

Tema 3: Polinomios y Fracciones Algebraicas

- 1 Polinomios. Suma, resta y multiplicación de polinomios.
- 2 Extraer factor común en polinomios
- 3 Igualdades notables
- 4 División de polinomios
 - *Método general*
 - *Regla de Ruffini*
- 5 Raíces de un polinomio
- 6 Factorización de un polinomio
- 7 Fracciones algebraicas

Un **monomio** es el producto de un número (**coeficiente**) por unos valores desconocidos representados con letras (**parte literal**).

El **grado** de un monomio es la suma de los exponentes de la parte literal.

El **valor numérico** de un monomio es su valor cuando las letras toman valores concretos.

Se dice que dos **monomios son semejantes** cuando sus partes literales sean iguales (**exponentes incluidos**).

$3x$, $4x^3$	No son semejantes	$5xy^2$, $3x^2y$	No son semejantes
$2y^2$, $-\frac{1}{3}y^2$	Son semejantes	xyz , zxy	Semejantes

Un **polinomio** es la suma de dos o más monomios. El **grado** de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo componen.

El **valor numérico** de un polinomio es el resultado que da cuando se sustituyen las letras por unos valores determinados.

$$5x^3 - 2xy^2 - x^2y$$

$$\text{Para } x = 1, y = -1 \longrightarrow 5 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1 \cdot (-1)^2 - 1^2 \cdot (-1) = 5 - 2 + 1 = 4$$

$$\text{Para } x = 0, y = 3 \longrightarrow 5 \cdot 0^3 - 2 \cdot 0 \cdot 3^2 - 0^2 \cdot 3 = 0$$

Se llama **fracción algebraica** al cociente de dos polinomios.

Ejercicio 1: La base de un ortoedro es un cuadrado de lado x . Su altura es y .
Expresa mediante un polinomio.

(a) El área de la base.

$$x^2$$

(b) El área de una cara lateral.

$$xy$$

(c) El perímetro de la base.

$$4x$$

(d) El volumen

$$x^2y$$

Ejercicio 2: Expresa mediante un polinomio cada uno de estos enunciados:

(a) La suma de un número más su cubo.

$$x + x^3$$

(b) La suma de dos números naturales consecutivos.

$$x + (x + 1)$$

(c) El perímetro de un triángulo isósceles (*llama x al lado desigual e y a los otros dos lados*).

$$x + 2y$$

(d) El área total de un cilindro de 4 m de altura en función del radio de la base r .

$$4\pi \cdot r^2$$

(e) El área total de un ortoedro cuya base es un cuadrado de lado l y cuya altura es 5 metros.

$$5l^2$$

Suma y resta de polinomios

- Para sumar dos polinomios, se suman los términos semejantes.
- Para restar dos polinomios, se suma el minuendo con el opuesto del sustraendo.

$$\bullet (3x^2 + 5x - 2) + (-4x^3 - 3x + 5) = -4x^3 + 3x^2 + 2x + 3$$

$$\bullet (2x^3 - 3x + 1) - (5x^3 - 2x^2 - 3) =$$

$$2x^3 - 3x + 1 - 5x^3 + 2x^2 + 3 =$$

$$-3x^3 + 2x^2 - 3x + 4$$

$$\bullet (6x^2 - 12xy + y) - (5y + 10xy - 2x^2) =$$

$$6x^2 - 12xy + y - 5y - 10xy + 2x^2 =$$

$$8x^2 - 22xy - 4y$$

Producto de un polinomio por un monomio

Se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

$$\bullet (-x^3) \cdot (2x^2 - 5x - 1) = -2x^5 + 5x^4 + x^3$$

$$\bullet (2x^2 - y^3 + 4xy) \cdot (-4xy) = -8x^3y + 4xy^4 - 16x^2y^2$$

$$\bullet 6a \cdot (ab^2 - 2ab + 5a^3 - b) = 6a^2b^2 - 12a^2b + 30a^4 - 6ab$$

Producto de dos polinomios

Para **multiplicar dos polinomios**:

- 1 Se multiplica cada monomio de uno de los polinomios por todos los monomios del otro polinomio.
- 2 Se suman los monomios semejantes obtenidos.

$$\bullet (2xy^2 - 3x) \cdot (2x - x^5) = 4x^2y^2 - 2x^6y^2 - 6x^2 + 3x^6$$

$$\bullet (x^3 - 2x^2 + 3x - 4) \cdot (3x^2 - 2x + 1) =$$
$$3x^5 - 2x^4 + x^3 - 6x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 9x^3 - 6x^2 + 3x - 12x^2 + 8x - 4 =$$
$$3x^5 - 8x^4 + 14x^3 - 20x^2 + 11x - 4$$

Tema 3: Polinomios y Fracciones Algebraicas

- 1 Polinomios. Suma, resta y multiplicación de polinomios.
- 2 Extraer factor común en polinomios

Extraer factor común de un polinomio

$$6x^4 - 24x^3 + 12x^2$$

(Ejemplo 1)

- 1 Si hay letras que se repiten en todos los términos, tomamos las que hay con el menor exponente que tengan.

$$x^2$$

- 2 Hallamos el mcd de los coeficientes de los términos.

$$6$$

- 3 El factor común son las letras y números obtenidos. Multiplica a los términos restantes.

$$6x^2 \cdot (x^2 - 4x + 2)$$

Extraer factor común de un polinomio

$$6x^2y^2 - 3xy^2 + 30x^2y$$

(Ejemplo 2)

- 1 Si hay letras que se repiten en todos los términos, tomamos las que hay con el menor exponente que tengan.

xy

- 2 Hallamos el mcd de los coeficientes de los términos.

3

- 3 El factor común son las letras y números obtenidos. Multiplica a los términos restantes.

$$3xy \cdot (2xy - y + 10x)$$

Extraer factor común de un polinomio

$$4xy - 6xy^2 + 8z$$

(Ejemplo 3)

- 1 Si hay letras que se repiten en todos los términos, tomamos las que hay con el menor exponente que tengan.

No hay

- 2 Hallamos el mcd de los coeficientes de los términos.

2

- 3 El factor común son las letras y números obtenidos. Multiplica a los términos restantes.

$$2 \cdot (2xy - 3xy^2 + 4z)$$

Ejercicio 1: Extrae factor común:

(a) $3x + 6xy - 27xz^2$

(b) $5x^3z^2 - 5xyz + 100x^2yz$

(c) $4b^2c + 8bc - 32a^2b$

(d) $9abc + 6ab - 12b^2c$

Ejercicio 2: Calcula el valor numérico del polinomio $2x^3 - x^2 - 6x$ para $x = -1$

Ejercicio 3: Halla a si el valor numérico del siguiente polinomio en $x = 2$ es 7

$$x^3 - (x^2 - ax) + a$$

Tema 3: Polinomios y Fracciones Algebraicas

- 1 Polinomios. Suma, resta y multiplicación de polinomios.
- 2 Extraer factor común en polinomios
- 3 Igualdades notables

Igualdades Notables

1. Cuadrado de una suma

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

2. Cuadrado de una diferencia

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

3. Suma por diferencia

$$(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$$

Igualdades Notables

1. Cuadrado de una suma

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(5y + 2)^2 = 25y^2 + 20y + 4$$

$$(xy + z)^2 = x^2y^2 + 2xyz + z^2$$

También hay que saber reconocerlas...

$$4 + 4x + x^2 = (2 + x)^2$$

$$9x^2y^2 + 6xyz + z^2 = (3xy + z)^2$$

Igualdades Notables

2. Cuadrado de una diferencia

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(3 - 8x)^2 = 9 - 48x + 64x^2$$

$$(5z - x)^2 = 25z^2 - 10xz + x^2$$

También hay que saber reconocerlas...

$$9a^2 - 6a + 1 = (3a - 1)^2$$

$$16x^2 - 8xz + z^2 = (4x - z)^2$$

Igualdades Notables

3. Suma por diferencia

$$(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$$

$$(2x + 3y) \cdot (2x - 3y) = 4x^2 - 9y^2$$

$$(a^2 - 4) \cdot (a^2 + 4) = a^4 - 16$$

También hay que saber reconocerlas...

$$25x^2 - y^2 = (5x + y) \cdot (5x - y)$$

$$x^6 - 36 = (x^3 + 6) \cdot (x^3 - 6)$$

Tema 3: Polinomios y Fracciones Algebraicas

- 1 Polinomios. Suma, resta y multiplicación de polinomios.
- 2 Extraer factor común en polinomios
- 3 Igualdades notables
- 4 División de polinomios
 - *Método general*
 - *Regla de Ruffini*

Regla de Ruffini: es una forma de dividir polinomios que sólo puede utilizarse cuando el divisor es del tipo $(x - a)$.

- 1 Escribimos los coeficientes de los términos, de mayor a menor grado, **incluyendo con ceros los que no están.**
- 2 Colocamos a la izquierda el término independiente del divisor **CAMBIADO DE SIGNO**, y bajamos el primer coeficiente del dividendo.
- 3 Multiplicamos el primer coeficiente del dividendo por el término independiente del divisor, y se lo sumamos al siguiente coeficiente, bajando el resultado.
- 4 Repetimos el proceso hasta llegar al último coeficiente.
- 5 El último número a la derecha es el resto. Los coeficientes a la izquierda son el cociente, de mayor a menor grado..

Resuelve las siguientes divisiones mediante la regla de Ruffini:

Ejemplo 1: $(x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 5) : (x - 2)$

Ejemplo 2: $(x^3 - 5x + 12) : (x + 3)$

Valor de un polinomio para $x = a$

El valor de un polinomio para $x = a$ coincide con el resto al dividirlo por $(x - a)$ (ya sea por Ruffini o por el método tradicional)

División de polinomios:

- 1 Dividimos el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor.
- 2 Multiplicamos el resultado obtenido en 1. por el divisor. Colocamos el resultado obtenido debajo del dividendo.
- 3 Restamos al dividendo el resultado obtenido en 2. El resultado será el resto (nuevo dividendo).
- 4 Repetimos los pasos 1-3 **hasta que el resto obtenido tenga menor grado que el divisor.**

División de polinomios:

$$(x^5 + 2x^3 - x - 8) : (x^2 - 2x + 1)$$

(Ejemplo 1)

- 1 Dividimos el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor.

$$x^5 : x^2 = x^3$$

- 2 Multiplicamos el resultado obtenido en 1. por el divisor. Colocamos el resultado obtenido debajo del dividendo.

$$x^3 \cdot (x^2 - 2x + 1) = x^5 - 2x^4 + x^3$$

- 3 Restamos al dividendo el resultado obtenido en 2. El resultado será el resto (nuevo dividendo).

$$(x^5 + 2x^3 - x - 8) - (x^5 - 2x^4 + x^3) = 2x^4 + x^3 - x - 8$$

- 4 Repetimos los pasos 1-3 **hasta que el resto obtenido tenga menor grado que el divisor.**

División de polinomios:

$$(x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 6) : (x^2 - 3x + 3)$$

(Ejemplo 2)

- 1 Dividimos el término de mayor grado del dividendo entre el término de mayor grado del divisor.

$$x^4 : x^2 = x^2$$

- 2 Multiplicamos el resultado obtenido en 1. por el divisor. Colocamos el resultado obtenido debajo del dividendo.

$$x^2 \cdot (x^2 - 3x + 3) = x^4 - 3x^3 + 3x^2$$

- 3 Restamos al dividendo el resultado obtenido en 2. El resultado será el resto (nuevo dividendo).

$$(x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 12x + 6) - (x^4 - 3x^3 + 3x^2) = -2x^3 + 8x^2 - 12x + 6$$

- 4 Repetimos los pasos 1-3 **hasta que el resto obtenido tenga menor grado que el divisor.**

Tema 3: Polinomios y Fracciones Algebraicas

- 1 Polinomios. Suma, resta y multiplicación de polinomios.
- 2 Extraer factor común en polinomios
- 3 Igualdades notables
- 4 División de polinomios
 - *Método general*
 - *Regla de Ruffini*
- 5 Raíces de un polinomio

Raíces de un polinomio: Un número a es una raíz (solución) del polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$ (si el valor del polinomio para $x = a$ es cero).

$x = 2$ y $x = 5$ son soluciones del polinomio $P(x) = x^2 - 7x + 10$ ya que...

$$x = 2 \longrightarrow P(2) = 2^2 - 7 \cdot 2 + 10 = 4 - 14 + 10 = 0$$

$$x = 5 \longrightarrow P(5) = 5^2 - 7 \cdot 5 + 10 = 25 - 35 + 10 = 0$$

Raíces de un polinomio: Un número a es una raíz (solución) del polinomio $P(x)$ si $P(a) = 0$ (si el valor del polinomio para $x = a$ es cero).

$x = 1$ y $x = 3$ **NO** son soluciones del polinomio
 $P(x) = x^2 - 7x + 10$ ya que...

$$x = 1 \longrightarrow P(1) = 1^2 - 7 \cdot 1 + 10 = 1 - 7 + 10 = 4 \neq 0$$

$$x = 3 \longrightarrow P(3) = 3^2 - 7 \cdot 3 + 10 = 9 - 21 + 10 = -2 \neq 0$$

¿Cómo obtener las raíces enteras de un polinomio?

Propiedades de las raíces de un polinomio:

- 1 Si el polinomio es divisible entre $(x - a)$ (*Ruffini con resto = 0*) entonces a es raíz del polinomio.
- 2 **Para que un número entero sea raíz del polinomio es necesario que sea divisor de su término independiente.**
- 3 El número de raíces de un polinomio es menor o igual que su grado.

Ejemplos (1): Calcula las raíces de:

(a) $x^3 - 8x^2 + 5x + 14$

(b) $x^3 - 2x^2 + x - 12$

¿Cómo obtener las raíces enteras de un polinomio?

Trucos útiles:

- 1 Si los coeficientes del polinomio suman cero, $x = 1$ es raíz del polinomio.
- 2 Si todos los coeficientes del polinomio son positivos, el polinomio sólo puede tener raíces negativas.
- 3 Una vez he encontrado una raíz, me basta buscar las otras raíces en el polinomio que queda en el cociente por Ruffini

Ejemplos (2): Calcula las raíces de:

(a) $3x^3 - 7x^2 + 9x - 5$

(b) $x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 9x + 9$

Pasos para obtener las raíces de un polinomio

- 1 Las posibles raíces son los divisores (positivos y negativos) del término independiente
- 2 Probamos si cada una de ellas es raíz, utilizando Ruffini. (o bien calculando el valor numérico del polinomio para ese valor y viendo si da cero)
- 3 Si se utiliza Ruffini, se sigue buscando raíces en el polinomio del cociente
- 4 Para obtener las raíces de un polinomio de grado dos, basta resolver la ecuación de segundo grado resultante de igualar el polinomio a cero

Ejemplos (3): Calcula las raíces de:

(a) $x^4 - 6x^2 + 5$

(b) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$

Ejercicio: Calcula las raíces de los siguientes polinomios y **factorízalos**:

(a) $x^3 - 3x^2 + 2$

(b) $x^2 - 2x + 1$

(c) $x^3 - 2x^2 - 5x - 6$

(d) $x^2 - 5x - 14$

Ejercicio: Calcula las raíces de los siguientes polinomios y **factorízalos**:

(a) $x^3 - 3x^2 + 2$ $1, 1 + \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3}$

(b) $x^2 - 2x + 1$ 1 (doble)

(c) $x^3 - 2x^2 - 5x - 6$ No tiene raíces enteras

(d) $x^2 - 5x - 14$ 7 y -2

Ejercicio: Calcula las raíces de los siguientes polinomios y **factorízalos**:

(a) $x^3 - 3x^2 + 2$ 1, $1 + \sqrt{3}$, $1 - \sqrt{3}$

$$(x - 1) \cdot (x - (1 + \sqrt{3})) \cdot (x - (1 - \sqrt{3}))$$

(b) $x^2 - 2x + 1$ 1 (doble)

$$(x - 1)^2$$

(c) $x^3 - 2x^2 - 5x - 6$ No tiene raíces enteras

Las raíces no son enteras

(d) $x^2 - 5x - 14$ 7 y -2

$$(x - 7) \cdot (x + 2)$$

Ejercicio 2: Escribe un polinomio cuyas raíces sean:

(a) $x = 1$, $x = 3$

El polinomio más simple con raíz $x = 1$ sería:

$$x - 1$$

El polinomio más simple con raíz $x = 3$ sería:

$$x - 3$$

Por lo tanto, el polinomio más simple con raíces $x = 1$, $x = 3$ sería:

$$(x - 1) \cdot (x - 3) = \boxed{x^2 - 4x + 3}$$

Ejercicio 2: Escribe un polinomio cuyas raíces sean:

(b) $x = -2$, $x = -1$, $x = 4$

Utilizando la misma lógica que antes, el polinomio más simple con estas raíces sería:

$$(x + 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 4)$$

Haciendo las cuentas, este polinomio queda como:

$$x^3 - x^2 - 10x - 8$$

Ejercicio 3: Encuentra un polinomio que cumpla:

Es de grado 2 y su única raíz es $x = -2$

El polinomio más simple con raíz $x = -2$ sería:

$$(x + 2)$$

El problema de este polinomio es que es de grado 1

Para que sea de grado 2, tan simple como elevarlo al cuadrado

$$(x + 2)^2 = \boxed{x^2 + 4x + 4}$$

Tema 3: Polinomios y Fracciones Algebraicas

- 1 Polinomios. Suma, resta y multiplicación de polinomios.
- 2 Extraer factor común en polinomios
- 3 Igualdades notables
- 4 División de polinomios
 - *Método general*
 - *Regla de Ruffini*
- 5 Raíces de un polinomio
- 6 Factorización de un polinomio

Factorizar un polinomio es descomponerlo en producto de polinomios del menor grado posible.

- 1 Se saca factor **común** (*si se puede*).
- 2 Se buscan las **raíces del polinomio**. Cada raíz a de un polinomio da lugar a un factor del tipo $(x - a)$.
Mientras el polinomio es de grado 3 o mayor se utiliza Ruffini o el valor de un polinomio como método para buscar raíces.
- 3 Cuando el polinomio sea de grado 2, se utilizan las **igualdades notables** o se hallan las raíces mediante la fórmula de las ecuaciones de 2º grado.

Factorizar un polinomio

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \text{ (Ejemplo 1)}$$

- 1 Se saca factor **común** (si se puede)

No hay factor común

- 2 Se buscan las **raíces del polinomio**. Cada raíz a de un polinomio da lugar a un factor del tipo $(x - a)$

Mientras el polinomio es de grado 3 o mayor se utiliza Ruffini o el valor de un polinomio como método para buscar raíces.

Por Ruffini, obtenemos $x = 1$ como raíz. Nos queda el polinomio $x^2 - x - 6$

- 3 Cuando el polinomio sea de grado 2, se utilizan las **igualdades notables** o se hallan las raíces mediante la fórmula de las ecuaciones de 2º grado

Resolvemos la ecuación de 2º grado $x^2 - x - 6 = 0$ y obtenemos las raíces $x = -2$ y $x = 3$

Factorizando nos queda $(x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 3)$

Factorizar un polinomio

$$x^4 - 9x^3 + 21x^2 - 35x + 150 \text{ (Ejemplo 2)}$$

$x^4 - x^3 - 30x^2 - 76x - 56$

Div (56) = {1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56, -1, -2, -4, ...}

1	-1	-30	-76	-56	
-2	-2	6	48	56	
1	-3	-24	-28	0	
-2	-2	10	28		
1	-5	-14	0		

No suman cero

$x=2$ raíz doble

$x=-2$ raíz triple
 $x=7$ raíz simple

Factorización
 $(x+2)^3 \cdot (x-7)$

$x^2 - 5x - 14 = 0$ ← Ecuación 2º grado

Buscamos más raíces con la fórmula:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot (-14)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{5 \pm 9}{2}$$

$x=7$
 $x=-2$

Factorizar un polinomio

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3 \text{ (Ejemplo 3)}$$

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3$$

$$\text{Div}(3) = \{1, 3, -1, -3\}$$

	1	2	4	2	3
-1		-1	-1	-3	1
	1	1	3	-1	4

	1	2	4	2	3
-3		-3	3	-21	57
	1	-1	7	-19	60

Ninguna es raíz

solo pueden ser negativos

NO PUEDE FACTORIZARSE

Factorizar un polinomio

$$x^4 - x^3 - 30x^2 - 76x - 56 \text{ (Ejemplo 4)}$$

$$x^4 - 9x^3 + 21x^2 - 35x + 150$$

	1	-9	21	-35	150	←
5		5	-20	5	-150	
	1	-4	1	-30	0	
5		5	5	30		
	1	1	6	0		

$$x^2 + x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-23}}{2} \leftarrow \text{No tiene solución}$$

$$\text{Div}(150) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150, -1, -2, \dots\}$$

No suman cero

$$x = 5 \text{ (Raíz doble y única)}$$

$$\text{Factorización} \\ (x-5)^2 \cdot (x^2+x+6)$$

Ejercicio 1: Descompón en factores sacando factor común y utilizando los productos notables.

$$(a) x^3 + 6x^2 + 9x$$

Sacamos factor común:

$$x \cdot (x^2 + 6x + 9)$$

Aplicamos las igualdades notables:

$$x \cdot (x + 3)^2$$

Ejercicio 1: Descompón en factores sacando factor común y utilizando los productos notables.

$$(b) 2x^3 - 4x^2 + 2x$$

Sacamos factor común:

$$2x \cdot (x^2 - 2x + 1)$$

Aplicamos los productos notables:

$$2x \cdot (x - 1)^2$$

Ejercicio 1: Descompón en factores sacando factor común y utilizando los productos notables.

$$(c) 8x^5 - 24x^4 + 18x^3$$

Sacamos factor común:

$$2x^3 \cdot (4x^2 - 12x + 9)$$

Aplicamos las igualdades notables:

$$2x^3 \cdot (2x - 3)^2$$

Igualdades notables:

1 Cuadrado de una suma

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2 Cuadrado de una diferencia

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3 Suma por diferencia

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Ejercicio 1: Factoriza los siguientes polinomios:

(a) $-x^3 + x^2 - 9x + 9$

(b) $x^4 - 4x^3 - x^2 + 6x + 18$

(c) $x^4 + 17x^3 + 101x^2 + 247x + 210$

Ejercicio 2: Realiza la siguiente división de polinomios:

$(4x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 7x + 10) : (x^2 - 2x + 5) =$

Ejercicio 3: Realiza las siguientes operaciones combinadas:

(a) $(2x^3 - 15x - 9) : (x - 3) - (x - 4) \cdot (x - 5) - 6x =$

(b) $(x^2 - 2x - 3) \cdot (x + 5) - (x + 3)^2 \cdot (2x - 1) =$

Tema 3: Polinomios y Fracciones Algebraicas

- 1 Polinomios. Suma, resta y multiplicación de polinomios.
- 2 Extraer factor común en polinomios
- 3 Igualdades notables
- 4 División de polinomios
 - *Método general*
 - *Regla de Ruffini*
- 5 Raíces de un polinomio
- 6 Factorización de un polinomio
- 7 Fracciones algebraicas

Fracciones algebraicas

Una **fracción algebraica** es una fracción que tiene por denominador un polinomio.

$$\frac{-7}{x^2 + 3}$$

$$\frac{2x^2 + x + 6}{x - 4}$$

$$\frac{7x - 5}{3x + 2}$$

Dos fracciones algebraicas son **equivalentes** cuando los productos cruzados son iguales:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{R(x)}$$

\iff

$$P(x) \cdot R(x) = Q(x) \cdot S(x)$$

Simplificación de fracciones algebraicas

Para simplificar una fracción algebraica:

- Factorizamos los polinomios de numerador y denominador
- Eliminamos los factores comunes

Ejemplo 1

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x + 1)^2}{(x + 1) \cdot (x - 1)} = \frac{x + 1}{x - 1}$$

Ejemplo 2

$$\frac{x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x}{x^4 - 3x^3 + 2x^2} = \frac{x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)}{x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)} = \frac{x - 3}{x}$$

Multiplicación de fracciones algebraicas

Para multiplicar dos fracciones algebraicas:

- El numerador es el producto de los numeradores
- El denominador es el producto de los denominadores

Ejemplo 1

$$\frac{4}{x+1} \cdot \frac{x-1}{x+2} = \frac{4 \cdot (x-1)}{(x+1) \cdot (x+2)} = \frac{4x-4}{x^2+3x+2}$$

Ejemplo 2

$$\frac{x-5}{2x^2+x-3} \cdot \frac{x^2-1}{3x^2} = \frac{(x-5) \cdot (x^2-1)}{(2x^2+x-3) \cdot 3x^2} = \frac{x^3-5x^2-x+5}{6x^4+3x^3-9x^2}$$

División de fracciones algebraicas

Para dividir dos fracciones algebraicas:

- El numerador es el producto de numerador \times denominador
- El denominador es el producto de numerador \times denominador

Ejemplo 1

$$\frac{x}{2x^2 + x - 1} : \frac{x^2}{2x - 1} = \frac{x \cdot (2x - 1)}{(2x^2 + x - 1) \cdot x^2} = \frac{2x - 1}{2x^3 + x^2 - x}$$

Ejemplo 2

$$\frac{-3}{x - 1} : \frac{x - 3}{x} = \frac{-3x}{(x - 1) \cdot (x - 3)} = \frac{-3x}{x^2 - 4x + 3}$$

Ejercicio 1: Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

$$(a) \frac{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}{x^4 + 2x^3 - 2x - 1}$$

$$(b) \frac{x^4 + 4x^3 + 3x^2}{x^3 - 4x^2 - 21x}$$

$$(c) \frac{x^4 + 4x^3 - 13x^2 - 28x + 60}{x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 11x - 6}$$

$$(d) \frac{20x^4 - 77x^3 + 46x^2 + 17x - 6}{4x^3 - 17x^2 + 16x - 3}$$

$$(e) \frac{5x^4 - 7x^3 - 58x^2 + 24x}{x^2 - x - 12}$$

$$(f) \frac{x^4 - 9x^3 + x^2 + 81x + 70}{x^3 - 2x^2 - 13x - 10}$$