Tema 2. Potencias, Radicales y Logaritmos

Potencias con base negativa (I):

- **Exponente par**

  Una potencia con base negativa y exponente par es igual a la misma potencia pero con base positiva:

  $$(-2)^8 = 2^8 \qquad (-6)^2 = 6^2$$

  $$(-1)^{28} = 1^{28} \qquad 7^6 = (-7)^6$$

- **Exponente impar**

  Una potencia con base negativa y exponente impar es igual a la misma potencia pero con base positiva y signo negativo:

  $$(-2)^7 = -2^7 \qquad (-6)^3 = -6^3$$

  $$(-1)^{41} = -1^{41} \qquad -7^5 = (-7)^5$$

Potencias con base negativa (II):

Esto puede ser útil en aquellos casos en que necesitemos cambiar el signo para operar:

Ejemplo 1

$$(-6)^4 \cdot 6^7 : \left(\frac{-1}{6}\right)^{-6} \qquad \longrightarrow \qquad 6^4 \cdot 6^7 : 6^6$$

Ejemplo 2

$$25^7 : (-5)^3 \qquad \longrightarrow \qquad \left[(-5)^2\right]^7 : (-5)^3$$

Ejemplo 3

$$\frac{(-3)^7}{3^6} \qquad \longrightarrow \qquad -\frac{3^7}{3^6}$$

Potencias de exponente negativo

Cuando tenemos un número real elevado a un exponente negativo, el resultado es igual al **inverso** del número elevado a exponente positivo:

$$2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

$$(-5)^{-4} = \left(\frac{1}{-5}\right)^4 = \frac{1}{(-5)^4} = \boxed{\frac{1}{625}}$$

$$\left(\frac{-2}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{-2}\right)^1 = \boxed{\frac{-3}{2}}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2} = \boxed{\frac{25}{9}}$$

Potencias de exponente negativo

(*Más ejemplos*)

Cuando tenemos un número real elevado a un exponente negativo, el resultado es igual al **inverso** del número elevado a exponente positivo:

$$(-7)^{-1} = \left(\frac{1}{-7}\right)^{1} = \boxed{-\frac{1}{7}}$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{4}\right)^{4} = \frac{5^4}{4^4} = \boxed{\frac{625}{256}}$$

$$3^{-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{5} = \frac{1}{3^5}\ \boxed{\frac{1}{243}}$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{-3} = 6^3 = \boxed{216}$$

Propiedades de las potencias

Caso 1: Misma base Se suman los exponentes (*producto*) o se restan (*división*).

- *Producto de potencias*

  $5^3 \cdot 5^7 = 5^{10}$

  $2^4 \cdot 2^{-7} \cdot 2^2 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

- *División de potencias*

  $7^{10} : 7^4 = 7^6$

  $5^9 : 5^{-3} = 5^{12}$

Propiedades de las potencias

Caso 2: Mismo exponente Se multiplican las bases (*producto*) o se dividen (*división*).

- *Producto de potencias*

$3^6 \cdot 5^6 = 15^6$

$$2^{-3} \cdot 4^{-3} = 8^{-3} = \frac{1}{8^3} = \frac{1}{512}$$

- *División de potencias*

$$(-9)^{-3} : 3^{-3} = (-3)^{-3} = \left(\frac{1}{-3}\right)^3 = \frac{-1}{27}$$

$(-28)^5 : (-7)^5 = 4^5$

Propiedades de las potencias

Potencia de una potencia Se multiplican los exponentes.

$$(5^2)^3 = 5^6$$

$$\left[\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}\right]^5 = \left(\frac{1}{6}\right)^{-5}$$

$$[(-3)^4]^{-2} = (-3)^{-8}$$

$$\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right]^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{15}$$

$$\left[\left(\frac{11}{7}\right)^{5}\right]^5 = \left(\frac{11}{7}\right)^{25}$$

$$\left(\left[(-2)^4\right]^3\right)^5 = (-2)^{60}$$

- Cualquier número **elevado a cero** es igual a uno.
- Cualquier número **elevado a uno** es igual al propio número.

Propiedades de las potencias

Caso 3: Distinta base, distinto exponente No se puede expresar como una sola potencia, **salvo que una de las bases se pueda escribir como potencia de la otra**:

$$\left.\begin{array}{l} 8^5 \cdot 7^3 \\ \\ 11^4 \cdot 2^{-5} \\ \\ 3^2 : 5^{23} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^4 \cdot 4^3 = 2^4 \cdot (2^2)^3 = 2^4 \cdot 2^6 = 2^{10} \\ \\ 3^7 : 9^2 = 3^7 : (3^2)^2 = 3^7 : 3^4 = 3^3 \\ \\ (-5)^{-3} \cdot 25^4 = (-5)^{-3} \cdot [(-5)^2]^4 = (-5)^{-3} \cdot (-5)^8 = (-5)^5 \end{array}\right\}$$

Ejercicio 1: Calcula el valor de las siguientes potencias:

(a) $(-7)^{-2} =$ (b) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-3} =$ (c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-6} =$

Ejercicio 2: Expresa como una sola potencia (*si se puede*):

(a) $\left[(5^2)^3 : 5^{-5}\right] \cdot 5^7 =$

(b) $3^{-6} : 3^2 =$

(c) $(11^5)^3 \cdot 6^{15} : 66^4 =$

(d) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right)^{-4} =$

(e) $(10^{-5} \cdot 10 \cdot 10^8) : 10^{10} =$

(f) $2^5 \cdot 4^{-3} =$

(g) $5^{16} : 25^6 =$

(h) $28^{10} : (4^2)^5 \cdot 7^{-4} =$

Ejercicios con potencias

Ejercicio 3: Escribe como potencia de exponente negativo:

(a) $\dfrac{1}{2^5} = \quad \dfrac{1^5}{2^5} = \quad \left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \quad \boxed{2^{-5}}$

(b) $-\dfrac{1}{3^7} = \quad -\dfrac{1^7}{3^7} = \quad -\left(\dfrac{1}{3}\right)^7 = \quad \boxed{-3^{-7}}$

(c) $\dfrac{5}{5^4} = \quad 5 : 5^4 = \quad 5^1 : 5^4 = \quad \boxed{5^{-3}}$

(d) $\dfrac{6}{6^2} = \quad 6 : 6^2 = \quad 6^1 : 6^2 = \quad \boxed{6^{-1}}$

Ejercicios con potencias

Ejercicio 4: Expresa como una sola potencia (*si es posible*):

(a) $(-2)^3 \cdot 2^{-4} \cdot (-2)^{-1} =$

(b) $7^{-3} \cdot 7^{-2} \cdot (-7)^4 =$

(c) $(-5)^4 \cdot 5^5 \cdot 5^{-3} =$

(d) $(-6)^2 : 6^{-2} \cdot (-6)^6 =$

(e) $54^2 : 2^2 : 3^2 =$

(f) $5^{-4} \cdot 6^{-4} : 30^{-1} =$

(g) $6^{-5} : 2^{-5} \cdot 3^{-1} =$

(h) $(-12)^{-5} \cdot (-12)^4 : 3^{-1} =$

Ejercicio 5: Expresa el resultado como una sola potencia:

(a) $\left[9^5 : (-3)^5\right]^{-1}$

(b) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{4}{5}\right)^{-4} : \left(\dfrac{5}{4}\right)^2$

(c) $(6^{-3} \cdot 8^{-3})^2$

(d) $\left[60^4 : (-4)^4\right]^{-3}$

(e) $\left(\dfrac{5}{6}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{6}{5}\right)^{-2} : \left(\dfrac{5}{6}\right)^{-4}$

(f) $\left[45^{-2} : (-3)^{-2}\right]$

(g) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{4}{3}\right)^{-7}$

(h) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-1} : \left(\dfrac{1}{7}\right)^{-5} : \left(\dfrac{1}{7}\right)^9$

Tema 2. Potencias, Radicales y Logaritmos

- **1. Potencias.**
  - *Potencias de exponente negativo*
  - *Propiedades de las potencias*

- **2. Radicales.**
  - *2.1 Potencias de exponente fraccionario*
  - *2.2 Extraer factores de un radical*
  - *2.3 Suma y resta de radicales*
  - *2.4 Reducción de radicales a índice común*
  - *2.5 Multiplicación y división de radicales*
  - *2.6 Potencias y raíces de radicales*

Raíz cuadrada

- La **raíz cuadrada** de un número es aquel número que, elevado al cuadrado, da lugar al número dentro de la raíz.

  $\sqrt{25} = 5 \Longleftrightarrow 5^2 = 25$

- Los números cuya raíz cuadrada es entera $(1,4,9,16,25,\ldots)$ se llaman cuadrados perfectos.

- La raíz cuadrada de un número positivo tiene dos soluciones, una positiva y otra negativa.

- Un número negativo no tiene raíz cuadrada.

Otras raíces: tercera,cuarta,...

- La **raíz tercera** de un número es aquel número que, elevado al cubo, da lugar al número dentro de la raíz.

  $\sqrt[3]{27} = 3 \Longleftrightarrow 3^3 = 27$

- La **raíz cuarta** de un número es aquel número que, elevado a la cuarta, da lugar al número dentro de la raíz.

  $\sqrt[4]{81} = 3 \Longleftrightarrow 3^4 = 81$

- Un número negativo no tiene raíz par (cuarta, sexta,...).

Raíz n-ésima

Se llama **raíz n-ésima** de un número a, a aquel número que elevado a n es igual a a.

$\sqrt[n]{a} = b \Longleftrightarrow b^n = a$

$\sqrt[3]{8} = 2$	$\sqrt[3]{-8} = -2$	$\sqrt[3]{-1000} = -10$
$\sqrt[4]{16} = 2$ y -2	$\sqrt[4]{-16} =$ No existe	$\sqrt[7]{128} = 2$ y -2

- *Si n es par*, no existe la raíz n-ésima de un número negativo.
- *Si n es par*, la raíz n-ésima de un número positivo tiene dos soluciones.
- *Si n es impar*, existe la raíz de cualquier número y es única.

Ejemplos:

$\sqrt{64} =$ 8 y -8

$\sqrt{196} =$ 14 y -14

$\sqrt{400} =$ 20 y -20

$\sqrt{-64} =$ No existe

$\sqrt[3]{8} =$ 2

$\sqrt[3]{-8} =$ -2

$\sqrt[4]{16} =$ 2

$\sqrt[4]{-16} =$ No existe

$\sqrt[10]{1024} =$ 2

Potencias de exponente fraccionario

Forma exponencial de los radicales: Una raíz o radical se puede expresar como una potencia, donde el exponente es una fracción. El denominador es el índice de la raíz. El numerador, el exponente del radicando.

$\sqrt{3} = 3^{1/2}$ $\sqrt[3]{5} = 5^{1/3}$ $\sqrt[3]{6^2} = 6^{2/3}$

$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = 2^{3/2}$ $\sqrt[3]{625} = \sqrt[3]{5^4} = 5^{4/3}$

(a) De radical a potencia:

- El índice de la raíz es el **denominador del exponente**.
- El exponente del número es el **numerador del exponente**.

$\sqrt{15} \longrightarrow 15^{1/2}$

$\sqrt{15^7} \longrightarrow 15^{7/2}$

$\sqrt{3} \longrightarrow 3^{1/2}$

$\sqrt{3^5} \longrightarrow 3^{5/2}$

$\sqrt[3]{2} \longrightarrow 2^{1/3}$

$\sqrt[3]{2^2} \longrightarrow 2^{2/3}$

$\sqrt[4]{5} \longrightarrow 5^{1/4}$

$\sqrt[4]{5^3} \longrightarrow 5^{3/4}$

$\sqrt[6]{13} \longrightarrow 13^{1/6}$

$\sqrt[6]{13^9} \longrightarrow 13^{9/6}$

(b) De potencia a radical:

- El denominador del exponente es el **índice de la raíz**.
- El numerador del exponente es el **exponente** del número.

$5^{1/7} \longrightarrow \sqrt[7]{5}$

$5^{3/7} \longrightarrow \sqrt[7]{5^3}$

$3^{1/20} \longrightarrow \sqrt[20]{3}$

$3^{9/20} \longrightarrow \sqrt[20]{3^9}$

$2^{1/2} \longrightarrow \sqrt{2}$

$2^{5/2} \longrightarrow \sqrt{2^5}$

$6^{1/2} \longrightarrow \sqrt{6}$

$6^{3/2} \longrightarrow \sqrt{6^3}$

$10^{1/3} \longrightarrow \sqrt[3]{10}$

$10^{7/3} \longrightarrow \sqrt[3]{10^7}$

Ejercicio 1: Transforma las siguientes potencias en radicales:

(a) $5^{1/6} =$

(b) $3^{4/5} =$

(c) $7^{2/3} =$

(d) $3^{7/8} =$

(e) $2^{1/5} =$

(f) $8^{4/3} =$

Ejercicio 2: Expresa en forma de potencia:

(a) $\sqrt[3]{3^2}$

(b) $\sqrt[9]{(-6)^7}$

(c) $\sqrt[4]{3^3}$

(d) $\sqrt[3]{5^{-2}}$

(e) $\sqrt[3]{7^2}$

$\boxed{\text{2.2 Extraer factores de un radical}}$

$\boxed{\text{2.3 Suma y resta de radicales}}$

Extraer factores de un radical

$\sqrt[3]{3888}$ *(Ejemplo 1)*

1. Descomponemos el número en factores primos
   $3888 = 2^4 \cdot 3^5$

2. Dividimos los exponentes de cada factor entre el índice de la raíz:
   - El cociente es el exponente con el que el factor sale fuera.
   - El resto es el exponente con el que el factor queda dentro del radical.

   Para el factor 2 $\longrightarrow$ 4:3 $\longrightarrow$ Cociente 1 y resto 1

   Para el factor 3 $\longrightarrow$ 5:3 $\longrightarrow$ Cociente 1 y resto 2

3. Escribimos el resultado
   $\sqrt[3]{3888} = 2^1 \cdot 3^1 \cdot \sqrt[3]{2^1 \cdot 3^2} = \boxed{6\sqrt[3]{18}}$

Extraer factores de un radical

$\sqrt[4]{3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3}$ *(Ejemplo 2)*

1. Descomponemos el número en factores primos
   (Ya nos lo dan descompuesto) $3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3$

2. Dividimos los exponentes de cada factor entre el índice de la raíz:
   - El cociente es el exponente con el que el factor sale fuera.
   - El resto es el exponente con el que el factor queda dentro del radical.

   Para el factor 3 $\longrightarrow$ 9:4 $\longrightarrow$ Cociente 2 y resto 1

   Para el factor 5 $\longrightarrow$ 4:4 $\longrightarrow$ Cociente 1 y resto 0

   Para el factor 7 $\longrightarrow$ 3:4 $\longrightarrow$ Cociente 0 y resto 3

3. Escribimos el resultado
   $\sqrt[4]{3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^3} = 3^2 \cdot 5^1 \cdot \sqrt[4]{3^1 \cdot 7^3} = \boxed{45\sqrt[4]{1029}}$

Extraer factores de un radical

$\sqrt{1620}$ *(Ejemplo 3)*

1. Descomponemos el número en factores primos
   $1620 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^1$

2. Dividimos los exponentes de cada factor entre el índice de la raíz:
   - El cociente es el exponente con el que el factor sale fuera.
   - El resto es el exponente con el que el factor queda dentro del radical.

   Para el factor 2 $\longrightarrow$ 2:2 $\longrightarrow$ Cociente 1 y resto 0

   Para el factor 3 $\longrightarrow$ 4:2 $\longrightarrow$ Cociente 2 y resto 0

   Para el factor 5 $\longrightarrow$ 1:2 $\longrightarrow$ Cociente 0 y resto 1

3. Escribimos el resultado
   $\sqrt{1620} = 2^1 \cdot 3^2 \cdot \sqrt{5^1} = \boxed{18\sqrt{5}}$

$\boxed{\textbf{Suma y resta de radicales}}$ Es necesario que sean **semejantes** (*mismo índice de la raíz y mismo radicando*).

Se suman o se restan los coeficientes y se dejan igual los radicales.

$$\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{4} = \quad (1 - 3 + 5) \cdot \sqrt[3]{4} = \quad \boxed{3\sqrt[3]{4}}$$

$$\sqrt{2} + 4\sqrt[3]{2} - 6\sqrt{2} = \quad (1 - 6) \cdot \sqrt{2} + 4\sqrt[3]{2} = \quad \boxed{-5\sqrt{2} + 4\sqrt[3]{2}}$$

$$2\sqrt{7} + \frac{\sqrt{7}}{3} = \quad \left(2 + \frac{1}{3}\right) \cdot \sqrt{7} = \quad \boxed{\frac{7}{3}\sqrt{7}}$$

Suma y resta de radicales

En ocasiones, es necesario **extraer factores** de los radicales para conseguir que los radicales sean semejantes:

$5\sqrt{3} + \sqrt{27} - 4\sqrt{12}$ *(Ejemplo 1)*

1. Se extraen factores de los radicales.

   $5\sqrt{3} + \sqrt{3^3} - 4\sqrt{2^2 \cdot 3} =$ $\quad 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4 \cdot 2\sqrt{3} =$

   $5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 8\sqrt{3}$

2. Se suman o restan los radicales semejantes.

   $(5 + 3 - 8) \cdot \sqrt{3} = \quad \boxed{0}$

Suma y resta de radicales

En ocasiones, es necesario **extraer factores** de los radicales para conseguir que los radicales sean semejantes:

$2\sqrt[3]{16} - 6\sqrt[3]{250} + 3\sqrt[3]{432}$ *(Ejemplo 2)*

1. Se extraen factores de los radicales.

   $2\sqrt[3]{2^4} - 6\sqrt[3]{2\cdot 5^3} + 3\sqrt[3]{2^4\cdot 3^3} =$ $2\cdot 2\sqrt[3]{2} - 6\cdot 5\sqrt[3]{2} + 3\cdot 2\cdot 3\sqrt[3]{2} =$

   $4\sqrt[3]{2} - 30\sqrt[3]{2} + 18\sqrt[3]{2}$

2. Se suman o restan los radicales semejantes.

   $(4-30+18)\cdot\sqrt[3]{2} =$ $\boxed{-8\sqrt[3]{2}}$

Suma y resta de radicales

En ocasiones, es necesario **extraer factores** de los radicales para conseguir que los radicales sean semejantes:

$2\sqrt{216} - 5\sqrt{150} + \sqrt{96} - 3\sqrt{294}$ *(Ejemplo 3)*

1. Se extraen factores de los radicales.

   $2\sqrt{2^3 \cdot 3^3} - 5\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5^2} + \sqrt{2^5 \cdot 3} - 3\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7^2} =$

   $2 \cdot 2^1 \cdot 3^1\sqrt{2^1 \cdot 3^1} - 5 \cdot 5^1\sqrt{2 \cdot 3} + 2^2\sqrt{2^1 \cdot 3} - 3 \cdot 7^1\sqrt{2 \cdot 3} =$

   $12\sqrt{6} - 25\sqrt{6} + 4\sqrt{6} - 21\sqrt{6}$

2. Se suman o restan los radicales semejantes.

   $(12 - 25 + 4 - 21) \cdot \sqrt{6} = \boxed{-30\sqrt{6}}$

2.4 Reducción de radicales a índice común

2.5 Multiplicación y división de radicales

Reducción de radicales a índice común

Ejemplo 1: Reduce a índice común:

$\sqrt{5}$ y $\sqrt[3]{7^4}$

1. Expresamos como potencia
   $\sqrt{5} = 5^{1/2}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{7^4} = 7^{4/3}$

2. Calculamos el mcm de los denominadores en los exponentes
   $\text{mcm}(2,3) = 6$

3. Reducimos a común denominador y volvemos a forma de radical
   $\sqrt{5} = 5^{1/2} = 5^{3/6} \longrightarrow \sqrt[6]{5^3}$

   $\sqrt[3]{7^4} = 7^{4/3} = 7^{8/6} \longrightarrow \sqrt[6]{7^8}$

Reducción de radicales a índice común

Ejemplo 2: $\sqrt[4]{10}$ y $\sqrt[5]{3}$

1. Expresamos como potencia

   $\sqrt[4]{10} = 10^{1/4}$ $\qquad$ $\sqrt[5]{3} = 3^{1/5}$

2. Calculamos el mcm

   $\text{mcm}(4{,}5) = 20$

3. Reducimos a común denominador y volvemos a forma de radical.

   $\sqrt[4]{10} = 10^{1/4} = 10^{5/20} \longrightarrow \sqrt[20]{10^5}$

   $\sqrt[5]{3} = 3^{1/5} = 3^{4/20} \longrightarrow \sqrt[20]{3^4}$

Simplificación de radicales: Expresando los radicales en forma de potencia, se pueden simplificar, igual que ocurre con las fracciones. Simplificar nos lleva a obtener la **forma exponencial irreducible**.

$$\sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{2^4} = 2^{4/6} = 2^{2/3} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt[9]{27} = \sqrt[9]{3^3} = 3^{3/9} = 3^{1/3} = \sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[16]{256} = \sqrt[16]{2^8} = 2^{8/16} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[10]{243} = \sqrt[10]{3^5} = 3^{5/10} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$$

Simplificación de radicales (y de potencias):

$$\sqrt[6]{8} \longrightarrow \sqrt[6]{2^3} \longrightarrow 2^{3/6} \longrightarrow \boxed{2^{1/2}}$$

$$\sqrt[4]{4} \longrightarrow \sqrt[4]{2^2} \longrightarrow 2^{2/4} \longrightarrow \boxed{2^{1/2}}$$

$$\sqrt[10]{32} \longrightarrow \sqrt[10]{2^5} \longrightarrow 2^{5/10} \longrightarrow \boxed{2^{1/2}}$$

$$\sqrt[9]{27} \longrightarrow \sqrt[9]{3^3} \longrightarrow 3^{3/9} \longrightarrow \boxed{3^{1/3}}$$

$$\sqrt[9]{125} \longrightarrow \sqrt[9]{5^3} \longrightarrow 5^{3/9} \longrightarrow \boxed{5^{1/3}}$$

$$\sqrt[6]{1000} \longrightarrow \sqrt[6]{10^3} \longrightarrow 10^{3/6} \longrightarrow \boxed{10^{1/2}}$$

Simplificación de radicales (y de potencias):

$$\sqrt[6]{8} \longrightarrow \sqrt[6]{2^3} \longrightarrow 2^{3/6} \longrightarrow 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[4]{4} \longrightarrow \sqrt[4]{2^2} \longrightarrow 2^{2/4} \longrightarrow 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[10]{32} \longrightarrow \sqrt[10]{2^5} \longrightarrow 2^{5/10} \longrightarrow 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[9]{27} \longrightarrow \sqrt[9]{3^3} \longrightarrow 3^{3/9} \longrightarrow 3^{1/3} = \sqrt[3]{3}$$

$$\sqrt[9]{125} \longrightarrow \sqrt[9]{5^3} \longrightarrow 5^{3/9} \longrightarrow 5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[6]{1000} \longrightarrow \sqrt[6]{10^3} \longrightarrow 10^{3/6} \longrightarrow 10^{1/2} = \sqrt{10}$$

Ejercicio 1: Expresa en forma de potencia.

(a) $\sqrt[3]{11}$ (b) $\sqrt[7]{20^2}$ (c) $\sqrt[4]{3^3}$ (d) $\sqrt[10]{5^5}$

Ejercicio 2: Expresa en forma de raíz.

(a) $6^{7/3}$ (b) $2^{2/5}$ (c) $5^{11/14}$

Ejercicio 3: Simplifica los siguientes radicales

(a) $\sqrt[6]{121}$ (b) $\sqrt[14]{128}$ (c) $\sqrt[15]{243}$

(d) $\sqrt[9]{64}$ (e) $\sqrt[8]{64}$ (f) $\sqrt[12]{256}$

Ejercicio 4: Expresa con un solo radical

(a) $\sqrt{\sqrt{5}}$ (b) $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$ (c) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{11}}}$ (d) $\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[10]{91}}}$

Multiplicación y división de radicales

Es necesario que tengan índice común.

$\sqrt[7]{5^2} \cdot \sqrt[7]{5^3}$ *Ejemplo 1*

1. Se reducen a índice común.

   Ya tienen índice común

2. Se multiplican o dividen los radicandos

   $\sqrt[7]{5^2 \cdot 5^3} = \boxed{\sqrt[7]{5^5}}$

Multiplicación y división de radicales

Es necesario que tengan índice común.

$\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2^3}$ *Ejemplo 2*

1. Se reducen a índice común.

   $\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[6]{2^3} = \quad \sqrt[6]{2^4} \cdot \sqrt[6]{2^3} =$

2. Se multiplican o dividen los radicandos

   $\sqrt[6]{2^4 \cdot 2^3} = \qquad \boxed{\sqrt[6]{2^7} = 2\sqrt[6]{2}}$

Multiplicación y división de radicales

Es necesario que tengan índice común.

$\sqrt{7} : \sqrt[3]{5}$ *Ejemplo 3*

1. Se reducen a índice común.

   $\sqrt{7} : \sqrt[3]{5} = \quad \sqrt[6]{7^3} : \sqrt[6]{5^2} =$

2. Se multiplican o dividen los radicandos

   $\sqrt[6]{7^3 : 5^2} = \quad \boxed{\sqrt[6]{\frac{7^3}{5^2}}}$

Ejercicio 1: Efectúa estas operaciones:

(a) $\sqrt{4} \cdot \sqrt[3]{5}$

(b) $\sqrt[3]{6} : \sqrt[4]{4}$

(c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{4}$

(d) $\sqrt{5} : \sqrt[6]{9}$

Ejercicio 2: Simplifica estos radicales:

(a) $\sqrt{\sqrt[4]{8}}$

(b) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{10}}}$

(c) $\sqrt{\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^6}$

(d) $\sqrt{\left(\sqrt[5]{3^{20}}\right)^{1/2}}$

Ejercicio 3: Simplifica estas operaciones con raíces:

(a) $-\sqrt{8} + 5\sqrt{50} - \dfrac{4}{5}\sqrt{18} + \sqrt{98} =$

(b) $14\sqrt[4]{48} + 3\sqrt[4]{80} - \sqrt[4]{243} - 9\sqrt[4]{5} =$

Ejercicio 1: Efectúa estas operaciones:

(a) $\sqrt{4} \cdot \sqrt[3]{5}$

$\sqrt[6]{4^3} \cdot \sqrt[6]{5^2}$

$\sqrt[6]{4^3 : 5^2}$

$\boxed{\sqrt[6]{\frac{4^3}{5^2}}}$

(b) $\sqrt[3]{6} : \sqrt[4]{4}$

$\sqrt[12]{6^4} : \sqrt[12]{4^3}$

$\sqrt[12]{6^4 : 4^3}$

$\boxed{\sqrt[12]{\frac{6^4}{}}}$

Ejercicio 1: Efectúa estas operaciones:

(c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{4}$

$\sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{4}$

$\sqrt[6]{2^3 : 4}$

$\boxed{\sqrt[6]{2}}$

(d) $\sqrt{5} : \sqrt[6]{9}$

$\sqrt[6]{5^3} : \sqrt[6]{9}$

$\sqrt[6]{5^3 : 9}$

$\boxed{\sqrt[6]{\frac{5^3}{9}}}$

Ejercicio 2: Simplifica estos radicales:

(a) $\sqrt{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[8]{8}$

(b) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{10}}} = \sqrt[12]{10}$

(c) $\sqrt{\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^6} = \sqrt[6]{5^{12}} = \boxed{5^2}$

(d) $\sqrt{\left(\sqrt[5]{3^{20}}\right)^{1/2}} = \sqrt[10]{3^{10}} = \boxed{3}$

Ejercicio 3: Simplifica estas operaciones con raíces:

(a) $-\sqrt{8} + 5\sqrt{50} - \frac{4}{5}\sqrt{18} + \sqrt{98} =$

$$-\sqrt{2^3} + 5\sqrt{2 \cdot 5^2} - \frac{4}{5}\sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 7^2} =$$

$$-2 \cdot \sqrt{2} + 5 \cdot 5\sqrt{2} - \frac{4}{5} \cdot 3\sqrt{2} + 7 \cdot \sqrt{2} =$$

$$-2\sqrt{2} + 25\sqrt{2} - \frac{12}{5}\sqrt{2} + 7\sqrt{2} =$$

$$\left(-2 + 25 - \frac{12}{5} + 7\right) \cdot \sqrt{2}$$

$$\boxed{\frac{138\sqrt{2}}{5}}$$

Ejercicio 3: Simplifica estas operaciones con raíces:

(b) $14\sqrt[4]{48} + 3\sqrt[4]{80} - \sqrt[4]{243} - 9\sqrt[4]{5} =$

$$14\sqrt[4]{2^4 \cdot 3} + 3\sqrt[4]{2^4 \cdot 5} - \sqrt[4]{3^5} - 9\sqrt[4]{5} =$$

$$14 \cdot 2\sqrt[4]{3} + 3 \cdot 2\sqrt[4]{5} - 3 \cdot \sqrt[4]{3} - 9\sqrt[4]{5} =$$

$$28\sqrt[4]{3} + 6\sqrt[4]{5} - 3 \cdot \sqrt[4]{3} - 9\sqrt[4]{5} =$$

$$\boxed{25\sqrt[4]{3} - 3\sqrt[4]{5}}$$

Operaciones con radicales

$\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ (Ejemplo 1)

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$

$\sqrt{6}-\sqrt{4}$

$\boxed{\sqrt{6}-2}$

$\sqrt{7}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})$ (Ejemplo 2)

$\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}$

$\boxed{\sqrt{21}+\sqrt{35}}$

Operaciones con radicales

$$-\sqrt{5}\cdot\left(2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

(Ejemplo 3)

$$-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{3}$$

$$-2\sqrt{15}+\frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$\left(-2+\frac{1}{3}\right)\cdot\sqrt{15}$$

$$\frac{-5}{3}\cdot\sqrt{15}$$

$$\boxed{\frac{-5\sqrt{15}}{3}}$$

2.6 Potencias y Raíces de radicales

Potencias y raíces de radicales

$\left(\sqrt{5}\right)^3$ *(Ejemplo 1)*

1. Se expresa en forma de potencia de exponente fraccionario.

   $\left(5^{1/2}\right)^3$

2. Se utilizan las propiedades de las potencias.

   $\boxed{5^{3/2}}$

Potencias y raíces de radicales

$\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{14}}}$ *(Ejemplo 2)*

1. Se expresa en forma de potencia de exponente fraccionario.

$$\sqrt[4]{\sqrt{14^{1/3}}} = \quad \sqrt[4]{\left(14^{1/3}\right)^{1/2}} = \quad \left[\left(14^{1/3}\right)^{1/2}\right]^{1/4} =$$

2. Se utilizan las propiedades de las potencias.

$$14^{1/24} = \quad \boxed{\sqrt[24]{14}}$$

Potencias y raíces de radicales

$$\left(\sqrt{\left(\sqrt[3]{12}\right)^2}\right)^5$$

(Ejemplo 3)

1. Se expresa en forma de potencia de exponente fraccionario.

$$\left(\sqrt{\left(12^{1/3}\right)^2}\right)^5 = \left(\left[\left(12^{1/3}\right)^2\right]^{1/2}\right)^5 =$$

2. Se utilizan las propiedades de las potencias.

$$(12)^{10/6} = (12)^{5/3} = \boxed{\sqrt[3]{12^5}}$$

Tema 2. Potencias, Radicales y Logaritmos

- **1. Potencias.**
  - *Potencias de exponente negativo*
  - *Propiedades de las potencias*
- **2. Radicales.**
  - *2.1 Potencias de exponente fraccionario*
  - *2.2 Extraer factores de un radical*
  - *2.3 Suma y resta de radicales*
  - *2.4 Reducción de radicales a índice común*
  - *2.5 Multiplicación y división de radicales*
  - *2.6 Potencias y raíces de radicales*
- **3. Racionalización.**

Racionalización

Racionalizar una fracción con radicales en el denominador es hallar una fracción equivalente **sin radicales** en el denominador.

1. **Caso 1:** Un solo radical en el denominador.

   $$\frac{3}{\sqrt{5}} \qquad \frac{1}{\sqrt[5]{6^2}} \qquad \frac{10}{\sqrt[8]{5^3}}$$

2. **Caso 2:** Un binomio que incluye un radical en el denominador.

   $$\frac{5}{\sqrt{2}+4} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \qquad \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

Caso 1: Un solo radical en el denominador

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$ *(Ejemplo 1)*

1. Multiplicamos numerador y denominador por una raíz que permita que se vaya la raíz del denominador.

$$\frac{3 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}$$

2. Resolvemos las operaciones.

$$\boxed{\frac{3 \cdot \sqrt{5}}{5}}$$

Caso 1: Un solo radical en el denominador

$$\frac{1}{\sqrt[5]{6^2}}$$

(Ejemplo 2)

1. Multiplicamos numerador y denominador por una raíz que permita que se vaya la raíz del denominador.

$$\frac{1 \cdot \sqrt[5]{6^3}}{\sqrt[5]{6^2} \cdot \sqrt[5]{6^3}}$$

2. Resolvemos las operaciones.

$$\frac{\sqrt[5]{6^3}}{\sqrt[5]{6^5}} = \boxed{\frac{\sqrt[5]{6^3}}{6}}$$

Caso 1: Un solo radical en el denominador

$\frac{10}{\sqrt[8]{5^3}}$ *(Ejemplo 3)*

1. Multiplicamos numerador y denominador por una raíz que permita que se vaya la raíz del denominador.

   $$\frac{10 \cdot \sqrt[8]{5^5}}{\sqrt[8]{5^3} \cdot \sqrt[8]{5^5}}$$

2. Resolvemos las operaciones.

   $$\frac{10 \cdot \sqrt[8]{5^5}}{\sqrt[8]{5^8}} = \frac{10 \cdot \sqrt[8]{5^5}}{5} = \boxed{2 \cdot \sqrt[8]{5^5}}$$

Ejercicio 1: Racionaliza las siguientes fracciones:

(a) $\dfrac{4}{\sqrt{7}}$ (b) $\dfrac{-3}{\sqrt{2}}$ (c) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{2}}$

(d) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}$ (e) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3^3}}$ (f) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$

Ejercicio 2: Realiza las siguientes operaciones con radicales:

(a) $\sqrt[3]{135} - \sqrt[3]{625} + 3\sqrt[3]{1080}$

(b) $\sqrt[5]{7^3} \cdot \sqrt{7}$ (c) $\sqrt[4]{3^3} : \sqrt[6]{3^3}$

Conjugado de una expresión

El **conjugado** de una expresión es el resultado de cambiar el signo (*las sumas se convierten en restas; las restas se convierten en sumas*)

	Conjugado
A + B	A - B
A - B	A + B
$3-\sqrt{2}$	$3+\sqrt{2}$
$\sqrt{5}+\sqrt{3}$	$\sqrt{5}-\sqrt{3}$
$\sqrt{3}-1$	$\sqrt{3}+1$

Conjugado de una expresión

Si multiplicamos una expresión por su conjugado el resultado es el cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término.

$$\boxed{(A+B)\cdot(A-B) \quad = \quad A^2 - B^2}$$

$$(3-\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{2}) \quad = \quad 3^2-(\sqrt{2})^2 \quad = \quad 9-2 \quad = \quad 7$$

$$(\sqrt{5}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3}) \quad = \quad (\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2 \quad = \quad 5-3 \quad = \quad 2$$

$$(\sqrt{3}-1)\cdot(\sqrt{3}+1) \quad = \quad (\sqrt{3})^1-1^2 \quad = \quad 3-1 \quad = \quad 2$$

$\boxed{\text{Caso 2:}}$ Binomio con radical en el denominador

$$\frac{5}{\sqrt{2}+4}$$

(Ejemplo 1)

1. Multiplicamos numerador y denominador por el **conjugado** del denominador.

$$\frac{5\cdot(\sqrt{2}-4)}{(\sqrt{2}+4)\cdot(\sqrt{2}-4)}$$

2. Resolvemos y simplificamos.

$$\frac{5\sqrt{2}-20}{(\sqrt{2})^2-4^2} = \frac{5\sqrt{2}-20}{2-16} = \boxed{\frac{20-5\sqrt{2}}{14}}$$

$\boxed{\text{Caso 2:}}$ Un binomio que incluye (*al menos*) un radical en el denominador

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

(Ejemplo 2)

1. Multiplicamos numerador y denominador por el **conjugado** del denominador.

$$\frac{1\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{5})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{5})}$$

2. Resolvemos y simplificamos.

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{9-25} = \boxed{\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{16}}$$

$\boxed{\text{Caso 2:}}$ **Un binomio que incluye (*al menos*) un radical en el denominador**

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$ *(Ejemplo 3)*

1. Multiplicamos numerador y denominador por el **conjugado** del denominador.

$$\frac{1\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$

2. Resolvemos y simplificamos.

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3} = \boxed{-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

Ejercicio 2: Racionaliza las siguientes fracciones.

(a) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(b) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

(c) $\dfrac{3\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

(d) $\dfrac{-2}{\sqrt{3}-8}$

(e) $\dfrac{-10}{\sqrt{13}-5}$

(f) $\dfrac{2}{\sqrt{17}}$

(g) $\dfrac{-25}{\sqrt{2}}$

(h) $\dfrac{5}{3\sqrt[7]{2^2}}$

Tema 2. Potencias, Radicales y Logaritmos

- **1. Potencias.**
  - *Potencias de exponente negativo*
  - *Propiedades de las potencias*
- **2. Radicales.**
  - *2.1 Potencias de exponente fraccionario*
  - *2.2 Extraer factores de un radical*
  - *2.3 Suma y resta de radicales*
  - *2.4 Reducción de radicales a índice común*
  - *2.5 Multiplicación y división de radicales*
  - *2.6 Potencias y raíces de radicales*
- **3. Racionalización.**
- **4. Notación científica.**

Notación científica

Es una forma de expresar números muy grandes y muy pequeños con objeto de facilitar su escritura, su expresión y los cálculos que se realicen con el.

- **Números muy grandes:**
  1. Distancia Tierra-Plutón 5 769 000 000 km $= 5'769 \cdot 10^6$ km
  2. Deuda Pública España 1 138 899 000 000 euros $\approx 1'1389 \cdot 10^{12}$ euros
  3. Masa de la Luna 74 000 000 000 000 000 000 toneladas $= 7'4 \cdot 10^{19}$ toneladas $= 7'4 \cdot 10^{22}$ kg

- **Números muy pequeños**
  1. Un nanogramo 0'000 000 001 gramos $= 1 \cdot 10^{-9}$ gramos $= 1 \cdot 10^{-12}$ kg
  2. 0'000 0015 cm $= 1'5 \cdot 10^{-6}$ cm $= 1'5 \cdot 10^{-8}$ m

Notación científica

(*Potencias de base 10*)

Una **potencia de base 10 y exponente positivo** es igual a la unidad seguida de tantos ceros como indique el exponente:

$10^2 = 100$

$10^3 = 1000$

$10^4 = 10\ 000$

$10^5 = 100\ 000$

$10^6 = 1\ 000\ 000$

$10^7 = 10\ 000\ 000$

$10^9 = 1\ 000\ 000\ 000$ (Mil millones)

$10^{12} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000$ (Un billón)

$10^{18} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$ (Un trillón)

Notación científica

(*Potencias de base 10*)

Una **potencia de base 10 y exponente negativo** es igual a la unidad dividida entre dicha potencia con exponente positivo:

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0'1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0'01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0'001$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10000} = 0'000\ 1$$

$$10^{-5} = \frac{1}{100000} = 0'000\ 01$$

$$10^{-6} = \frac{1}{1000000} = 0'000\ 001$$

$$10^{-9} = \frac{1}{1000000000} = 0'000\ 000\ 001$$

$$10^{12} = \frac{1}{1000000000000} = 0'000\ 000\ 000\ 001$$

Notación científica

Notación científica (Normas):

Un número en **notación científica** consta de dos factores: un número decimal y una potencia de base 10.

- El número decimal es mayor o igual que 1 y menor que 10.
- La potencia de base 10 tiene exponente entero.

Ejemplos:

1. $222\ 000\ 000$ euros $= 2'22 \cdot 10^8$ euros
2. $0'000\ 000\ 000\ 040\ 9 = 4'09 \cdot 10^{-11}$
3. $0'000\ 000\ 987 = 9'87 \cdot 10^{-7}$

Notación científica

Cómo convertir a notación científica (números grandes):

56 000 000

1. **(Parte entera)** Colocamos la coma decimal a la derecha de la primera cifra distinta de cero.

   5'6

2. **(Potencia de 10)** La potencia de 10 estará elevada al número de cifras que hay desde el nuevo lugar de la coma hasta el final del número.

   $\mathbf{5'6 \cdot 10^{7}}$

Notación científica

Cómo convertir a notación científica (números pequeños):

0’000 000 07

1. **(Parte entera)** Colocamos la coma decimal a la derecha de la primera cifra distinta de cero.

   $\mathbf{7}$

2. **(Potencia de 10)** La potencia de 10 estará elevada en negativo al número de cifras que se ha desplazado la coma.

   $\mathbf{7} \cdot \mathbf{10}^{-8}$

Notación científica: Operaciones

Suma y resta:

$1'04 \cdot 10^{-7} + 2'6 \cdot 10^{-7}$ *Ejemplo 1*

1. Se preparan los números, de modo que ambas cantidades tengan la misma potencia de base 10.

   (Ya tienen la misma potencia de base 10)

2. Se saca factor común la potencia base 10.

   $(1'04 + 2'6) \cdot 10^{-7}$

3. Se suman o se restan los números, manteniendo la misma potencia base 10.

   $\boxed{3'64 \cdot 10^{-7}}$

Notación científica: Operaciones

Suma y resta:

$2'1 \cdot 10^3 + 3'2 \cdot 10^2$ *Ejemplo 2*

1. Se preparan los números, de modo que ambas cantidades tengan la misma potencia de base 10.

   $2'1 \cdot 10^3 + 3'2 \cdot 10^2 = 2'1 \cdot 10 \cdot 10^2 + 3'2 \cdot 10^2 =$

   $21 \cdot 10^2 + 3'2 \cdot 10^2$

2. Se saca factor común la potencia base 10.

   $(21 + 3'2) \cdot 10^2$

3. Se suman o se restan los números, manteniendo la misma potencia base 10.

   $24'2 \cdot 10^2 = 2'42 \cdot 10 \cdot 10^2 = \boxed{2'42 \cdot 10^3}$

Notación científica: Operaciones

Suma y resta:

$3'9 \cdot 10^{-3} + 1'27 \cdot 10^{-2}$ *Ejemplo 3*

1. Se preparan los números, de modo que ambas cantidades tengan la misma potencia de base 10.

   $3'9 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-2} + 1'27 \cdot 10^{-2} = \dfrac{3'9}{10} \cdot 10^{-2} + 1'27 \cdot 10^{-2} =$

   $0'39 \cdot 10^{-2} + 1'27 \cdot 10^{-2}$

2. Se saca factor común la potencia base 10.

   $(0'39 + 1'27) \cdot 10^{-2}$

3. Se suman o se restan los números, manteniendo la misma potencia base 10.

   $\boxed{1'66 \cdot 10^{-2}}$

Ejercicio 1: Expresa los siguientes números en notación científica:

(a) 80 000 000 000 000 000 =

(b) 0'000 804 =

(c) 37 404 000 000 =

(d) 0'000 000 000 090 =

Ejercicio 2: Realiza las siguientes sumas en notación científica:

(a) $3'1 \cdot 10^6 + 2'8 \cdot 10^5 =$

(b) $5'1 \cdot 10^{-7} + 9 \cdot 10^{-8} =$

Ejercicio 3: Racionaliza las siguientes fracciones:

(a) $\dfrac{-3}{\sqrt{6}}$

(b) $\dfrac{7}{\sqrt[3]{10}}$

(c) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}+\sqrt{5}}$

(d) $\dfrac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{5}}$

Ejercicio 2: Realiza las siguientes sumas en notación científica:

(a) $3'1 \cdot 10^6 + 2'8 \cdot 10^5 =$

$$3'1 \cdot 10 \cdot 10^5 + 2'8 \cdot 10^5$$

$$31 \cdot 10^5 + 2'8 \cdot 10^5$$

$$33'8 \cdot 10^5$$

$$3'38 \cdot 10 \cdot 10^5$$

$$\boxed{3'38 \cdot 10^6}$$

Ejercicio 2: Realiza las siguientes sumas en notación científica:

$$\text{(b) } 5'1 \cdot 10^{-7} + 9 \cdot 10^{-8} =$$

$$5'1 \cdot 10 \cdot 10^{-8} + 9 \cdot 10^{-8}$$

$$51 \cdot 10^{-8} + 9 \cdot 10^{-8}$$

$$60 \cdot 10^{-8}$$

$$6 \cdot 10 \cdot 10^{-8}$$

$$\boxed{6 \cdot 10^{-7}}$$

Ejercicio 3: Racionaliza las siguientes fracciones:

(a) $\dfrac{-3}{\sqrt{6}} = \dfrac{-3 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}$

$\dfrac{-3\sqrt{6}}{6} = \boxed{\dfrac{-\sqrt{6}}{2}}$

(b) $\dfrac{7}{\sqrt[3]{10}} = \dfrac{7 \cdot \sqrt[3]{10^2}}{\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{10^2}}$

$\boxed{\dfrac{7 \cdot \sqrt[3]{10^2}}{10}}$

Ejercicio 3: Racionaliza las siguientes fracciones:

(c) $$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{5})}{(\sqrt{10}+\sqrt{5})\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{5})}$$

$$\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{5})}{10-5} = \boxed{\frac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{5})}{5}}$$

(d) $$\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})\cdot(1+\sqrt{5})}$$

$$\frac{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{5})}{1-5} = \boxed{\frac{-\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{5})}{4}}$$

Notación científica: Operaciones

Multiplicación y división:

$(5'2 \cdot 10^{-5}) \cdot 2 \cdot 10^{-3}$ *(Ejemplo 1)*

1. Se multiplican o dividen los números (*de forma normal*).

   $5'2 \cdot 2 = 10'4$

2. Se multiplican o dividen las potencias de base 10 (*producto o cociente de potencias con la misma base*).

   $10^{-5} \cdot 10^{-3} = 10^{-8}$

   Resultado: $10'4 \cdot 10^{-8} = 1'04 \cdot 10 \cdot 10^{-8} = \boxed{1'04 \cdot 10^{-7}}$

Notación científica: Operaciones

Multiplicación y división:

$(1'2 \cdot 10^6) : (2'4 \cdot 10^8)$ *(Ejemplo 2)*

1. Se multiplican o dividen los números (*de forma normal*).

   $1'2 : 2'4 = 0'5$

2. Se multiplican o dividen las potencias de base 10 (*producto o cociente de potencias con la misma base*).

   $10^6 : 10^8 = 10^{-2}$

   Resultado: $0'5 \cdot 10^{-2} = \dfrac{5}{10} \cdot 10^{-2} = 5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-2} = \boxed{5 \cdot 10^{-3}}$

Notación científica: Operaciones

Multiplicación y división:

$(1'2 \cdot 10^{-2}) : (6 \cdot 10^{2})$ *(Ejemplo 3)*

1. Se multiplican o dividen los números (*de forma normal*).

   $1'2 : 6 = 0'2$

2. Se multiplican o dividen las potencias de base 10 (*producto o cociente de potencias con la misma base*).

   $10^{-2} : 10^{2} = 10^{-4}$

Resultado: $0'2 \cdot 10^{-4} = \frac{2}{10} \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-4} = \boxed{2 \cdot 10^{-5}}$

Tema 2. Potencias, Radicales y Logaritmos

- **1. Potencias.**
  - *Potencias de exponente negativo*
  - *Propiedades de las potencias*
- **2. Radicales.**
  - *2.1 Potencias de exponente fraccionario*
  - *2.2 Extraer factores de un radical*
  - *2.3 Suma y resta de radicales*
  - *2.4 Reducción de radicales a índice común*
  - *2.5 Multiplicación y división de radicales*
  - *2.6 Potencias y raíces de radicales*
- **3. Racionalización.**
- **4. Notación científica.**
- **5. Logaritmos. Propiedades de los logaritmos.**

Logaritmos:

- Descubiertos en el siglo XV, este método contribuyó al avance de la ciencia, y especialmente de la astronomía, facilitando la resolución de cálculos muy complejos. Los logaritmos fueron utilizados habitualmente en geodesia, navegación marítima y otras ramas de la matemática aplicada.

- Otras aplicaciones:

  - *Medicamentos*
  - *Terremotos (Escala de Richter)*
  - *Calculos Económicos (Interés complejo)*

Logaritmos

Dados dos números positivos a y b, con a $\neq 1$, el logaritmo en base a de b, $log_a b$, es el exponente al que hay que elevar a para obtener b.

$$\boxed{log_a b = c \text{ si se cumple que } a^c = b}$$

$log_2 16 =$

$log_6 36 =$

$log_3 \dfrac{1}{9} =$

$log_5 125 =$

$log_2 0'5 =$

$log_5 \dfrac{1}{3125} =$

Logaritmos

Dados dos números positivos a y b, con a $\neq 1$, el logaritmo en base a de b, $log_a b$, es el exponente al que hay que elevar a para obtener b.

$$\boxed{log_a b = c \text{ si se cumple que } a^c = b}$$

$log_2 16 = log_2 2^4 = 4$

$log_6 36 = log_6 6^2 = 2$

$log_3 \frac{1}{9} = log_3 3^{-2} = \text{-}2$

$log_5 125 = log_5 5^3 = 3$

$log_2 0'5 = log_2 2^{-1} = \text{-}1$

$log_5 \frac{1}{3125} = log_5 5^{-5} = \text{-}5$

Logaritmo decimal (base 10) y neperiano (base e)

Existen dos tipos de logaritmos más utilizados:

1. **Logaritmo decimal:** Cuando el logaritmo tiene base 10. En ese caso la base no se escribe. Se obtiene en la calculadora pulsando *log*.

2. **Logaritmo neperiano:** Cuando el logaritmo tiene base el número e $= 2'71828\ldots$. Se representa como *ln*.

   El logaritmo neperiano se utiliza, por ejemplo, para representar la **escala de Richter** que mide los terremotos:

   $$\boxed{\ln \textit{Fuerza terremoto} = \text{Escala Richter}}$$

   Si un terremoto es 4'5 en la escala Richter (*mini-terremoto*) tiene una fuerza de 90 (*aprox.*)

   Si un terremoto es 9 en la escala Richter (*super-destructor*) tiene una fuerza de 8100 (*aprox.*) (Noventa veces más fuerte)

Logaritmo decimal (base 10)

Cuando el logaritmo tiene base 10. En ese caso la base no se escribe. Se obtiene en la calculadora pulsando *log*.

$\log 10 = 1$ porque $10^1 = 10$

$\log 100 = 2$ porque $10^2 = 100$

$\log 0'1 =$ -1 porque $10^{-1} = 0'1$

$\log 0'01 =$ -2 porque $10^{-2} = 0'01$

$\log 10\ 000 = 4$ porque $10^4 = 10\ 000$

$\log 0'000\ 001 =$ -6 porque $10^{-6} = 0'000\ 001$

Para calcular el logaritmo de valores que no sean potencias de 10, será necesario utilizar la calculadora.

Logaritmo neperiano (base e $=$ 2'71828. . .)

Cuando el logaritmo tiene el número e $=$ 2'71828. . . . Se representa con *ln*.

ln e $=$ 1 porque $e^1 = e$

ln $e^5 = 5$

ln $\frac{1}{e^2}$ $=$ -2 porque $\frac{1}{e^2} = e^{-2}$

ln $\frac{1}{e^5}$ $=$ -5 porque $\frac{1}{e^5} = e^{-5}$

Para calcular el logaritmo de valores que no sean potencias de e $=$ 2'71828. . . , será necesario utilizar la calculadora.

Propiedades de los logaritmos

- **Propiedad 1**

$$\boxed{log_a 1 = 0} \text{ para cualquier base } a$$

- **Propiedad 2**

$$\boxed{log_a a = 1}$$

(si la base y el número del que se calcula el logaritmo son iguales, el logaritmo vale 1)

Propiedades de los logaritmos

- **Propiedad 3:** El **logaritmo de un producto** es la suma de los logaritmos:

$$\boxed{log_a b \cdot c = log_a b + log_a c}$$

Ejemplo 1: $log_2 8 \cdot 4 = log_2 8 + log_2 4 = 3 + 2 = 5$

Ejemplo 2: $log 25 + log 4 = log 25 \cdot 4 = log 100 = 2$

Ejemplo 3:

$$log_7 49\sqrt{7} = log_7 49 + log_7 \sqrt{7} = log_7 7^2 + log_7 7^{1/2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Propiedades de los logaritmos

- **Propiedad 4:** El **logaritmo de un cociente** es la diferencia de los logaritmos:

$$\boxed{log_a \frac{b}{c} = log_a b - log_a c}$$

Ejemplo 1: $$log_3 \frac{1}{9} = log_3 1 - log_3 9 = 0 - 2 = -2$$

Ejemplo 2: $$log_5 10 - log_5 2 = log_5 \frac{10}{2} = log_5 5 = 1$$

Ejemplo 3: $$log 3000 - log 30 = log \frac{3000}{30} = log 100 = 2$$

Propiedades de los logaritmos

- **Propiedad 5:** El **logaritmo de una potencia** es el producto del exponente por el logaritmo de la base:

$$\boxed{log_a b^n = n \cdot log_a b}$$

Ejemplo 1: $log_2 9 = log_2 3^2 = 2 \cdot log_2 3$

Ejemplo 2: $7 ln 2 = ln 2^7 = ln 128$

Ejemplo 3:

$$log_4 32 = log_4(4^2 \cdot 2) = log_4 4^2 + log_4 2 = 2 + log_4 4^{1/2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Ejercicio 1: Resuelve utilizando las propiedades de los logaritmos:

(a) $log_5 1 + 2log_5 5 =$

(b) $log_2 24 - log_2 6 =$

(c) $log 2 + log 25 - log 5 =$

(d) $log_{12} 18 + log_{12} 4 + log_{12} 2 =$

(e) $log_6 150 - log_6 25 =$

Ejercicio 2: Resuelve utilizando las propiedades de los logaritmos:

(a) $log_{15}15 + log10 + lne =$

(b) $3log_4 2 + log_4 32 =$

(c) $log_6 108 - log_6 3 =$

(d) $log_2 18 + 2log_2 3 - log_2 81 =$

Ejercicio 3: Expresa como un único logaritmo:

(a) $3log_2 5 + log_2 7 =$

(b) $2log_5 3 + log_5 10 =$

(c) $log_4 9 - 2log_4 5 =$

(d) $3log_7 1 + log_7 6 =$

Ejercicio 4: Resuelve utilizando las propiedades de los logaritmos:

(a) $log 5 + 2 \cdot log 5 + log 8 =$ (b) $log_7 70 - log_7 20 - log_7 5 =$

(c) $log_5 30 + log_5 15 - log_5 18 =$ (d) $log_6 \frac{1}{3} + log_6 3 - (log_6 2 + log_6 3) =$

Ejercicio 5: Calcula, sin calculadora, los siguientes logaritmos:

(a) $3log_2 5 + log_2 7 =$ (b) $2log_5 3 + log_5 10 =$

(c) $log_4 9 - 2log_4 5 =$ (d) $3log_7 1 + log_7 6 =$

Ejercicio 6: Calcula $log 7$ sabiendo que $log 0'7 =$ -0'1549

Ejercicio 4: Resuelve utilizando las propiedades de los logaritmos:

(a) $log 5 + 2 \cdot log 5 + log 8 =$

$log 5 + log 5^2 + log 8$

$log 5 \cdot 5^2 \cdot 8$

$log 1000$

$\boxed{3}$ (ya que $10^3 = 1000$)

(b) $log_7 70 - log_7 20 - log_7 5 =$

$log_7 \frac{70}{20} - log_7 5$

$log_7 3'5 - log_7 5$

$log_7 \frac{3'5}{5}$

$\boxed{log_7 0'7}$

Ejercicio 4: Resuelve utilizando las propiedades de los logaritmos:

(c) $log_5 30 + log_5 15 - log_5 18 =$

$log_5 30 \cdot 15 - log_5 18$

$log_5 \dfrac{30 \cdot 15}{18}$

$log_5 25$

$\boxed{2}$ (ya que $5^2 = 25$)

(d) $log_6 \dfrac{1}{3} + log_6 3 - (log_6 2 + log_6 3) =$

$log_6 \dfrac{1}{3} \cdot 3 - log_6 2 \cdot 3$

$log_6 1 - log_6 6$

0 - 1

$\boxed{-1}$

Ejercicio 6: Calcula $log 7$ sabiendo que $log 0'7$ = -0'1549

Tenemos que relacionar $log 0'7$ (conocido) con $log 7$ (desconocido)

$$\text{-0'1549} = log 0'7 = log \frac{7}{10}$$

Pero utilizando la Propiedad 4 sabemos que:

$$log \frac{7}{10} = \text{log 7 - log 10 siendo log 10} = 1$$

Por lo tanto: $\quad$ $\text{-0'1549} = \text{log 7 - 1}$

Resolvemos la ecuación y queda:

$$\text{1 - 0'1549} = \text{log 7} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\text{0'8451} = \text{log 7}}$$

Ejercicio 7: Calcula x para que se resuelva la igualdad:

(a) $\log_x \frac{4}{9} = 2$

(b) $\log_x \sqrt{5} = \frac{1}{2}$

(c) $\log_x \sqrt[3]{6} = \frac{1}{3}$

(d) $\log_x 32 = 10$

Ejercicio 8: Resuelve estas ecuaciones con logaritmos:

(a) $\log x + \log 2 = \log 20$

(b) $\log x + \log 2x = \log 50$

(c) $\log 2x - 2\log 3 = \log 2$

(d) $\log_2 x^2 - \log_2 x = 3$