

¿Cómo se colocan los trastes de una guitarra?



Autores:

André Novoa Ojea

Pablo Rodríguez Martínez

Rafael Viso Murciego

Trabajo realizado en el bachillerato **STEMBACH**

Bienio 2019/2021

Bajo la dirección conjunta de:

Dr. José Ángel Cid Araujo
Departamento de Matemáticas

Benjamín Macía Fernández
Departamento de Matemáticas

UniversidadeVigo



RESUMEN

Los instrumentos musicales que utilizan acordes fijos (piano, guitarra...) normalmente utilizan la escala temperada. La posición a la que se colocan los trastes de una guitarra depende de encontrar una construcción aproximada de $\sqrt[12]{2}$, ya que una solución exacta con regla y compás no es posible. El artesano sueco Daniel Strähle encontró una construcción muy sencilla y precisa, basada en la geometría mediante un método puramente artesanal, sin tener apenas conocimientos matemáticos. Ésta fue erróneamente refutada por el prestigioso matemático Jacob Faggot debido a un error de cálculo. En este trabajo analizaremos las distintas escalas que se han ido utilizando a lo largo de la historia y los problemas que estas presentaban que llevaron a la creación de una nueva escala. Analizaremos también el error cometido por Faggot al evaluar el método diseñado por Strähle, y por qué dicho método resulta tan efectivo, bajo un punto de vista matemático.

ABSTRACT

Musical instruments that use fixed chords (piano, guitar ...) normally use the tempered scale. The position to which the frets of a guitar are placed depends on finding an approximate construction of $\sqrt[12]{2}$, since an exact solution with ruler and compass is not possible. The Swedish craftsman Daniel Strähle found a very simple and precise construction, based on geometry through a purely artisanal method, with hardly any mathematical knowledge. This was wrongly refuted by the prestigious mathematician Jacob Faggot due to a miscalculation. In this work we will analyze the different scales that have been used throughout history and the problems they presented that led to the creation of a new scale. We will also analyze the mistake Faggot made while checking Strähle's method validity, and why such method is so effective, explained from a mathematical base.

Índice

INTRODUCCIÓN.....	4
1.- La escala pitagórica.....	4
2.- La escala Cromática.....	7
3.- La escala temperada	9
4.-¿Cómo colocaríamos los trastes en una guitarra?.....	11
5.- Construcción de $\sqrt[12]{2}$. Construcciones con regla y compás	11
6.- El método desarrollado por Strähle.....	13
7.- El error de Faggot.....	14
8.- La gráfica que obtiene Barbour.....	15
9.- Obtención de la fórmula de Strähle.....	16
Aproximación por interpolación	20
Aproximación de Barbour mediante fracción continua	21
10.-Propuesta de continuidad	23
BIBLIOGRAFÍA	24

INTRODUCCIÓN

La colocación de los trastes en una guitarra, es una cuestión de mayor complejidad de lo que aparenta, ya que deben posicionarse a lo largo del mástil a una distancia determinada para que produzcan sonidos considerados armoniosos en el campo de la música. Esto representó un problema durante muchos años tanto para los músicos como los matemáticos, y durante un largo período de la historia no hubo ningún método preciso para establecer dichas distancias sin cometer algún error.

Múltiples escalas fueron creadas, pero todas contenían algún problema de precisión que les impedía ser exactas. Por más que se probaron distintos métodos, ninguno dio con la solución hasta que, sorprendentemente, en 1743, un artesano sueco que apenas poseía conocimientos matemáticos, Daniel Strähle, halló un método que demostró ser realmente útil, y que sigue siendo de relevancia en la actualidad. Sin embargo, no fue hasta mucho más adelante que este método fue reconocido por su utilidad y se pudo explicar matemáticamente su fundamento, que resultó además ser increíblemente preciso.

Sin embargo, la búsqueda de un método para la creación de una escala perfecta comenzó mucho antes, con los pitagóricos, y la conocida como escala pitagórica.

1.- La escala pitagórica

La primera escala descrita es la escala pitagórica. Su creación se remonta a la antigua Grecia, cuando Pitágoras encontró relaciones armoniosas del sonido al escuchar los golpes que daban dos martillos de diferente masa sobre un mismo yunque. Los dos martillos que guardaban una relación de $1/2$ de masa de uno frente al otro creaban un sonido agradable al ser golpeados al unísono.

A partir de ahí los pitagóricos descubrieron que los intervalos entre notas musicales podían ser representados por razones de números enteros, y lo comprobaron utilizando el "Canon", un instrumento compuesto por una sola cuerda al que le colocaban una especie de traste móvil (Figura 1a).

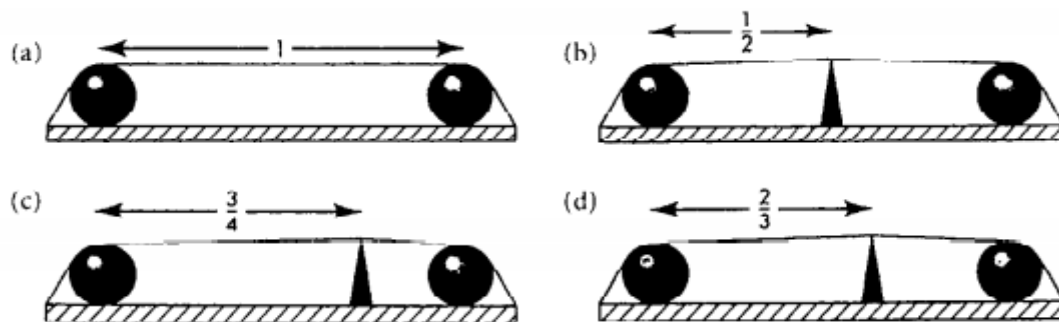


Figura 1

Al colocar el traste a la mitad de la cuerda (proporción $1/2$), (Figura 1b), el sonido resultante "sonaba bien". El problema con la proporción $1/2$ es que genera un sonido muy parecido al original, por lo que no se considera una nota nueva sino la misma nota en diferente tonalidad. Esta relación se conoció como la **octava**.

En cambio al dividir la cuerda en la proporción $1/3$, (Figura 1d), el sonido que se producía no solo sonaba bien sino que era lo suficientemente diferente como para considerarlo una nota nueva. Esta relación se conoció como la **quinta**.

A su vez al dividir la cuerda en la proporción $1/4$, (Figura 1c), el sonido también sonaba bien. Esta relación se conocería como **cuarta**.

La creación de la escala pitagórica se basa en la proporción de la quinta. Para ello partimos de las divisiones de la cuerda que produce el canon. Como utilizamos la quinta, cogeremos el valor de la Figura 1d.

Aplicando la relación de onda: $f = \frac{V_p}{\lambda}$, donde f es la frecuencia, λ es la longitud de onda, y V_p es la velocidad de propagación de la onda sobre la cuerda, al ser V_p constante, obtenemos que la frecuencia es inversamente proporcional a la longitud de onda.

Además, el modo de vibración fundamental de una cuerda estirada es tal que, la longitud de onda es dos veces la longitud de la cuerda, $\lambda = 2l$. Por lo tanto, obtenemos: $f = \frac{V_p}{2l}$, es decir, la frecuencia es inversamente proporcional a la longitud de la cuerda.

Como estamos utilizando proporciones y no valores concretos, podemos utilizar la proporción inversa de la longitud para las frecuencias, $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}\right]$, que es la que utilizaremos en la escala. Partiendo de una nota inicial, encadenamos quintas utilizando la proporción obtenida. Para ello, multiplicamos o dividimos sucesivamente por $3/2$, para ascender o descender quintas, respectivamente.

De esta manera llamamos a la nota inicial **Do** y tendría atribuido el valor 1, su octava **Do'** el valor 2. A partir de Do aumentamos quintas. La quinta de Do sería **Sol** a la que le corresponde el valor $3/2$. La quinta de Sol sería **Re'** y le corresponde el valor $9/4$.

Repitiendo el proceso obtenemos las notas **La'** ($27/8$), **Mi''** ($81/16$) y **Si''** ($243/32$).

La nota **Fa** la obtenemos al bajar una quinta a Do que tendría el valor $(2/3)$. Estas notas las podemos representar en una recta junto a las diferentes octavas de la nota inicial Do:

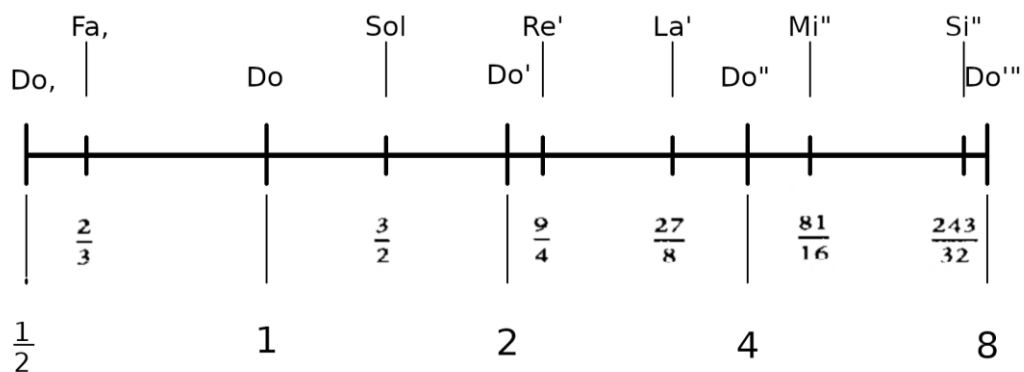


Figura 2

Como observamos hay notas que están fuera del intervalo $[1,2]$. Para colocarlas en este intervalo utilizaremos las octavas, que como ya sabemos no producen notas nuevas sino que una misma nota en diferente tonalidad. De esta manera multiplicamos o dividimos las notas por 2 hasta que estén colocadas en el intervalo $[1,2]$. A Fa le aumentamos una octava $\left(\frac{2}{3} \cdot 2\right)$, a **Re'** y **La'** les disminuimos una octava $\left(\frac{9}{4} : 2\right)$, $\left(\frac{27}{8} : 2\right)$, y a **Mi''** y **Si''** les bajamos dos octavas $\left[\left(\frac{81}{16} : 2\right) : 2\right]$ y $\left[\left(\frac{243}{32} : 2\right) : 2\right]$, obtenemos:

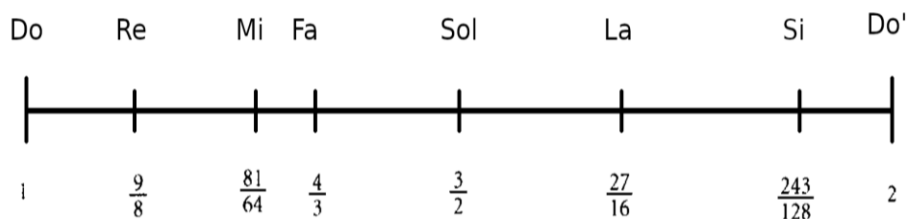


Figura 3

De esta manera ya tenemos las notas Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, que corresponden a las siete notas blancas del piano.

Según la relación de multiplicación o división entre las notas, observamos dos tipos de razones entre ellas, el tono $\frac{9}{8} = 1.125$ y el semitono $\frac{256}{243} \approx 1.053$, como vemos en la

Figura 4. El aumento de dos semitonos equivale a $\left(\frac{256}{243}\right)^2 \approx 1.1098$, que es prácticamente un tono.

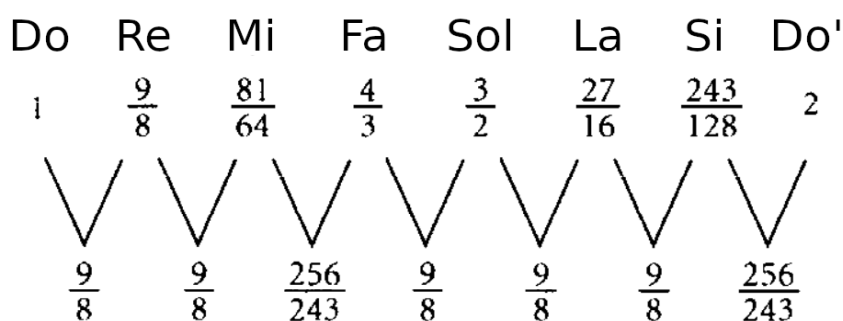


Figura 4

Posteriormente los pitagóricos se dieron cuenta que la escala no estaba acabada, ya que podían seguir formando nuevas notas intermedias. Por ejemplo, si subimos una séptima, $\left(3^5/2^7\right)$, a La y a continuación le bajamos una octava obtenemos una nota intermedia entre Sol y La que llamaremos Sol[#], $\left(6561/4096\right)$. La posibilidad de crear nuevas notas llevó a los pitagóricos a crear una nueva escala, la escala cromática.

2.- La escala Cromática

Está constituida por 12 sonidos diferentes en una misma octava. Pero, ¿cómo llegaron los pitagóricos a encontrar esas 12 notas?, creando una nueva escala. Esta vez no

empezaron en Do, en su lugar partieron de la nota Sol. Aplicaron los intervalos entre notas de la escala pitagórica original:

[tono-tono-semitono]-tono-[tono-tono-semitono].

En esta nueva escala aparece una nueva nota $\left(\frac{3^6}{2^9}\right)$ intermedia entre Fa y Sol

$\left(\frac{2^2}{3} < \frac{3^6}{2^9} < \frac{3}{2}\right)$. Por ser una nota muy parecida a Fa se le conoce como Fa[#]. Este método también se aplicó a la nota Fa y obtuvieron una nota entre La y Si que fue nombrada como Si^b. Continuando con este modelo acabamos con un total de 12 notas:

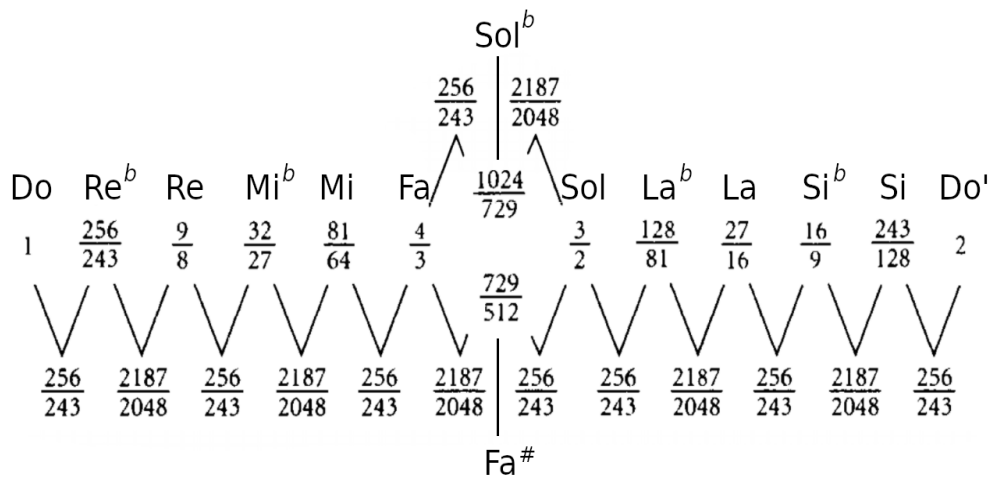


Figura 5

En esta nueva escala, llamada **escala cromática**, cada nota está separada de sus vecinas superior e inferior por el intervalo de medio tono.

La escala cromática puede expresarse de la forma $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ para $n \in \{-6, -5, -4, \dots, 4, 5\}$, reduciéndolos a la misma octava multiplicando o dividiendo sucesivamente por dos, y luego ordenándolos.

En esta escala están representadas tanto las notas blancas del piano como las negras (diferentes alteraciones de las notas naturales). Sin embargo, hay dos notas que ocupan el mismo espacio, pero varían ligeramente entre sí (Fa[#] y Sol^b).

Este intervalo entre Fa[#] $\left(\frac{3^6}{2^9}\right)$ y Sol^b $\left(\frac{2^{10}}{3^6}\right)$ que aproximadamente mide, $\frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.01364$ es una distancia muy pequeña que conocemos como **coma pitagórica**, y es el

inconveniente de la escala cromática, ya que 3^{12} y 2^{19} están muy próximos pero no son iguales.

Este inconveniente de la escala cromática es cíclico, ya que podemos seguir creando notas que están tan cerca unas de otras, como en el caso de $Fa^\sharp$ y Sol^b . El proceso sería como una espiral en la que las notas que se encuentran en el mismo rayo se diferencian en la relación de la coma pitagórica.

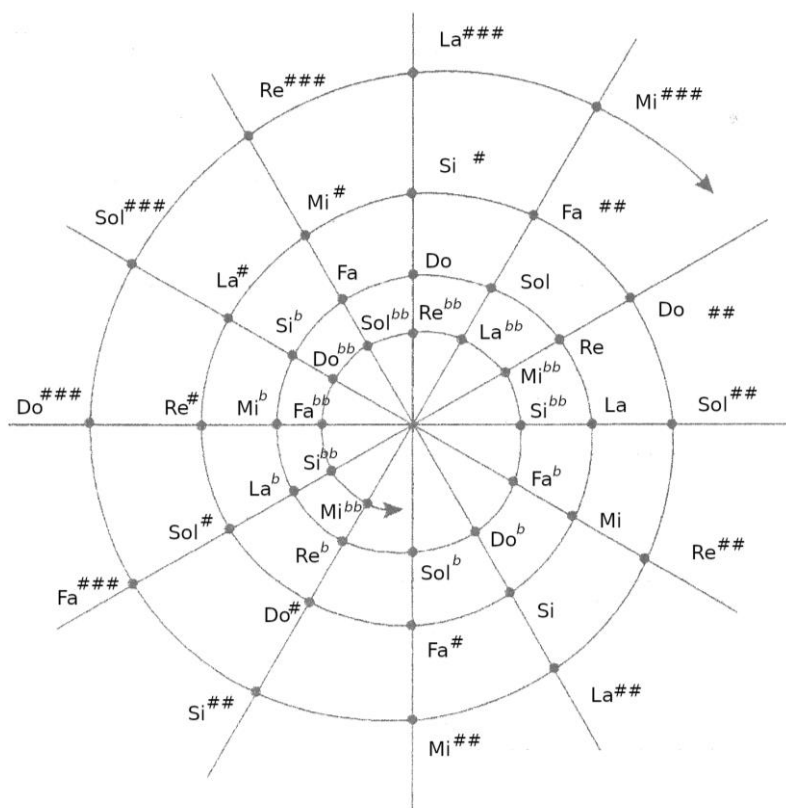


Figura 6, Espiral de quintas

3.- La escala temperada

La música actual se basa en las siete notas naturales Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, representadas en las teclas blancas del piano. A estas se les suman cinco notas intermedias menos entre Mi-Fa y Si-Do', que aparecen representadas como las teclas negras del piano. Estas notas intermedias se nombran de dos maneras. Si consideramos que es la nota siguiente a la que tomamos de referencia se denominan sostenidos ($\sharp$). Si consideramos que es la nota anterior a la que tomamos como referencia se denominan bemoles (b).

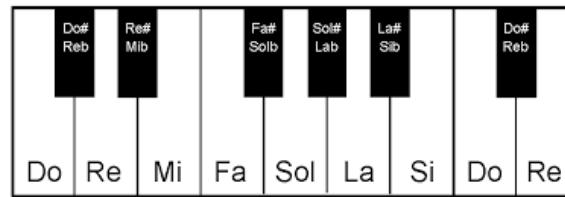


Figura 7

Hay muchos otros esquemas para obtener escalas, pero todos llevan a un conjunto de 12 notas muy similar al que forman las teclas blancas y negras de un piano. La razón de la anomalía de la escala cromática entre Fa y Sol y de que existan múltiples esquemas para construir escalas, es que ninguna escala perfecta de 12 notas puede estar basada en las proporciones pitagóricas de $3/2$, ¿podemos expresar el número 2 como un producto de potencias de 2 y de 3?

$$\text{Si, } 2 = 2^{12a} \cdot 3^{12b} \Rightarrow \frac{2}{2^{12a}} = 3^{12b} \Rightarrow 2^{-12a+1} = 3^{12b}$$

Pero, como una potencia entera de 2 no puede ser igual a una potencia entera positiva de 3, no es posible.

En una escala perfecta todas las proporciones deben ser las mismas, así que tendremos que

$$1, r, r^2, r^3, \dots, r^{12} = 2.$$

Con lo que $r = \sqrt[12]{2} \approx 1.059463094$.

Con este nuevo modelo las notas pueden ser representadas en el llamado círculo de quintas, por lo que ya no tendríamos el problema de la coma pitagórica y $Fa^\#$ y Sol^b coinciden.

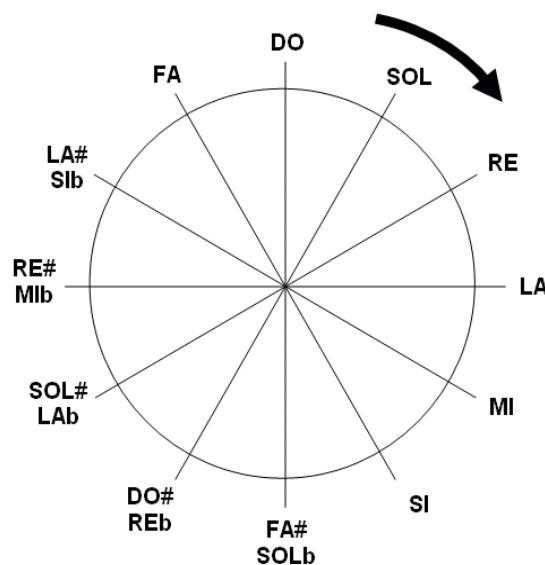


Figura 8, Círculo de Quintas

La escala resultante se denomina **escala temperada**. El semitono pitagórico (1.053), es muy similar al valor de r , por tanto, el nombre semitono se usa para el intervalo básico de la escala temperada.

4.-¿Cómo colocaríamos los trastes en una guitarra?

En una guitarra, en la que llamamos unidad a la longitud de la cuerda, el primer traste debe corresponder con el aumento de un semitono que lo representamos por x , y debe situarse de forma que la fracción de cuerda que vibre sea $\frac{1}{r}$ veces la longitud de la cuerda, es decir, a una distancia de $1 - \frac{1}{r}$ veces la longitud de la cuerda.

Para los siguientes trastes todo se reduce a multiplicar por $1/r$, por lo tanto, los espacios entre los trastes serían:

$$\frac{1}{r^0}, \frac{1}{r^1}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^3}, \dots, \frac{1}{r^{12}}.$$

Si $r > 1$, entonces $\frac{1}{r} < 1$, lo que implica que las distancia entre los trastes es cada vez menor

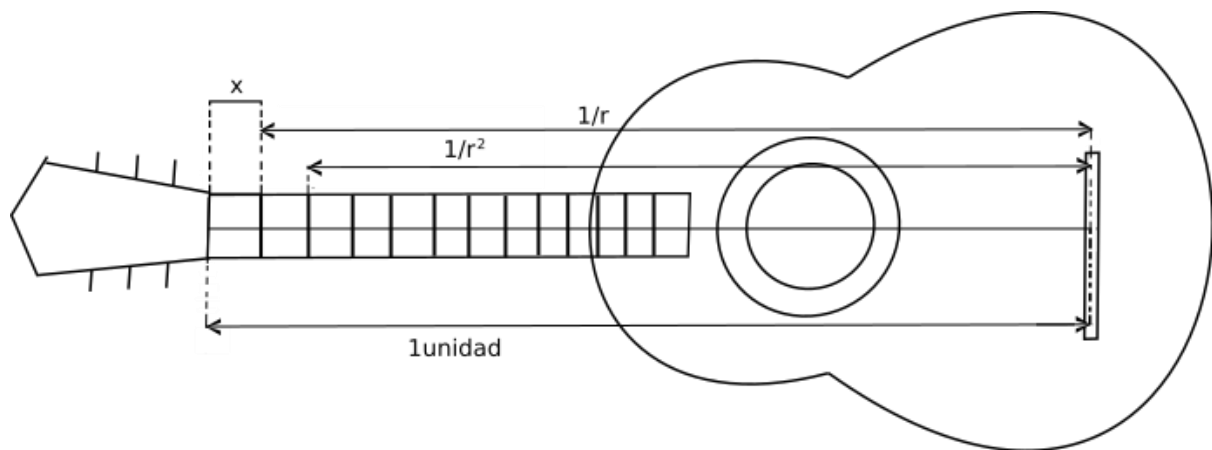


Figura 9

5.- Construcción de $\sqrt[12]{2}$. Construcciones con regla y compás

Cuando los antiguos griegos afrontaban números tales como $\sqrt[12]{2}$, a los que llamaron irracionales y que no pueden ser escritos mediante fracciones, normalmente recurrían a la geometría. Los griegos relacionaban la geometría con la perfección y la religión, y ponían especial énfasis en las medidas que se podían representar utilizando solamente

una regla no graduada (sin marcas) y un compás. La idea es ver qué construcciones geométricas pueden hacerse bajo esas restricciones.

Los griegos ya tenían planteados tres problemas (que hoy se consideran clásicos):

- *La trisección del ángulo:* hallar la división de un ángulo en 3 partes iguales.
- *La cuadratura del círculo:* construcción de un cuadrado cuya área sea la del círculo unidad.
- *La duplicación del cubo:* hallar un cubo cuyo volumen sea el doble de uno dado.

Lo primero que vamos a fijar son las normas para dibujar con regla y compás. Partimos de un conjunto dado de puntos en el plano. Las construcciones que pueden hacerse son:

- Se puede dibujar la recta que pasa por dos puntos dados.
- Se puede trazar la circunferencia que tiene centro en un punto dado y cuyo radio sea la distancia entre dos puntos dados.
- Las intersecciones de rectas o circunferencias que se puedan dibujar se consideran puntos que pueden usarse para seguir dibujando.

Tras 2000 años de incertidumbre, matemáticos posteriores llegaron a la conclusión de que cualquier construcción geométrica que cumpla dichas restricciones, puede ser interpretada como una serie de soluciones de ecuaciones cuadráticas o lineales, es decir, que cualquier distancia construible bajo esas restricciones debe ser solución de una ecuación polinómica cuyo grado sea una potencia de 2.

Teorema 1: Un número positivo es construible si y sólo si se puede escribir usando los números naturales o cero (0, 1, 2, 3, 4, ...), las operaciones +, −, ×, ÷ y la raíz cuadrada $\sqrt{}$.

A partir de la caracterización anterior, se puede probar usando álgebra moderna que hay números no construibles.

Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

donde a, b, c, d , son números enteros, con $a \neq 0$.

Teorema 2: Si la ecuación anterior, no tiene soluciones del tipo $\frac{e}{f}$ con e, f enteros, entonces sus soluciones positivas son números no construibles.

El problema que nos interesa en este caso, es *La duplicación del cubo*. Si partimos de un cubo de arista a , su volumen sería a^3 . El cubo buscado tiene el doble de volumen, es decir $2a^3$. Si la arista de este nuevo cubo es x , obtenemos la ecuación $x^3 = 2a^3$. Su solución es $x = \sqrt[3]{2a^3} = a \cdot \sqrt[3]{2}$. Como a es la arista del cubo original, y esta puede tomar cualquier valor, se reduce a hallar $x = \sqrt[3]{2}$, es decir, construir $\sqrt[3]{2}$.

Consideremos la ecuación: $x^3 - 2 = 0$, que es del tipo anterior. Sus coeficientes son enteros.

El lema de Gauss, asegura que las únicas soluciones racionales posibles son ± 1 ó ± 2 pero ninguna es válida, luego la solución positiva, $\sqrt[3]{2}$ es un número no construible¹.

De esto concluimos que $\sqrt[12]{2}$, no es construible, porque si fuera así, elevando al cuadrado dos veces podríamos construir $\sqrt[3]{2}$, que acabamos de demostrar que es imposible.

Esto nos lleva a que la construcción de la escala temperada, tendrá que hacerse mediante una aproximación del valor de $r = \sqrt[12]{2}$.

6.- El método desarrollado por Strähle

En el siglo XVI encontrar un método geométrico para colocar los trastes de los instrumentos de cuerda representaba un problema serio. Vincenzo Galilei, figura esencial en la música del Renacimiento y padre de Galileo Galilei, aproximó $r = \sqrt[12]{2} \approx 1.059463094$ mediante el número racional $\frac{18}{17} \approx 1.058823529$ que se acerca bastante al valor real y fue usada durante un tiempo.

En 1636 el monje Marin Mersenne², aproximó un intervalo de 4 semitonos mediante la razón: $\frac{2}{3 - \sqrt{2}} \approx 1.261203$. Después haciendo dos veces la raíz cuadrada, obtenía un resultado bastante preciso del intervalo para un semitono, que además podía ser construido:

$$\sqrt{\sqrt{1.261203}} \approx 1.059732672.$$

¹ Puede consultarse [9] de la Bibliografía.

² Mersenne: Matemático y filósofo conocido principalmente por los “Números primos de Mersenne”, de la forma $2^p - 1$, donde p es también un número primo.

Sin embargo, es difícil implementar esta construcción en la práctica porque los errores tienden a acumularse. Se necesitaba un método más preciso que el de Galilei, pero más fácil de usar que el de Mersenne.

Construcción geométrica de Strähle

En 1743, Daniel Strähle, un artesano sueco sin conocimientos matemáticos presentó un método práctico y sencillo para la construcción.

Elegimos un segmento QR que dividimos en 12 partes iguales. Sobre este segmento como lado desigual, construimos un triángulo isósceles cuyos lados miden 24 unidades.

El mástil de la guitarra, estaría situado en el vértice R mientras que el último traste estaría situado en el punto P del lado opuesto OQ, a siete unidades del vértice Q. La longitud de RP es igual a la longitud de PM.

Se trazan las rectas que unen el vértice O con las divisiones del lado de doce unidades. Los trastes se colocarían en los puntos de corte de dichas rectas con la línea que representa el mástil de la guitarra PR.

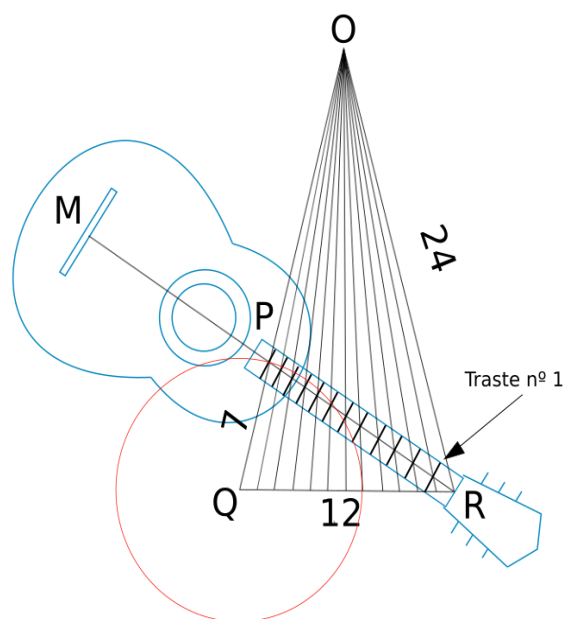


Figura 10

7.- El error de Faggot

Jacob Faggot, un miembro fundador de la Real Academia de las Ciencias de Suecia, realizó un cálculo trigonométrico para comprobar la precisión de dicha construcción, obteniendo un error de 1,7 % respecto al valor real, muy superior a lo que un músico

consideraría aceptable. No fue hasta 1957 que J.M. Barbour descubrió que Faggot se equivocó en los cálculos, pues obtuvo que el ángulo formado por el mástil de la guitarra con uno de los lados iguales del triángulo isósceles, PRQ, era de 40°14'.

Calculamos el valor del ángulo PRQ. Aplicando el teorema del coseno en el triángulo OQR:

$$OR^2 = OQ^2 + QR^2 - 2 \cdot 24 \cdot 12 \cdot \cos(OQR) \Rightarrow \cos(OQR) = \frac{1}{4}$$

Aplicando el teorema del coseno en el triángulo PQR:

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2 \cdot PQ \cdot QR \cdot \cos(OQR) \Rightarrow PR^2 = 7^2 + 12^2 - 2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow PR = \sqrt{151}$$

Aplicando el teorema del seno en el triángulo PQR:

$$\frac{PR}{\sin PQR} = \frac{PQ}{\sin PRQ} \Rightarrow \frac{\sqrt{151}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = \frac{7}{\sin PRQ} \Rightarrow PRQ = \arcsen\left(\frac{7\sqrt{15}}{4\sqrt{151}}\right) = 33^\circ 32'$$

El valor real del ángulo PRQ es de 33° 32', inferior al obtenido por Faggot.

8.- La gráfica que obtiene Barbour

Barbour siguió adelante con su investigación y buscó por qué el método de Strähle es tan exacto.

Descubrió que si en unos ejes de coordenadas colocamos en el eje Y las distancias de la cuerda de la guitarra y los trastes, y en el eje X las del lado desigual del triángulo isósceles, obtenemos una gráfica en la que los trastes quedan en la posición $r, r^2, r^3, \dots, r^{12} = 2$. (No nos quedan sus inversos porque las estamos colocando desde el traste más cercano a la mano que toca).

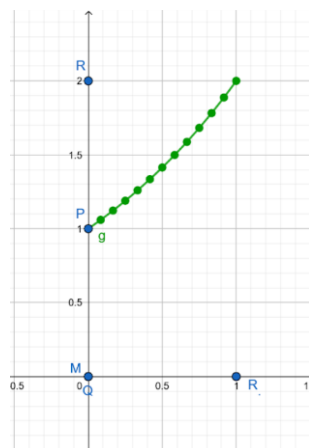


Figura 11

9.- Obtención de la fórmula de Strähle

Barbour observó, que la construcción de Strähle puede ser representada, por una función algebraica, obtenida a partir de su representación geométrica.

Teniendo en cuenta que, si C es cualquiera de las 13 divisiones de QR, A es el punto medio de QR y J es el pie de la perpendicular a QR desde el punto D, se crean 4 triángulos, semejantes dos a dos: OAC y DJC son semejantes entre ellos, igual que BAR y DJR, (Figura 12).

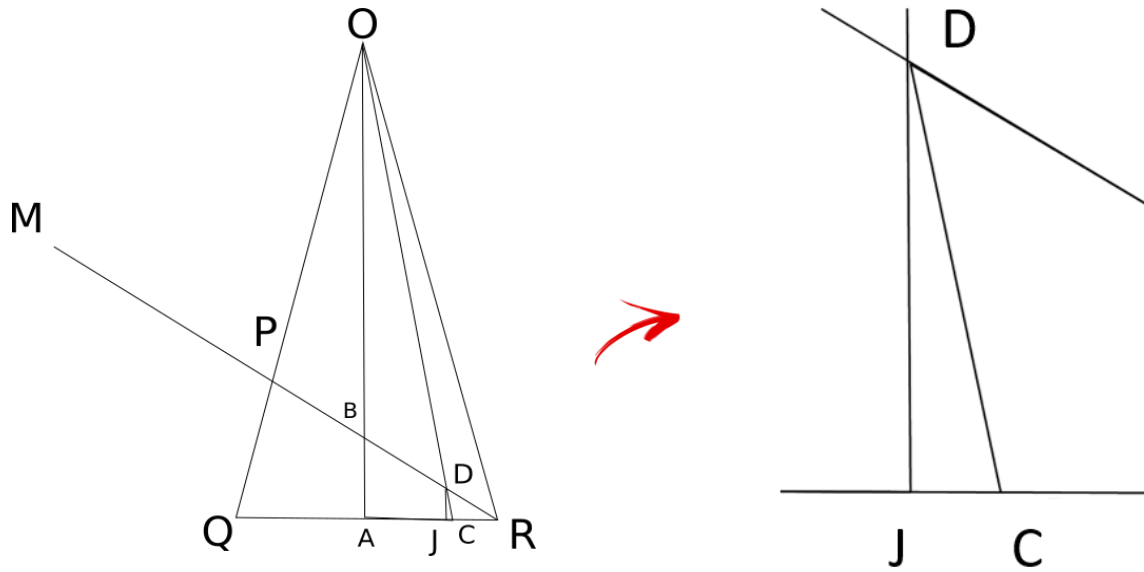


Figura 12

De la semejanza entre OAC y DJC, obtenemos que $\frac{DJ}{OA} = \frac{JC}{AC}$, y entonces $DJ = \frac{OA \cdot JC}{AC}$

De la semejanza entre BAR y DJR: $\frac{DJ}{BA} = \frac{JR}{AR} = \frac{DR}{BR}$, y entonces $\frac{JR}{AR} = \frac{DJ}{BA} = \frac{OA \cdot JC}{BA \cdot AC}$

Como en el segmento QR: $JR - CR = JC$, $AR - CR = AC$, sustituyendo en la anterior igualdad, obtenemos:

$$\frac{JR}{AR} = \frac{OA \cdot (JR - CR)}{BA \cdot (AR - CR)} \Rightarrow JR \cdot BA \cdot (AR - CR) = AR \cdot OA \cdot (JR - CR) \Rightarrow$$

$$JR \cdot BA \cdot AR - JR \cdot BA \cdot CR - AR \cdot OA \cdot JR = -AR \cdot OA \cdot CR \Rightarrow$$

$$JR \cdot (BA \cdot AR - BA \cdot CR - AR \cdot OA) = -AR \cdot OA \cdot CR \Rightarrow$$

$$JR = \frac{-AR \cdot OA \cdot CR}{BA \cdot AR - BA \cdot CR - AR \cdot OA} = \frac{CR \cdot OA \cdot AR}{AR \cdot (OA - BA) + BA \cdot CR}$$

A partir de aquí obtenemos que

$$\frac{DR}{BR} = \frac{JR}{AR} = \frac{\frac{CR}{QR} \cdot OA}{\frac{AR}{QR} \cdot (OA - BA) + BA \cdot \frac{CR}{QR}} \quad (1)$$

Ahora, si represento por $m = \frac{QC}{QR}$, entonces, $\frac{CR}{QR} = 1 - m$, y $\frac{AR}{QR} = \frac{1}{2}$.

Si llamamos $OA = a$, $BA = b$, la ecuación se transforma en

$$\frac{DR}{BR} = \frac{(1-m)a}{\frac{1}{2}(a-b) + b(1-m)} = \frac{2a(1-m)}{(a-b) + 2b(1-m)} \Rightarrow \frac{DR}{BR} = \frac{2a(1-m)}{a+b-2bm} \quad (2)$$

En el caso particular en el que $m=0$, entonces $C=Q$ y $D=P$ con lo que (2) se transforma en:

$$\frac{PR}{BR} = \frac{2a}{a+b}.$$

Y de la figura original, como: $MP = PR$, $MD = MR - DR = 2PR - DR$

$$\begin{aligned} 2^m = \frac{MD}{MP} &= \frac{2PR - DR}{MP} = \frac{\frac{4a}{a+b}BR - \frac{2a(1-m)}{a+b-2bm}BR}{PR} = \left(\frac{4a}{a+b} - \frac{2a(1-m)}{a+b-2bm} \right) \frac{BR}{PR} = \\ &= \left(\frac{4a}{a+b} - \frac{2a(1-m)}{a+b-2bm} \right) \frac{1}{\frac{PR}{BR}} = \left(\frac{4a}{a+b} - \frac{2a(1-m)}{a+b-2bm} \right) \frac{a+b}{2a} = \frac{a+b+(a-3b)m}{a+b-2bm} \end{aligned}$$

Considerando de nuevo la construcción original:

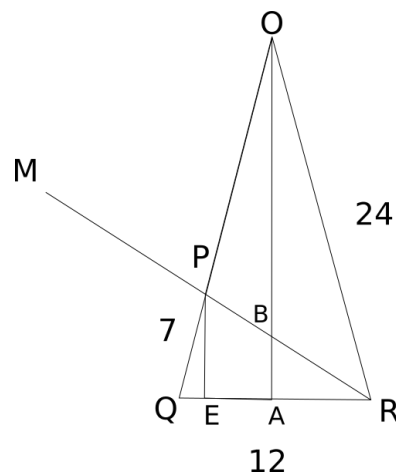


Figura 13

Trazamos una perpendicular a QR desde el punto P, y llamamos E al punto de corte. Obtenemos 2 triángulos semejantes QAO y QEP, entonces:

$$\frac{PQ}{OQ} = \frac{QE}{QA} \Rightarrow \frac{7}{24} = \frac{QE}{6} \Rightarrow QE = \frac{7}{4} \text{ y } ER = QR - QE = 12 - \frac{7}{4} = \frac{41}{4}.$$

También tenemos los triángulos semejantes PER y BAR, por lo tanto:

$$\frac{PR}{BR} = \frac{ER}{AR} = \frac{\frac{41}{4}}{\frac{41}{6}} = \frac{41}{24} \Rightarrow \frac{2a}{a+b} = \frac{41}{24} \Rightarrow a = \frac{41b}{7}$$

Con esto, sustituyendo en (2):

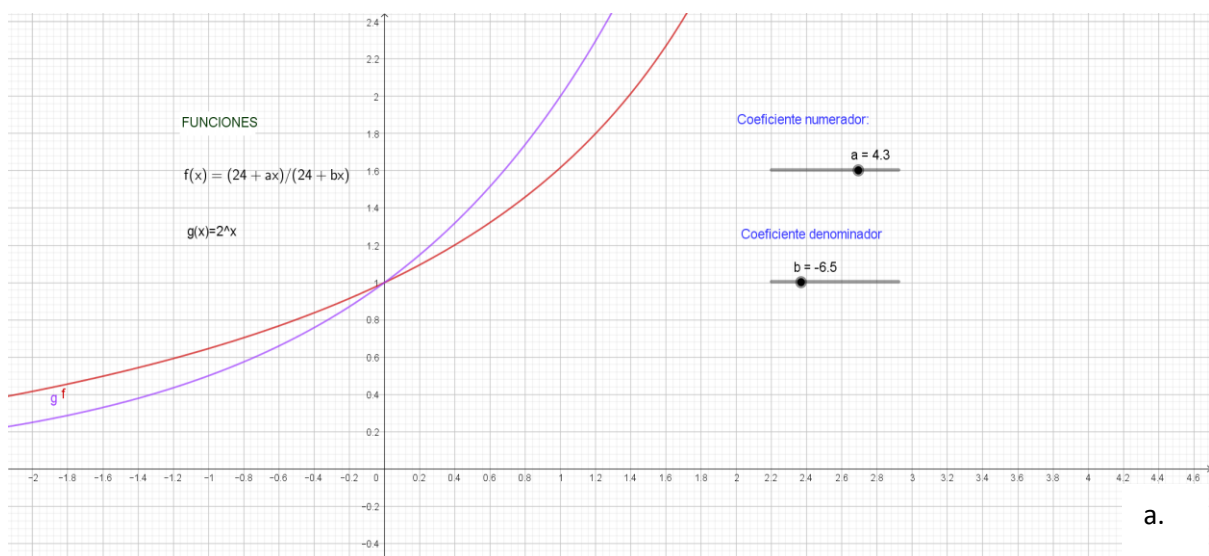
$$2^m = \frac{\frac{41b}{7} + b + \left(\frac{41b}{7} - 3b\right)m}{\frac{41b}{7} + b - 2bm} \stackrel{(:b)}{=} \frac{\frac{41}{7} + 1 + \left(\frac{41}{7} - 3\right)m}{\frac{41}{7} + 1 - 2m} = \frac{\frac{48}{7} + \frac{20}{7}m}{\frac{48}{7} - 2m} \stackrel{(\cdot 7)}{=} \frac{48 + 20m}{48 - 14m} = \frac{24 + 10m}{24 - 7m}$$

La construcción de Strähle aproxima 2^m por la expresión: $\frac{24+10m}{24-7m}$; y si lo expresamos

mediante funciones: $2^x \approx \frac{24+10x}{24-7x}$.

Es decir, aproximamos 2^x mediante una función racional del tipo, $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, donde $b=d$.

Como observamos en la Figura 14d, la función $y = \frac{24+10x}{24-7x}$ (rojo) se ajusta mucho a $y = 2^x$ (azul)



a.

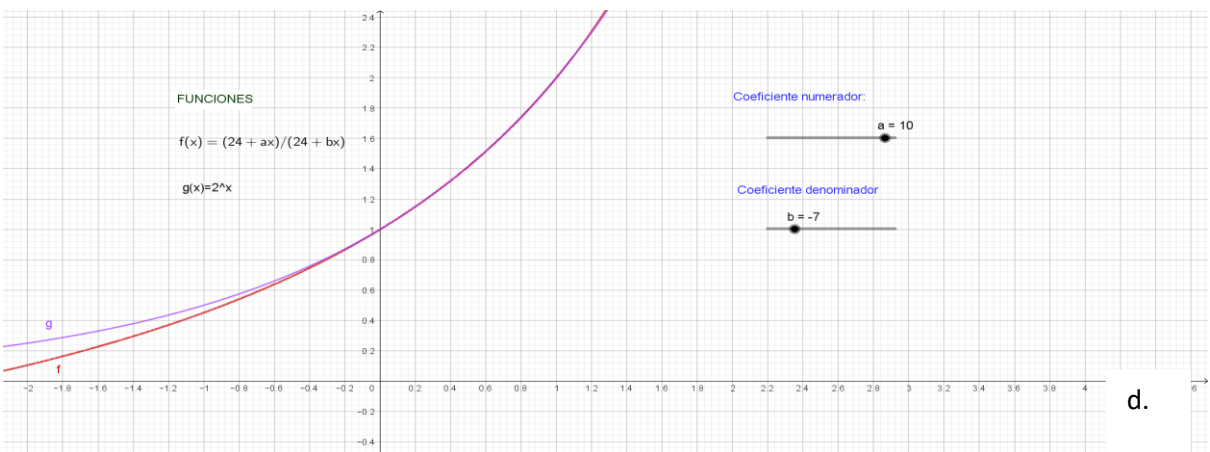
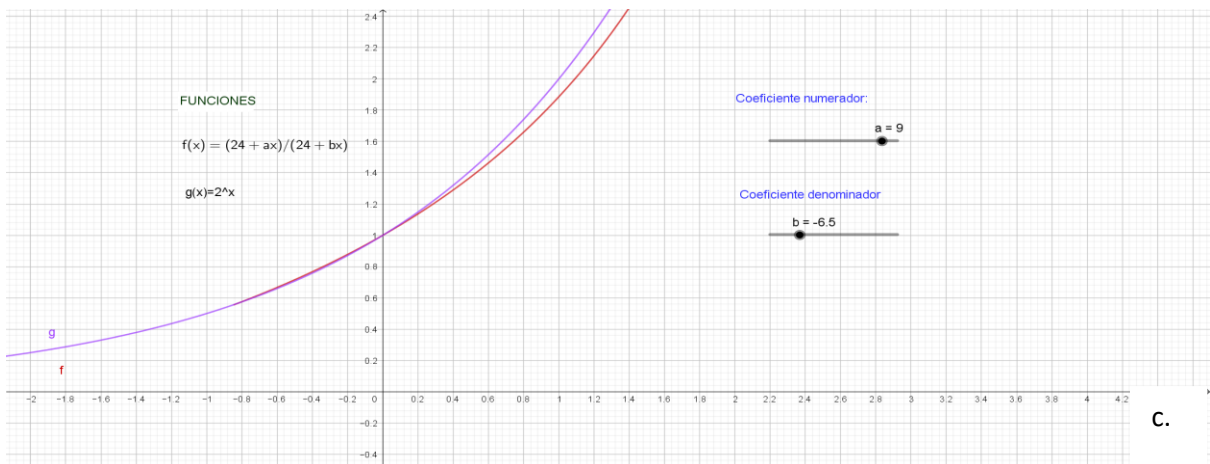
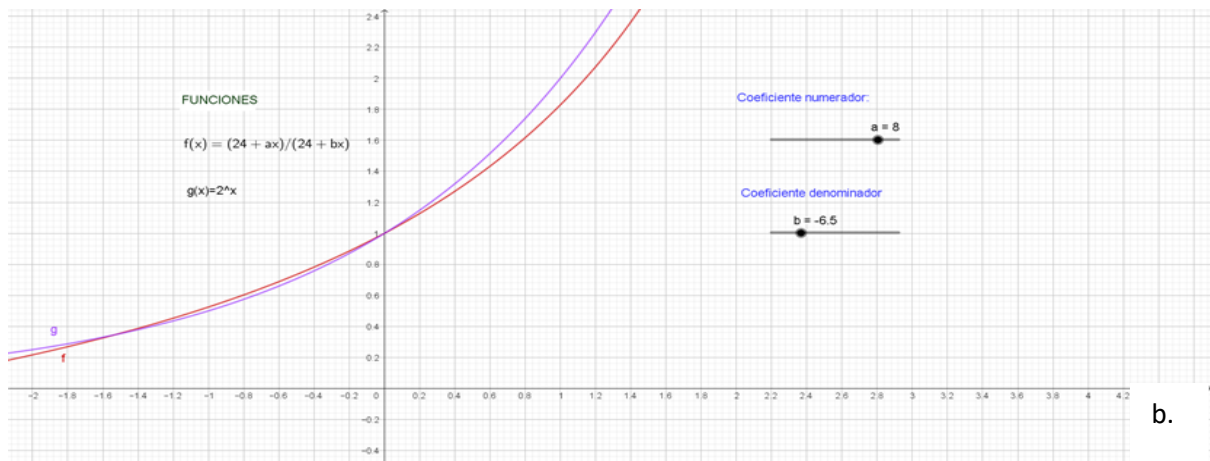


Figura 14

Justificación matemática de Barbour

Si la construcción fuera exacta, la ecuación quedaría $y = 2^x$. Entonces, los puntos $x = \frac{n}{12}$, para $n=1, 2, 3 \dots 12$, del lado desigual del triángulo se transformarían en $2^{\frac{n}{12}} = \left(\sqrt[12]{2}\right)^n = r^n$ en la distancia de la cuerda. Pero la construcción no es exacta.

Para determinar por qué la construcción de Strähle funciona tan bien, la clave está en encontrar una buena aproximación de 2^x en $[0,1]$ que sea de la forma $\frac{ax+b}{cx+d}$.

Aproximación por interpolación

Para obtener una aproximación de una función, uno de los métodos más utilizados es el de **interpolación**.

En el análisis numérico, se denomina interpolación a la obtención de nuevos valores partiendo del conocimiento de un conjunto de datos. Se suele utilizar cuando disponemos de un cierto número de puntos obtenidos por muestreo o a partir de un experimento y pretendemos construir una función que los ajuste o para aproximar una función complicada por una más simple.

Un enfoque razonable para aproximar 2^x es interpolar en los puntos $0, \frac{1}{2}, 1$, lo que nos conduce al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{b}{d} = 1 \\ \frac{\frac{a}{2} + b}{\frac{c}{2} + d} = \sqrt{2} \\ \frac{a+b}{c+d} = 2 \end{cases}$$

Primero damos un valor diferente de 0 a b por ejemplo, $\sqrt{2}$. Por lo tanto $d = \sqrt{2}$.

Sustituyendo:

$$\begin{cases} \frac{\frac{1}{2}a + \sqrt{2}}{\frac{1}{2}c + \sqrt{2}} = \sqrt{2} \\ \frac{a + \sqrt{2}}{c + \sqrt{2}} = 2 \end{cases}$$

Elevando la primera ecuación al cuadrado y multiplicando la segunda por $-\sqrt{2}$,

$$\begin{cases} \frac{1}{4}a^2 + \sqrt{2}a + 2 = \frac{1}{2}c^2 + 2\sqrt{2}c + 4 \\ -\sqrt{2}a - 2 = -2\sqrt{2}c - 4 \end{cases}$$

Sumando obtenemos que $\frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}c^2$. De donde, $c = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Sustituyendo c por el valor negativo, $c = -\frac{a}{\sqrt{2}}$, en la ecuación $\frac{a + \sqrt{2}}{c + \sqrt{2}} = 2$, obtenemos que $a = 2 - \sqrt{2}$ y por ello $c = \sqrt{2} - 1$.

La función sería: $y = \frac{(2 - \sqrt{2})x + \sqrt{2}}{(1 - \sqrt{2})x + \sqrt{2}}$

Aproximación de Barbour mediante fracción continua

A continuación, veremos cómo obtener una aproximación racional de $\sqrt{2}$ tan precisa como se quiera utilizando una fracción continua.

Llamaremos fracción continua a toda expresión de la forma:

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

Para $x = \sqrt{2}$, a_0 corresponde a la parte entera de la raíz, en este caso 1, porque $1 < \sqrt{2} < 2$.

A la parte decimal de $\sqrt{2}$, le llamo $f = 0.41421356\dots$, la parte entera de su inverso $\frac{1}{f} = 2.41421356\dots$ nos proporciona el valor $a_1 = 2$. Reiterando el proceso, obtenemos los valores $a_2, a_3, a_4, \dots$; que en este caso son todos iguales a 2.

Lo expresamos de la siguiente forma:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}} = [1, 2, 2, 2, 2, \dots]$$

Cuando consideramos únicamente los $n+1$ primeros términos obtenemos una aproximación de $\sqrt{2}$ mediante un número racional: $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, 2, \dots^{(n \text{ doses})}, 2]$

Si escogemos un número finito de "doses", podemos obtener una aproximación racional de $\sqrt{2}$ y cuantos más "doses" utilicemos para calcular nuestra aproximación, más exacta será.

Llamamos a nuestro número aproximado, $\frac{p_n}{q_n} \approx \sqrt{2}$.

Utilizando $\frac{p_1}{q_1} = [1, 2]$, obtenemos una aproximación igual a $\frac{p_1}{q_1} = \frac{3}{2} = 1.5$, la cual no se acerca lo suficiente a $\sqrt{2}$.

Para conseguir los siguientes valores, más aproximados, podemos decir que, como $\frac{p_n}{q_n} = [1, 2, 2, 2, 2, \dots^{(n \text{ doses})}, 2]$, resulta que:

$$\frac{p_n}{q_n} = 1 + \frac{1}{1 + [1, 2, 2, \dots, 2]} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}} = \frac{2q_{n-1} + p_{n-1}}{q_{n-1} + p_{n-1}}$$

y comparando, numeradores y denominadores llegamos a:

$$p_n = 2q_{n-1} + p_{n-1}, \quad q_n = q_{n-1} + p_{n-1}$$

Para $\sqrt{2} \approx [1, 2, 2]$, $p_2 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$, $q_2 = 2 + 3 = 5$.

Para $\sqrt{2} \approx [1, 2, 2, 2]$, $p_3 = 2 \cdot 5 + 7 = 17$, $q_3 = 7 + 5 = 12$.

Ahora ya sabemos cómo conseguir aproximaciones de $\sqrt{2}$ y este proceso puede ser repetido infinitas veces, pero Barbour utilizó este tercer valor, $\frac{p_3}{q_3} = \frac{17}{12}$.

Tomamos la ecuación de Barbour y dividimos numerador y denominador entre dos,

obteniendo: $\frac{x + \frac{1-x}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}x + \frac{1-x}{2\sqrt{2}}}$. Sustituimos $\sqrt{2}$ por $\frac{17}{12}$ y simplificamos:

$$\frac{x + \frac{1-x}{\frac{17}{12}}}{\frac{1}{2}x + \frac{1-x}{2 \cdot \frac{17}{12}}} = \frac{x + \frac{12-12x}{17}}{\frac{1}{2}x + \frac{12-12x}{17}} = \frac{\frac{17x-12x+12}{17}}{\frac{\frac{17x}{2}-12x+12}{17}} = \frac{17x-12x+12}{\frac{17x}{2}-12x+12} = \frac{34x-24x+24}{17x-24x+24} = \frac{10x+24}{-7x+24}$$

Con esto tendríamos una ecuación, la **fórmula de Strähle**, $y = \frac{10x+24}{-7x+24}$.

En conclusión, a pesar de que la idea de Strähle era meramente artesanal, su aplicación es realmente práctica y precisa, y puede ser justificado matemáticamente utilizando ideas básicas de la teoría de la aproximación y la teoría de números.

10.-Propuesta de continuidad

Como continuación de este trabajo, ensayaríamos con algún otro método de aproximación. Por ejemplo:

- Usar otros valores proporcionados por la fracción continua para aproximar mejor $\sqrt{2}$ y comparar con la fórmula de Strähle.
- En la aproximación por interpolación, Barbour utilizó los extremos del intervalo $[0,1]$ y el punto medio, $1/2$, para aproximar la función 2^x , pero este razonamiento no siempre es el más efectivo, como demuestra el ejemplo $y = x^3$ en $[-1,1]$. Se deberían probar con otros puntos para la interpolación y comprobar si se obtiene un resultado más preciso.
- También se podría probar a hacer un ajuste de la función mediante mínimos cuadrados, que es una técnica de análisis numérico enmarcada en la optimización matemática, en la que, dados un conjunto de pares ordenados — variable independiente, variable dependiente— y una familia de funciones, se intenta encontrar la función continua, dentro de dicha familia, que mejor se aproxime a los datos de acuerdo con el criterio de minimizar el error cuadrático. Es decir, intenta minimizar la suma de cuadrados de las diferencias en las ordenadas (llamadas residuos) entre los puntos generados por la función elegida y los correspondientes valores en los datos.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Altozano J. (2019) *Un truco increíble para entender acordes y escalas: El Círculo de Quintas*. https://www.youtube.com/watch?v=BRBTCIK_9_g
- [2] Barbour, J. M. *A Geometrical Approximation to the Roots of Numbers*. The American Mathematical Monthly, Vol. 64, No. 1 (Jan., 1957), pp. 1-9.
- [3] Estrada F. (2017). *Conocer para destruir: escala pitagórica y sistema temperado*. <http://frentesonicofuturista.net/escala-pitagorica-sistema-temperado/>
- [4] Fauvel; J., Flood R. Wilson R. (2006). *Music and Mathematics: From Pythagoras to Fractals*. Capítulo 4, *Faggot's fretful fiasco*, (autor Ian Stewart).
- [5] Lemnismath (2008). *¿Por qué tenemos 12 notas musicales?, Música y matemáticas*. <https://lemnismath.org/2018/09/por-que-tenemos-12-notas-musicales-musica-y-matematicas/>
- [6] Nave C.R. (2017). Georgia State University; Waves; String. <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Waves/string.html>
- [7] Peralta J. (2003). *Matemáticas para no desafinar*. La Gaceta de la RSME, Vol. 6.2, Págs. 437–456.
- [8] Rockett, A., & Ruggerio, J. (2011). *95.30 On Stråhle's guitar frets*. The Mathematical Gazette, 95 (533), 300-303.
- [9] Sabia J. (2009). *Construcciones con regla y compás*. Universidad de Buenos Aires. <http://cms.dm.uba.ar/actividades/semana/2009/Reglaycompas.pdf>
- [10] Schoenberg, I. J. *On the Location of the Frets on the Guitar*. The American Mathematical Monthly, Vol. 83, No. 7 (Aug. - Sep., 1976), pp. 550-552.