ecuaciones lineales

- Dos ecuaciones lineales forman un sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

- La **solución del sistema** son aquellos valores de x e y para los que se cumplen las ecuaciones del sistema.
  - *Puede tener infinitas soluciones*
  - *Puede tener una única solución* (mayoría de casos)
  - *Puede no tener solución*

- **Métodos de resolución** de sistemas de ecuaciones lineales:
  - *1. Método de sustitución*
  - *2. Método de reducción* (mayoría de casos)
  - *3. Método de igualación* (no lo veremos)

1. Método de sustitución

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

1. Método de sustitución (*Ejemplo 1*)

1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.

   $x - 2y = 0 \longrightarrow x = 2y$

2. Se sustituye la expresión obtenida en la otra ecuación. Se despeja la ecuación. (*tiene una sola incógnita*)

   $3x + y = 7 \longrightarrow 3 \cdot 2y + y = 7 \longrightarrow \boxed{y = 1}$

3. Se sustituye el valor obtenido en la ecuación de partida y se despeja la otra incógnita.

   $x = 2y \longrightarrow x = 2 \cdot 1 \longrightarrow \boxed{x = 2}$

$$\begin{cases} 3x - 4y = 9 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$$

1. Método de sustitución (*Ejemplo 2*)

1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.

   $2x + y = 6 \longrightarrow y = 6 - 2x$

2. Se sustituye la expresión obtenida en la otra ecuación. Se despeja la ecuación. (*tiene una sola incógnita*)

   $3x - 4y = 9 \longrightarrow 3x - 4 \cdot (6 - 2x) = 9 \longrightarrow 3x - 24 + 8x = 9 \longrightarrow \boxed{x = 3}$

3. Se sustituye el valor obtenido en la ecuación de partida y se despeja la otra incógnita.

   $y = 6 - 2x \longrightarrow y = 6 - 2 \cdot 3 \longrightarrow \boxed{y = 0}$

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - 3y = -14 \end{cases}$$

1. Método de sustitución (*Ejemplo 3*)

1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.

   $3x + y = 1 \longrightarrow y = 1 - 3x$

2. Se sustituye la expresión obtenida en la otra ecuación. Se despeja la ecuación. (*tiene una sola incógnita*)

   $2x - 3y = -14 \longrightarrow 2x - 3 \cdot (1 - 3x) = -14 \longrightarrow$
   $2x - 3 + 9x = -14 \longrightarrow \boxed{x = -1}$

3. Se sustituye el valor obtenido en la ecuación de partida y se despeja la otra incógnita.

   $y = 1 - 3x \longrightarrow y = 1 - 3 \cdot (-1) \longrightarrow \boxed{y = 4}$

2. Método de reducción

$$\begin{cases} x + 3y = 13 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{2. Método de reducción}}$ (Ejemplo 1)

1. Se multiplican las ecuaciones lineales por valores que hagan que la misma letra tenga coeficientes opuestos en las dos.

$$\begin{cases} (=) & x + 3y & = & 13 \\ (\times 3) & 6x - 3y & = & -6 \end{cases}$$

2. Sumamos las ecuaciones. Se despeja la ecuación resultante (*tiene una sola incógnita*)

$$7x = 7 \quad \longrightarrow \quad \boxed{x = 1}$$

3. Se sustituye el valor obtenido en una de las ecuaciones de partida y se despeja la otra incógnita.

$$1 + 3y = 13 \quad \longrightarrow \quad 3y = 13 - 1 \quad \longrightarrow \quad \boxed{y = 4}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

2. Método de reducción (Ejemplo 2)

1. Se multiplican las ecuaciones lineales por valores que hagan que la misma letra tenga coeficientes opuestos en las dos.

$$\begin{cases} (\times 2) & 2x + 4y & = & 10 \\ (=) & 3x - 4y & = & 0 \end{cases}$$

2. Sumamos las ecuaciones. Se despeja la ecuación resultante (*tiene una sola incógnita*)

$$5x = 10 \longrightarrow \boxed{x = 2}$$

3. Se sustituye el valor obtenido en una de las ecuaciones de partida y se despeja la otra incógnita.

$$2 + 2y = 5 \longrightarrow 2y = 5 - 2 \longrightarrow \boxed{y = \frac{3}{2}}$$

$$\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ 7x + 3y = 0 \end{cases}$$

2. Método de reducción (Ejemplo 3)

1. Se multiplican las ecuaciones lineales por valores que hagan que la misma letra tenga coeficientes opuestos en las dos.

$$\begin{cases} (\times 3) & 15x + 6y & = & 3 \\ (\times -2) & -14x - 6y & = & 0 \end{cases}$$

2. Sumamos las ecuaciones. Se despeja la ecuación resultante (*tiene una sola incógnita*)

$$\boxed{x = 3}$$

3. Se sustituye el valor obtenido en una de las ecuaciones de partida y se despeja la otra incógnita.

$$5 \cdot 3 + 2y = 1 \quad \longrightarrow \quad 2y = 1 - 15 \quad \longrightarrow \quad \boxed{y = -7}$$

$$\begin{cases} 7x - 3y = 23 \\ -2x - 4y = 8 \end{cases}$$

2. Método de reducción (Ejemplo 4)

1. Se multiplican las ecuaciones lineales por valores que hagan que la misma letra tenga coeficientes opuestos en las dos.

$$\begin{cases} (\times 4) & 28x - 12y & = & 92 \\ (\times -3) & 6x + 12y & = & -24 \end{cases}$$

2. Sumamos las ecuaciones. Se despeja la ecuación resultante (*tiene una sola incógnita*)

$$34x = 68 \quad \longrightarrow \quad \boxed{x = 2}$$

3. Se sustituye el valor obtenido en una de las ecuaciones de partida y se despeja la otra incógnita.

$$7 \cdot 2 - 3y = 23 \quad \longrightarrow \quad -3y = 23 - 14 \quad \longrightarrow \quad \boxed{y = -3}$$