Tema 4: Ecuaciones e Inecuaciones

1. **Repaso: Ecuaciones de 1º y 2º grado**
2. **Problemas con ecuaciones de 1º y 2º grado**
3. **Ecuaciones bicuadradas**
4. **Ecuaciones radicales**
5. **Ecuaciones factorizadas**
6. **Ecuaciones racionales** ***(con x en el denominador)***
7. **Inecuaciones**
    - De primer grado
    - De segundo grado

Ecuaciones 1º grado:

Ejemplo 1: $3 \cdot (x - 5) + 21 = (4 - x) \cdot 7 - 2$

1. Calcular el mcm de los denominadores.
2. Multiplicar **todos** los términos por el mcm obtenido.
3. Eliminar los paréntesis (utilizando la propiedad distributiva).

   $3x - 15 + 21 = 28 - 7x - 2$

4. Mover los términos con incógnita a un miembro (*e.g.* $3x$) y los números a otro (*e.g. 7*).

   $3x + 7x = 28 - 2 + 15 - 21$

5. Reducir (hacer cuentas de términos semejantes).

   $10x = 20$

6. Despejar x

   $$\boxed{x = \frac{20}{10} = 2}$$

Ecuaciones 1º grado: $\frac{x-2}{5} - \frac{10-x}{3} = x - 7$ (*Ejemplo 2*)

1. Calcular el mcm de los denominadores.

   $\text{mcm}(3,5) = 15$

2. Multiplicar **todos** los términos por el mcm obtenido.

   $$15 \cdot \frac{x-2}{5} - 15 \cdot \frac{10-x}{3} = 15x - 15 \cdot 7$$

   $$3 \cdot (x-2) - 5 \cdot (10-x) = 15x - 105$$

3. Eliminar los paréntesis (utilizando la propiedad distributiva).

   $3x - 6 - 50 + 5x = 15x - 105$

4. Mover los términos con incógnita a un miembro (*e.g.* $3x$) y los números a otro (*e.g. 7*).

   $3x + 5x - 15x = 50 + 6 - 105$

5. Reducir (hacer cuentas de términos semejantes). $-7x = 49$

6. Despejar x $\boxed{x = \frac{49}{-7} = -7}$

Ecuaciones de 1º grado: $2x - \frac{x}{3} = \frac{3x+1}{5} - 1$ (*Ejemplo 3*)

1. Calcular el mcm de los denominadores.

   $\text{mcm}(3,5) = 15$

2. Multiplicar **todos** los términos por el mcm obtenido.

   $15 \cdot 2x - 15 \cdot \frac{x}{3} = 15 \cdot \frac{3x+1}{5} - 15 \cdot 1 \Longleftrightarrow 30x - 5 \cdot x = 3 \cdot (3x+1) - 15$

3. Eliminar los paréntesis (utilizando la propiedad distributiva).

   $30x - 5x = 9x + 3 - 15$

4. Mover los términos con incógnita a un miembro (*e.g.* $3x$) y los números a otro (*e.g.* *7*).

   $30x - 5x - 9x = 3 - 15$

5. Reducir (hacer cuentas de términos semejantes).

   $16x = -12$

6. Despejar x

   $$\boxed{x = \frac{-12}{16} = \frac{-3}{4}}$$

Ecuaciones de 2º Grado (Tipos)

Forma General $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$

Tipo 1: $\boxed{x^2 = k}$

Tipo 2: $\boxed{ax^2 + c = 0}$

Tipo 3: $\boxed{ax^2 + bx = 0}$

Tipo 4: $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$

Tipo 1: $\boxed{x^2 = k}$

$$\text{Soluciones: } \begin{cases} x = \sqrt{k} \\ x = -\sqrt{k} \end{cases}$$

¡¡No tiene solución si k es negativo!! (porque no se puede calcular la raíz cuadrada de un número negativo)

Tipo 1: $\boxed{x^2 = k}$

Ejemplo 1: $x^2 = 25 \longrightarrow \boxed{x = \pm 5}$

Ejemplo 2: $x^2 = -16 \longrightarrow \boxed{\text{No tiene solución}}$

Ejemplo 3: $x^2 = 13 \longrightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{13}}$

Tipo 2: $\boxed{ax^2 + c = 0}$

$\iff ax^2 = -c \iff x^2 = -\dfrac{c}{a}$

$$\text{Soluciones: } \begin{cases} x = \sqrt{-\dfrac{c}{a}} \\ x = -\sqrt{-\dfrac{c}{a}} \end{cases}$$

¡¡No tiene solución si $-\dfrac{c}{a}$ es negativo!! (porque no se puede calcular la raíz cuadrada de un número negativo)

Tipo 2: $\boxed{ax^2 + c = 0}$

Ejemplo 1: $9x^2 - 1 = 0 \longrightarrow 9x^2 = 1$

$$x^2 = \frac{1}{9} \longrightarrow \boxed{x = \pm\frac{1}{3}}$$

Ejemplo 2: $5x^2 + 4 = 0 \longrightarrow 5x^2 = -4$

$$x^2 = \frac{-4}{5} \longrightarrow \boxed{\text{No tiene solución}}$$

Ejemplo 3: $4x^2 + x = x + 49 \longrightarrow 4x^2 = 49$

$$x^2 = \frac{49}{4} \longrightarrow \boxed{x = \pm\frac{7}{2}}$$

Tipo 3: $\boxed{ax^2 + bx = 0}$

$\Longleftrightarrow x \cdot (ax + b) = 0$

$$\text{Soluciones:} \begin{cases} x = 0 \\ \\ ax + b = 0 \Longleftrightarrow ax = -b \Longleftrightarrow x = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

Este tipo de ecuación siempre tiene dos soluciones, y una de ellas siempre es $x = 0$.

Tipo 3: $\boxed{ax^2 + bx = 0}$

Ejemplo 1: $x^2 + 5x = 0 \longrightarrow x \cdot (x - 5) = 0$

$\boxed{x = 0 \text{ y } x = 5}$

Ejemplo 2: $6x - 5x^2 = 0 \longrightarrow x \cdot (6 - 5x) = 0$

$x = 0 \text{ ó } 6 - 5x = 0 \longrightarrow \boxed{x = 0 \text{ y } x = \frac{6}{5}}$

Ejemplo 3: $x^2 - x + 3 = 4x^2 + 3 \longrightarrow 0 = 3x^2 + x$

$0 = x \cdot (3x + 1) \longrightarrow x = 0 \text{ ó } 3x + 1 = 0 \longrightarrow \boxed{x = 0 \text{ ó } x = \frac{-1}{3}}$

Tipo 4: $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$

Para resolver estas ecuaciones se emplea una fórmula que nos da las dos soluciones:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$\begin{cases} \text{Solución 1: } x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\[2ex] \text{Solución 2: } x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{cases}$$

No tiene solución cuando $b^2 - 4ac < 0$.

Tiene 1 solución cuando $b^2 - 4ac = 0$.

Tiene 2 soluciones cuando $b^2 - 4ac > 0$.

Tipo 4: $\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$ $\boxed{x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$

Ejemplo 1: $x^2 + x - 6 = 0$ $a = 1$, $b = 1$, $c = -6$

Aplicamos la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

$$\begin{cases} \text{Solución 1: } x = \dfrac{-1+5}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ \text{Solución 2: } x = \dfrac{-1-5}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

Tema 4: Ecuaciones e Inecuaciones

1. Repaso: Ecuaciones de 1º y 2º grado

2. **Problemas con ecuaciones de 1º y 2º grado**

$\boxed{\textbf{Problemas con ecuaciones:}}$ Para resolver problemas con ecuaciones, no existe un método universal, pero sí una serie de pasos que es conveniente seguir:

1. Se le llama x a uno de los valores desconocidos
2. Se relacionan con x los otros valores desconocidos
3. Se convierte (traduce) el enunciado a una ecuación
4. Se resuelve la ecuación

Problema 1: Si al doble de un número le sumamos la cuarta parte de dicho número, el resultado es 189. ¿Cuál es el número?

Llamamos $x =$ Número

Convertimos el enunciado en una ecuación:

$2x + \frac{x}{4} = 189$. Resolvemos:

$4 \cdot 2x + x = 4 \cdot 189$

$9x = 756$

$x = \frac{756}{9} = 84$

Solución: El número es 84

Problema 2: Eloisa tiene 26 años menos que su madre. Entre las dos suman medio siglo. ¿Qué edad tiene cada una?

Llamamos $x =$ Edad Eloisa. Por tanto Edad madre $= x + 26$

Convertimos el enunciado en una ecuación:

$x + x + 26 = 50$. Resolvemos:

$2x = 50 - 26$

$$x = \frac{24}{2} = 12$$

$\boxed{\textbf{Solución: Eloisa tiene 12 años y su madre, 38 años}}$

Problema 3: Tres hermanos se llevan, cada uno al siguiente, un año, y entre los tres suman 48 años. ¿Cuáles son sus edades?

Llamamos $x =$ Edad hermano joven. Por tanto, los otros hermanos tienen $x + 1$ años y $x + 2$ años

Convertimos el enunciado en una ecuación:

$x + x + 1 + x + 2 = 48$. Resolvemos:

$3x = 48 - 2 - 1$

$$x = \frac{45}{3} = 15$$

$\boxed{\textbf{Solución: Los hermanos tienen 15, 16 y 17 años}}$

Problema 4: En un concurso de TV, dotado con un premio total del 1000 euros, el concursante A se llevó el doble que el concursante B pero 100 euros menos que el concursante C. ¿Cuánto se llevó cada uno?

Llamamos x a uno de los valores desconocidos:

$x =$ Premio concursante B

Y relacionamos con x los otros valores:

$2x =$ Premio concursante A $2x + 100 =$ Premio concursante C

Según el enunciado, la suma de los premios es 1000 euros:

$$x + 2x + 2x + 100 = 1000$$

Resolvemos y nos queda $x = 180$

El concursante A ganó 360 euros, el B 180 euros y el C 460 euros.

Problema 5: Doña Laura lleva una vida muy regular, y duerme todos los días una hora menos de la mitad del tiempo que está despierta. ¿Cuánto tiempo duerme?

Llamamos x al valor desconocido:

$x =$ Tiempo que está despierta

Relacionamos que x el tiempo que duerme:

$\frac{x}{2} - 1 =$ Tiempo que duerme

El total del día son 24 horas, por tanto:

$$x + \frac{x}{2} - 1 = 24$$

Resolvemos y nos queda $x = \frac{50}{3} =$ 16h y 40 min

$\boxed{\textbf{Duerme 7 h y 20 min}}$

Problema 6: Por tres cafés y dos cruasanes hemos pagado 5’80 euros. ¿Cuál es el precio de un cruasán, sabiendo que cuesta 60 céntimos menos que un café?

Llamamos x al valor desconocido:

$x =$ Precio un cruasan

Relacionamos con x los otros valores:

$x + 0'60 =$ Precio de un café $\qquad 2x =$ Precio dos cruasáns

$3 \cdot (x + 0'60) =$ Precio de tres cafés

Traducimos el enunciado a una ecuación:

$2x + 3 \cdot (x + 0'60) = 5'80$

Resolvemos y nos queda $x = 0'80$

Un café cuesta 1’40 euros y un cruasán 0’80 euros

Problema 7: Los ahorros de Adela quintuplican a los de su hermana Beatriz, pero si Adela hiciera a Beatriz una transferencia de 800 euros, sólo serían el triple. ¿Cuánto tiene cada una?

Llamamos x a lo desconocido:

$x =$ Ahorros Beatriz

Relacionamos con x el resto de valores:

$5x =$ Ahorros Adela $\qquad$ $5x - 800 =$ Ahorros Adela con transferencia

$x + 800 =$ Ahorros Beatriz con transferencia

Traducimos el enunciado a una ecuación:

$3 \cdot (x + 800) = 5x - 800$

Resolvemos y queda $x = 1600$

Beatriz tiene 1600 euros y Adela tiene 8000 euros

Problema 8: Aumentando un número en un 20 % y restándole dos unidades se obtiene el mismo resultado que sumándole su séptima parte. ¿Qué número es?

Llamamos $x =$ Número desconocido

Relacionamos con x los otros valores:

$1'2 \cdot x - 2 =$ Aumento del 20 % menos dos unidades

$x + \dfrac{x}{7} =$ Suma de su séptima parte

Traduciendo el enunciado a una ecuación nos queda:

$$1'2 \cdot x - 2 = x + \frac{x}{7}$$

Resolvemos y tenemos $x = 35$

$\boxed{\textbf{El número es 35}}$

Problema 9: Si multiplico mi edad por la que tenía el año pasado, obtengo el mismo resultado que si multiplico la que tenía hace cuatro años por la que tendré dentro de cuatro. ¿Cuántos años tengo?

Llamamos:

$x =$ Mi edad actual

Realacionamos con x los demás valores:

$x - 1 =$ Mi edad el año pasado $\qquad x - 4 =$ Mi edad hace cuatro años

$x + 4 =$ Mi edad dentro de cuatro años

Traducimos el enunciado a una ecuación:

$x \cdot (x - 1) = (x - 4) \cdot (x + 4)$

Y resolvemos. Haciendo cuentas nos queda: $-x = -16$

$\boxed{\textbf{Tengo 16 años}}$

Tema 4: Ecuaciones e Inecuaciones

1. Repaso: Ecuaciones de 1º y 2º grado

2. Problemas con ecuaciones de 1º y 2º grado

3. **Ecuaciones bicuadradas**

Ecuaciones bicuadradas

Son de la forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

con $a \neq 0$, b y c números.

En principio, como ecuaciones que son de grado 4 no tienen una solución mecánica. Pero aplicando un pequeño truco matemático consistente en llamar

$$t = x^2 \Longrightarrow t^2 = x^4$$

nos queda la ecuación

$$at^2 + bt + c = 0$$

que es una ecuación de segundo grado y tiene solución.

Ecuaciones bicuadradas

Ejemplo 1: $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$

1. Sustituimos x^2 por t, y x^4 por t^2.
   $t^2 - 20t + 64 = 0$

2. Hallamos las raíces de la ecuación de segundo grado que nos queda.
   Resolviendo nos queda $t = 16$ y $t = 4$ como raíces

3. Sustituimos t por x^2 y resolvemos.
   $x^2 = 16 \longrightarrow x = 4$ y $x = -4$

   $x^2 = 4 \longrightarrow x = 2$ y $x = -2$

   Las soluciones son $x = 4$, $x = -4$, $x = 2$ y $x = -2$

Ecuaciones bicuadradas

Ejemplo 2: $(x^2 - 25) \cdot x^2 = (x^2 - 25) \cdot 9$

1. Escribimos en la forma general.
   $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$
2. Sustituimos x^2 por t, y x^4 por t^2.
   $t^2 - 34t + 225 = 0$
3. Hallamos las raíces de la ecuación de segundo grado que nos queda.
   Resolviendo nos queda $t = 25$ y $t = 9$ como raíces
4. Sustituimos t por x^2 y resolvemos.
   $x^2 = 25 \longrightarrow x = 5$ y $x = -5$
   $x^2 = 9 \longrightarrow x = 3$ y $x = -3$
   Las soluciones son $x = 5$, $x = -5$, $x = 3$ y $x = -3$

Resuelve las siguientes ecuaciones:

(a) $x^4 + 16 = 17x^2$

(b) $25x^2 - 144 = x^4$

(c) $x^4 - 40x^2 + 144 = 0$

(d) $13x^2 - x^4 = 36$

Tema 4: Ecuaciones e Inecuaciones

1. Repaso: Ecuaciones de 1º y 2º grado
2. Problemas con ecuaciones de 1º y 2º grado
3. Ecuaciones bicuadradas
4. **Ecuaciones radicales**

$\boxed{\textbf{Ecuaciones (con) radicales:}}$ Son ecuaciones en las que aparecen incógnitas (x) dentro de alguna raíz. Para resolver ecuaciones (con) radicales:

1. **Aislamos uno de los radicales en un miembro de la ecuación, y el resto de términos en el otro miembro.**
2. **Elevamos al cuadrado los dos miembros.**
3. **Si aún quedan radicales, repetimos el proceso.**
4. **Resolvemos la ecuación resultante (por factorización, de segundo grado. . .).**

Ecuaciones (con) radicales: $\sqrt{x+3} = x-3$ (*Ejemplo 1*)

1. Aislamos uno de los radicales en un miembro de la ecuación, y el resto de términos en el otro miembro
   $\sqrt{x+3} = x-3$ (ya está)

2. Elevamos al cuadrado los dos miembros
   $\left(\sqrt{x+3}\right)^2 = (x-3)^2 \iff x+3 = x^2-6x+9$

3. Si aún quedan radicales, repetimos el proceso
   (No quedan)

4. Resolvemos la ecuación resultante (por factorización, de segundo grado...)
   $0 = x^2-7x+6 \iff \boxed{x=6}$ ò $\boxed{x=1}$

Ecuaciones (con) radicales: $1 - 7\sqrt{2x+7} = 3x+3$ (*Ejemplo 2*)

1. Aislamos uno de los radicales en un miembro de la ecuación, y el resto de términos en el otro miembro

   $-7\sqrt{2x+7} = 3x+3-1 \iff -7\sqrt{2x+7} = 3x+2$

2. Elevamos al cuadrado los dos miembros

   $(-7\sqrt{2x+7})^2 = (3x+2)^2 \iff 49 \cdot (2x+7) = 9x^2+12x+4$

   $(98x+343 = 9x^2+12x+4 \iff 0 = 9x^2-86x-339$

3. Si aún quedan radicales, repetimos el proceso

   (No quedan)

4. Resolvemos la ecuación resultante (por factorización, de segundo grado. . .)

   $0 = 9x^2-86x-339 \iff \boxed{x=-3}$ ò $\boxed{x=\frac{113}{9}}$

Ecuaciones (con) radicales:

$\sqrt{5-2x} = \sqrt{x+3} + 2$ (*Ejemplo 3*)

1. **Paso 1.** Aislamos uno de los radicales en un miembro de la ecuación, y el resto de términos en el otro miembro

   $\sqrt{5-2x} = \sqrt{x+3} + 2$ (ya está)

2. **Paso 2.** Elevamos al cuadrado los dos miembros

   $(\sqrt{5-2x})^2 = (\sqrt{x+3} + 2)^2$

   $5 - 2x = x + 3 + 2 \cdot \sqrt{x+3} \cdot 2 + 4 \quad \Longleftrightarrow$
   $5 - 2x - x - 3 - 4 = 4\sqrt{x+3}$

   $-2 - 3x = 4\sqrt{x+3} \quad \Longleftrightarrow \quad -4\sqrt{x+3} = 2 + 3x$

Ecuaciones (con) radicales:

$\sqrt{5-2x} = \sqrt{x+3} + 2$ (*Ejemplo 3 - Continuación*)

1. **Paso 3.** Si aún quedan radicales, repetimos el proceso

$$(-4\sqrt{x+3})^2 = (2+3x)^2 \iff 16 \cdot (x+3) = 4 + 12x + 9x^2$$

$$16x + 48 = 9x^2 + 12x + 4 \iff 0 = 9x^2 - 4x - 44$$

2. **Paso 4.** Resolvemos la ecuación resultante (por factorización, de segundo grado...)

Soluciones (2º grado): $\boxed{x = -2}$ y $\boxed{x = \dfrac{22}{9}}$

Ecuaciones (con) radicales: $\sqrt{2x}-1=\sqrt{x+1}$ (*Ejemplo 4*)

1. Aislamos uno de los radicales en un miembro de la ecuación, y el resto de términos en el otro miembro

   $\sqrt{2x}-1=\sqrt{x+1}$ (ya está)

2. Elevamos al cuadrado los dos miembros

   $\left(\sqrt{2x}-1\right)^2=\left(\sqrt{x+1}\right)^2$

   $2x-2\sqrt{2x}+1=x+1 \iff 2x+1-x-1=2\sqrt{2x}$

   $x=2\sqrt{2x}$

3. Si aún quedan radicales, repetimos el proceso

   $x^2=2^2(\sqrt{2x})^2 \iff x^2=4\cdot 2x \iff x^2-8x=0$

4. Resolvemos la ecuación resultante (por factorización, de segundo grado. . .)

   $x^2-8x=0 \longrightarrow \boxed{x=0}$ ó $\boxed{x=8}$

Ecuaciones (con) radicales:

$$7-\sqrt{2x+5}=\sqrt{x-1}-1 \qquad (\textit{Ejemplo 5})$$

1. **Paso 1.** Aislamos uno de los radicales en un miembro de la ecuación, y el resto de términos en el otro miembro

   $$-\sqrt{2x+5}=\sqrt{x-1}-8$$

2. **Paso 2.** Elevamos al cuadrado los dos miembros

   $$\left(\sqrt{2x+5}\right)^2=\left(\sqrt{x-1}-8\right)^2 \Longleftrightarrow$$

   $$2x+5=x-1-16\sqrt{x-1}+64$$

Ecuaciones (con) radicales:

$7 - \sqrt{2x+5} = \sqrt{x-1} - 1$ (*Ejemplo 5*)

1. **Paso 3.** Si aún quedan radicales, repetimos el proceso

   $$2x + 5 - x + 1 - 64 = -16\sqrt{x-1} \iff x - 58 = -16\sqrt{x-1}$$

   $$(x-58)^2 = (-16)^2 \left(\sqrt{x-1}\right)^2$$

   $$x^2 - 116x + 58^2 = 256 \cdot (x-1) \quad \iff \quad x^2 - 372x + 3620 = 0$$

2. **Paso 4.** Resolvemos la ecuación resultante (por factorización, de segundo grado. . .)

   Tiene soluciones $\boxed{x = 362}$ y $\boxed{x = 10}$

Ejercicio: Resuelve las siguientes operaciones con radicales.

(a) $\sqrt{5-2x}-x=-1$

(b) $10-4\sqrt{10+x}=x+8$

(c) $2\sqrt{4x+13}=1+x$

(d) $3+\sqrt{3x+10}=\sqrt{x-4}+7$

(e) $8+\sqrt{2x-3}=3\sqrt{x-1}$

(f) $\sqrt{7x+1}-\sqrt{x-1}=4$

Tema 4: Ecuaciones e Inecuaciones

1. **Repaso: Ecuaciones de 1º y 2º grado**
2. **Problemas con ecuaciones de 1º y 2º grado**
3. **Ecuaciones bicuadradas**
4. **Ecuaciones radicales**
5. **Ecuaciones factorizadas**

Ecuaciones factorizadas: Son expresiones algebraicas escritas como producto de factores e igualadas a cero

$$P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot \ldots \cdot P_n(x) = 0$$

Para resolver una ecuación mediante factorización:

1. Agrupamos todos los términos de la ecuación en un miembro.
2. Factorizamos (*tema anterior*) el polinomio resultante.
3. Las soluciones de la ecuación serán las soluciones de cada factor

Ecuaciones factorizadas

Ejemplo 1: $x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = 0$

1. Agrupamos todos los términos de la ecuación en un miembro.

   (*Ya está*)

2. Factorizamos el polinomio resultante

   Por Ruffini:

   $x^3 - 7x^2 - 4x + 28 = (x - 2) \cdot (x - 7) \cdot (x + 2) = 0$

   Las soluciones son 2 , 7 y -2

Ejemplo 2: $x^3 - 3x^2 - 36x - 32 = 0$

1. Agrupamos todos los términos de la ecuación en un miembro.

   (*Ya está*)

2. Factorizamos el polinomio resultante

   Por Ruffini:

   $x^3 - 3x^2 - 36x - 32 = (x+4) \cdot (x-8) \cdot (x+1) = 0$

   Las soluciones son -4 , 8 y -1

Ecuaciones factorizadas

Ejemplo 3: $x^3 + 7x + 15 = 7x^2$

1. Agrupamos todos los términos de la ecuación en un miembro.
   $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$

2. Factorizamos el polinomio resultante
   Por Ruffini:
   $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = (x-3) \cdot (x-5) \cdot (x+1) = 0$
   Las soluciones son 3 , 5 y -1

Ejercicio 1: Resuelve las siguientes ecuaciones:

(a) $x^3 = x^2 + 24x + 36$

(b) $x^3 + 10x^2 = 4x + 40$

(c) $x^4 - 19x^2 + 48 = 0$

(d) $x^3 + x^2 = 22x + 40$

(e) $x^4 + 6x^2 + 8 = 0$

(f) $x^3 + 3x^2 = 16x + 48$

(g) $4x^4 - 4x^2 + 1 = 0$

Tema 4: Ecuaciones e Inecuaciones

1. **Repaso: Ecuaciones de 1º y 2º grado**
2. **Problemas con ecuaciones de 1º y 2º grado**
3. **Ecuaciones bicuadradas**
4. **Ecuaciones radicales**
5. **Ecuaciones factorizadas**
6. **Ecuaciones racionales** ***(con x en el denominador)***

Ecuaciones racionales

Son ecuaciones en las que aparecen fracciones algebraicas, es decir, ecuaciones con polinomios en el denominador

Para resolver ecuaciones racionales:

1. Hallamos el mcm de los denominadores (*generalmente, el producto de los denominadores*).
2. Multiplicamos **todos** los términos por el mcm hallado en el paso anterior.
3. Hacemos las cuentas y reescribimos la ecuación.
4. Resolvemos la ecuación resultante (puede ser por factorización).

Ecuaciones racionales

$$\frac{1}{x}+\frac{1+x}{4-x}=2 \quad (\textit{Ejemplo 1})$$

1. Hallamos el mcm de los denominadores (*generalmente, el producto de los denominadores*)

$$mcm = x\cdot(4-x)$$

2. Multiplicamos **todos** los términos por el mcm hallado en el paso anterior

$$x\cdot(4-x)\frac{1}{x}+x\cdot(4-x)\frac{1+x}{4-x}=2\cdot x\cdot(4-x)$$

3. Hacemos las cuentas y reescribimos la ecuación

$$4-x+x\cdot(1+x)=8x-2x^2 \iff 4+x^2=8x-2x^2$$

4. Resolvemos la ecuación resultante (puede ser por factorización)

$3x^2-8x+4=0$ cuyas soluciones son $\boxed{x=2}$ y $\boxed{x=\frac{2}{3}}$

Ecuaciones racionales $\frac{6}{x}+\frac{x+1}{2-x}=x-5$ (*Ejemplo 2*)

1. Hallamos el mcm de los denominadores (*generalmente, el producto de los denominadores*)
$$mcm = x\cdot(2-x)$$

2. Multiplicamos **todos** los términos por el mcm hallado en el paso anterior
$$x\cdot(2-x)\cdot\frac{6}{x}+x\cdot(2-x)\cdot\frac{x+1}{2-x}=x\cdot(2-x)\cdot(x-5)$$

3. Hacemos las cuentas y reescribimos la ecuación
$(2-x)\cdot 6+x\cdot(x+1)=-x^3+7x^2-10x \iff$
$12-6x+x^2+x=-x^3+7x^2-10x$

4. Resolvemos la ecuación resultante (puede ser por factorización)
$x^3-6x^2+5x+12=0$ ecuación factorizada con soluciones
$\boxed{x=3}$, $\boxed{x=-1}$ y $\boxed{x=4}$

Ecuaciones racionales $\dfrac{x+1}{x^2} + x = \dfrac{x}{2x+3}$ (*Ejemplo 3*)

1. Hallamos el mcm de los denominadores (*generalmente, el producto de los denominadores*)
$$mcm = x^2 \cdot (2x+3)$$

2. Multiplicamos **todos** los términos por el mcm hallado en el paso anterior
$$x^2 \cdot (2x+3) \cdot \frac{x+1}{x^2} + x^2 \cdot (2x+3) \cdot x = x^2 \cdot (2x+3) \cdot \frac{x}{2x+3}$$

3. Hacemos las cuentas y reescribimos la ecuación
$(2x+3) \cdot (x+1) + 2x^4 + 3x^3 = x^3 \iff$
$2x^2 + 5x + 3 + 2x^4 + 3x^3 = x^3$

4. Resolvemos la ecuación resultante (puede ser por factorización)
$2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 5x + 3 = 0$ ecuación factorizada con solución única $\boxed{x = -1}$

Ecuaciones racionales $\frac{2}{x+3}+\frac{x-1}{x^2}=\frac{1}{x}$ (*Ejemplo 4*)

1. Hallamos el mcm de los denominadores (*generalmente, el producto de los denominadores*)

   $mcm(x+3, x^2, x) = x^2 \cdot (x+3)$

2. Multiplicamos **todos** los términos por el mcm hallado en el paso anterior

   $x^2 \cdot (x+3)\frac{2}{x+3} + x^2 \cdot (x+3)\frac{x-1}{x^2} = x^2 \cdot (x+3)\frac{1}{x}$

3. Hacemos las cuentas y reescribimos la ecuación

   $2x^2 + (x+3)\cdot(x-1) = x \cdot (x+3) \iff$

   $2x^2 + x^2 + 2x - 3 = x^2 + 3x$

Ecuaciones racionales $\frac{2}{x+3}+\frac{x-1}{x^2}=\frac{1}{x}$ (*Ejemplo 4 - Continuación*)

1. Resolvemos la ecuación resultante (puede ser por factorización) $2x^2-x-3=0$

   que es una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son $\frac{3}{2}$ y -1

Ecuaciones racionales $\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{x-8}{x+1}$ (*Ejemplo 5*)

1. Hallamos el mcm de los denominadores (*generalmente, el producto de los denominadores*)

   $mcm(1-x, x^2-1, x+1) = x^2-1$

2. Multiplicamos **todos** los términos por el mcm hallado en el paso anterior

   $$(x^2-1)\frac{x}{1-x}+(x^2-1)\frac{2}{x^2-1}=(x^2-1)\frac{x-8}{x+1}$$

Ecuaciones racionales $\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{x-8}{x+1}$ (*Ejemplo 5 - Continuación*)

1. Hacemos las cuentas y reescribimos la ecuación

   $$(x+1)\cdot(x-1)\frac{x}{1-x}+(x+1)\cdot(x-1)\frac{2}{x^2-1}=(x+1)\cdot(x-1)\frac{x-8}{x+1}$$

   $$-x\cdot(x+1)+2=(x-1)\cdot(x-8) \quad \Longleftrightarrow$$

   $$-x^2-x+2=x^2-9x+8$$

2. Resolvemos la ecuación resultante (puede ser por factorización)

   $2x^2-8x+6=0$

   que es una ecuación de segundo grado con soluciones 3 y 1

Ecuaciones racionales

Ejercicio: Resuelve las siguientes ecuaciones racionales.

(a) $\dfrac{3}{x} - \dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{x+2}{x}$

(b) $\dfrac{1}{x} = x - \dfrac{1+x}{4-x}$

(c) $\dfrac{x^2+x}{3} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{6}$

(d) $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{1}{x^2+2x+1} = 2x$

Ejercicio: Resuelve las siguientes ecuaciones.

(a) $\sqrt{x+5} = 1 + \sqrt{x-14}$

(b) $x - \sqrt{x+3} = \sqrt{x+3}$

(c) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = 5$

(d) $\sqrt{x+7} + \sqrt{x-1} = 2x$

(e) $\dfrac{3x}{8+4x} = \dfrac{x-2}{x}$

(f) $\dfrac{x^2-32}{4} = \dfrac{-28}{x^2-9}$

Tema 4: Ecuaciones e Inecuaciones

1. **Repaso: Ecuaciones de 1º y 2º grado**
2. **Problemas con ecuaciones de 1º y 2º grado**
3. **Ecuaciones bicuadradas**
4. **Ecuaciones radicales**
5. **Ecuaciones factorizadas**
6. **Ecuaciones racionales (*con x en el denominador*)**
7. **Inecuaciones**
   - De primer grado
   - De segundo grado

Inecuación

Una **inecuación** es una desigualdad que se compone de dos expresiones algebraicas separadas por los signos de mayor, menor $<$, $>$, $\leq$, $\geq$.

$x + 5 > 8$

$-2x + 7 < 3 \cdot (2x - 1)$

$\dfrac{x-4}{2} - 2x \leq 5 - 3x$

$2x^2 - 1 \geq 1 + 6x$

Solución de una inecuación

- Las **soluciones de una inecuación** son aquellos valores de x que hacen que la inecuación sea cierta.

- Generalmente forman un intervalo (*abierto o cerrado*).

$$\boxed{\text{¿Es } x=-1 \text{ solución de } x+2<5\text{?}}$$

Sustituimos: $-1+2<5 \longrightarrow 1<5$

$\boxed{x=-1 \text{ es solución}}$ (*la desigualdad es cierta*)

$$\boxed{\text{¿Es } x=4 \text{ solución de } x^2+3x<5-2x\text{?}}$$

Sustituimos: $4^2+3\cdot 4<5-2\cdot 4 \longrightarrow 19<-3$

$\boxed{x=4 \text{ no es solución}}$ (*la desigualdad no es cierta*)

- Las **inecuaciones de primer grado** son aquellas inecuaciones en que las incógnitas tienen a lo sumo grado uno.

- **Reglas para resolver inecuaciones de primer grado:**

    - Al **sumar o restar** en los dos miembros la misma cantidad, la desigualdad no varía.

    - Al **multiplicar o dividir** en los dos miembros por un **valor positivo**, la desigualdad no varía.

    - Al **multiplicar o dividir** en los dos miembros por un **valor negativo**, **la desigualdad sí varía**.

Resolución de inecuaciones de primer grado: $5x - 7 \geq x + 3$
(Ejemplo 1)

1. Multiplicamos todo por los denominadores, para que estos desaparezcan.

   No hay denominadores

2. Eliminamos los paréntesis, aplicando la propiedad distributiva.

   No hay paréntesis

3. Aplicando sumas y restas, dejamos x's en un miembro y números en el otro miembro.

   $5x - x \geq 3 + 7 \quad \longrightarrow \quad 4x \geq 10$

4. Despejamos la x mediante una división, cambiando la desigualdad, si la división es por un número negativo.

   $x \geq \frac{10}{4} \quad \longrightarrow \quad x \geq \frac{5}{2} \quad \longrightarrow \quad \boxed{[\frac{5}{2}, +\infty)}$

Resolución de inecuaciones de primer grado: $3 \cdot (1 - 2x) > 6x + 5$ (Ejemplo 2)

1. Multiplicamos todo por los denominadores, para que estos desaparezcan.

   No hay denominadores

2. Eliminamos los paréntesis, aplicando la propiedad distributiva.

   $3 - 6x > 6x + 5$

3. Aplicando sumas y restas, dejamos x's en un miembro y números en el otro miembro.

   $3 - 5 > 6x + 6x \qquad \longrightarrow \qquad -2 > 12x$

4. Despejamos la x mediante una división, cambiando la desigualdad, si la división es por un número negativo.

   $\frac{-2}{12} > x \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{\left(-\infty, \frac{-2}{12}\right)}$

Resolución de inecuaciones de primer grado: $\frac{7x}{2} - \frac{x}{3} \leq -4x$

(Ejemplo 3)

1. Multiplicamos todo por los denominadores, para que estos desaparezcan.

   $$2 \cdot 3 \cdot \frac{7x}{2} - 2 \cdot 3 \cdot \frac{x}{3} \leq 2 \cdot 3 \cdot -4x$$

   $$3 \cdot 7x - 2 \cdot x \leq -24x$$

2. Eliminamos los paréntesis, aplicando la propiedad distributiva.

   $$21x - 2x \leq -24x \qquad \longrightarrow \qquad 19x \leq -24x$$

3. Aplicando sumas y restas, dejamos x's en un miembro y números en el otro miembro.

   $$0 \leq -24x - 19x \qquad \longrightarrow \qquad 0 \leq -43x$$

4. Despejamos la x mediante una división, cambiando la desigualdad, si la división es por un número negativo.

   $$\frac{0}{-43} \geq x \qquad \longrightarrow \qquad 0 \geq x \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{(-\infty, 0]}$$

Resolución de inecuaciones de primer grado: $\frac{x-4}{5} - \frac{2x}{3} < x+4$

(Ejemplo 4)

1. Multiplicamos todo por los denominadores, para que estos desaparezcan.

$$3 \cdot 5 \cdot \frac{x-4}{5} - 3 \cdot 5 \cdot \frac{2x}{3} < 3 \cdot 5 \cdot (x+4)$$

$$3 \cdot (x-4) - 5 \cdot 2x < 15 \cdot (x+4)$$

2. Eliminamos los paréntesis, aplicando la propiedad distributiva.

$$3x - 12 - 10x < 15x + 60 \quad \longrightarrow \quad -7x - 12 < 15x + 60$$

3. Como en las ecuaciones de 1º grado, mandamos x's a un miembro y números al otro.

$$-7x - 12 + 7x - 60 < 15x + 60 + 7x - 60 \quad \longrightarrow \quad -72 < 22x$$

4. Despejamos la x mediante una división, cambiando la desigualdad, si la división es por un número negativo.

$$\frac{-72}{22} < x \quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{Intervalo } \left(\frac{-72}{22}, +\infty\right)}$$

Resolución de inecuaciones de segundo grado: $x^2 + 4x > -3$

(Ejemplo 1)

1. Expresamos la inecuación de segundo grado en su forma general (*todos los términos en un miembro y cero en el otro*).

   $x^2 + 4x + 3 > 0$

2. Resolvemos la expresión resultante como si fuese una ecuación de segundo grado.

   Las soluciones son $x = -3$ y $x = -1$

3. Dividimos la recta real en los intervalos que determinan las soluciones.

   Serían $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$ y $(-1, +\infty)$

4. Tomamos un punto de cada intervalo. Si ese punto es solución de la inecuación, todo el intervalo lo es.

   $x = -4$ es solución. $x = -2$ NO es solución. $x = 0$ es solución.

   La solución son los puntos de $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$

Resolución de inecuaciones de segundo grado: $x^2 \leq 3x + 10$ (Ejemplo 2)

1. Expresamos la inecuación de segundo grado en su forma general (*todos los términos en un miembro y cero en el otro*).

   $x^2 - 3x - 10 \leq 0$

2. Resolvemos la expresión resultante como si fuese una ecuación de segundo grado.

   Las soluciones son $x = -2$ y $x = 5$

3. Dividimos la recta real en los intervalos que determinan las soluciones.

   Serían $(-\infty, -2)$, $(-2, 5)$ y $(5, +\infty)$

4. Tomamos un punto de cada intervalo. Si ese punto es solución de la inecuación, todo el intervalo lo es.

   $x = -3$ NO es solución. $x = 0$ es solución. $x = 6$ NO es solución.

   La solución son los puntos de $(-2, 5)$

Resolución de inecuaciones de segundo grado: $2x^2 + 2 < 3x$

(Ejemplo 3)

1. Expresamos la inecuación de segundo grado en su forma general (*todos los términos en un miembro y cero en el otro*).

   $2x^2 - 3x + 2 < 0$

2. Resolvemos la expresión resultante como si fuese una ecuación de segundo grado.

   Esta ecuación de 2º grado no tiene soluciones

3. Dividimos la recta real en los intervalos que determinan las soluciones.

   Por tanto hay un único intervalo $(-\infty, +\infty)$

4. Tomamos un punto de cada intervalo. Si ese punto es solución de la inecuación, todo el intervalo lo es.

   $x = 0$ NO es solución.

   La inecuación no tiene solución