

EXERCICIOS DE SELECTIVIDADE.

CUESTIÓN

Razoa as respostas ás seguintes cuestións:

1.- Se unha carga de $1 \mu\text{C}$ se move entre dous puntos da superficie dun condutor separados 1 m (cargado e en equilibrio electrostático), cal é a variación de enerxía potencial que experimenta esta carga?: a) 9 kJ ; b) depende do potencial do condutor; c) cero. ($1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{ C}$; $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$). (Set. 08).

Solución:

Todos os puntos dun condutor cargado e en equilibrio electrostático están ó mesmo potencial, constituíndo un volume equipotencial. De non ser así, as cargas do condutor desprazaríanse e non se cumpriría a condición de equilibrio electrostático.

En función do potencial, a enerxía potencial eléctrica E_p dunha carga Q nun punto de potencial eléctrico V vén dada pola expresión: $E_p = Q \cdot V$. Polo tanto: $\Delta E_p = Q \Delta V = 0$, resultado que se corresponde co ítem c) da cuestión.

2.- Se o fluxo do campo eléctrico a través dunha superficie gaussiana que rodea a unha esfera condutora cargada e en equilibrio electrostático é Q/ϵ_0 , o campo eléctrico no exterior da esfera é: a) cero; b) $Q/(4 \pi \epsilon_0 r^2)$; c) Q/ϵ_0 . (Set. 05)

Solución:

A intensidade de campo eléctrico, $\vec{E}$, como todo vector, consta de módulo, dirección e sentido. Estudamos o seu módulo, para o que:

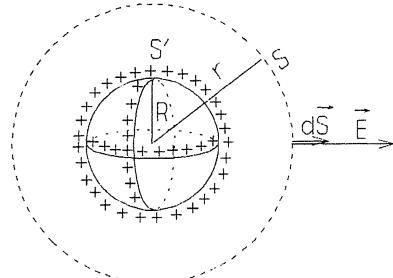
1º: Imaxinamos unha superficie pechada, que pase polo punto onde queremos coñecer a intensidade de campo eléctrico, de modo que $\vec{E}$ sexa perpendicular á superficie en cada punto e o seu módulo sexa constante en toda ela: unha esfera con centro a propia carga.

2º: Calculamos o fluxo do vector $\vec{E}$, que atravesa a superficie anteriormente trazada:

$$\Phi = \oint_{S \text{ de Gauss}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S \text{ da esfera}} E \, dS \cos 0^\circ = E \oint_S dS = E \cdot S$$

3º: Aplicamos o teorema de Gauss:

$$\therefore \left. \begin{array}{l} \Phi = \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \Phi = E \cdot S \end{array} \right\} \rightarrow E \cdot S = \frac{Q}{\epsilon_0} \left\{ \begin{array}{l} S = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \end{array} \right\} \rightarrow E = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}$$



A dirección é a do raio da esfera que teña por liña de acción a recta que pasa polo punto onde queiramos coñecer $\vec{E}$ e o seu sentido é cara ó infinito, se a carga da esfera é positiva e cara ó centro da esfera se a carga é negativa.

Resulta que o campo $\vec{E}$ creado por unha carga Q , distribuída sobre unha esfera condutora en equilibrio electrostático, nun punto exterior a ela, é igual ó campo creado por esa mesma carga se

fose puntual e estivese situada no centro da esfera.

3.- No interior dun condutor esférico cargado e en equilibrio electrostático cúmprese: a) o potencial e o campo aumentan desde o centro ata a superficie da esfera; b) o potencial é nulo e o campo constante; c) o potencial é constante e o campo nulo. (Xuño 05).

Solución:

Dicimos que un condutor cargado se encontra en equilibrio electrostático cando as cargas que posúe están en repouso.

Nun condutor cargado en equilibrio electrostático, as cargas están distribuídas uniformemente pola súa superficie: As cargas repélense e de estar no interior desprazaríanse ata que a distancia fose máxima; isto é: ata a superficie do condutor.

Ó situarse as cargas sobre a superficie do condutor, a carga encerrada por unha superficie interior é nula e, aplicando o teorema de Gauss, resulta:

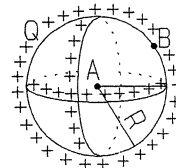
$$\left. \begin{array}{l} \Phi = \oint_{S_{\text{esfera}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ \Phi = \frac{Q}{\epsilon} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \oint_{S_{\text{interior}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon} \\ Q_{\text{interior}} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \vec{E} = 0$$

O resultado é que a **intensidade de campo eléctrico no interior dun condutor en equilibrio electrostático é nula**.

A diferenza de potencial entre dous puntos relaciónase coa intensidade de campo eléctrico segundo a expresión: $\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \rightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$.

Para o caso de puntos interiores dunha esfera cargada e en equilibrio electrostático temos:

$$\left. \begin{array}{l} \int_A^B dV = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ \vec{E} = \vec{0} \end{array} \right\} \rightarrow \int_A^B dV = 0 \rightarrow V_B - V_A = 0 \rightarrow V_B = V_A$$



A e B son dous puntos calquera pertencentes á esfera condutora; para o caso do debuxo, A está no centro da esfera e B está infinitamente próximo á súa superficie.

Resulta que se $\vec{E} = \vec{0}$, o **potencial V non pode variar**, $\Delta V = 0$, tendo un valor constante en todos os puntos: trátase dun volume equipotencial.

Vemos que nas condicións da cuestión, o **potencial eléctrico é constante e a intensidade de campo é nula** (ítem c).

4.- Nunha esfera condutora cargada e en equilibrio electrostático cúmprese que: a) o potencial eléctrico no interior é constante; b) o campo interior é función da distancia ó centro; c) a carga eléctrica distribúese uniformemente por todo o volume. (Xuño 03).

Solución:

Ver a resposta da cuestión anterior.

5.- O potencial e a intensidade de campo eléctrico dunha esfera condutora de raio a e carga Q son, respectivamente: a) nulo e constante no interior da esfera; b) constante no exterior e nulo no interior; c) constante e nulo no interior. (Set. 99).

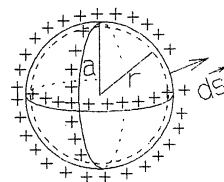
Solución:

Se as cargas non están en repouso, non hai equilibrio electrostático; no interior da esfera pode haber parte da carga Q e, en consecuencia, ningunha das opcións dadas como solución son correctas. Para o caso de que as cargas estean en equilibrio electrostático, estas están na superficie do condutor.

Nun condutor cargado coas cargas en equilibrio electrostático, estas están distribuídas uniformemente pola súa superficie: As cargas repélense e de estar no interior do condutor desprazaríanse ata que a distancia fose máxima; isto é: ata a súa superficie.

Ó situarse as cargas sobre a superficie do condutor, a carga encerrada por unha superficie interior é nula e, aplicando o teorema de Gauss, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \oint_{S_{\text{interior}}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon} \\ Q_{\text{interior}} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow E = 0$$



Vemos que o campo eléctrico, no interior dun condutor cargado en equilibrio electrostático, é nulo, polo que o ítem a) queda descartado.

A relación que hai entre a intensidade do campo eléctrico, $\vec{E}$, e o potencial eléctrico, V , é: $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{r}$.

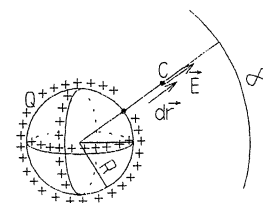
Como no interior da esfera $E = 0$ resulta: $dV = -\vec{0} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow V = \text{cte.}$ Trátase dun volume equipotencial.

Chegamos a que o potencial eléctrico e a intensidade de campo eléctrico no interior dunha esfera condutora, que posúe unha carga Q en equilibrio electrostático, son, respectivamente, constante e nulo: ítem c).

Para saber se o ítem b) é correcto estudamos o valor do potencial nun punto exterior:

$$\left. \begin{array}{l} \int_c^\infty dV = - \int_c^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} \rightarrow V_c = \int_c^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_c^\infty E \cdot dr \\ E = \frac{k \cdot Q}{r^2} \end{array} \right\} \rightarrow V_c = \int_c^\infty \frac{k \cdot Q}{r^2} dr = \left[-\frac{k \cdot Q}{r} \right]_c^\infty = \frac{k \cdot Q}{r_c}$$

O potencial eléctrico no exterior da esfera é inversamente proporcional á distancia do punto ó centro da esfera, non sendo correcto o ítem b).



PROBLEMAS

1. En dous dos vértices dun triángulo equilátero de 2 cm de lado sitúanse dúas cargas puntuais de $+10 \mu\text{C}$ cada unha. Calcula: a) o campo eléctrico no terceiro vértice; b) o traballo para levar unha carga de $5 \mu\text{C}$ desde o terceiro vértice ata o punto medio do lado oposto; c) xustifica porqué non necesitas coñecer a traxectoria no apartado anterior. (Datos: $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$; $1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{ C}$). (Xuño 08).

Solución:

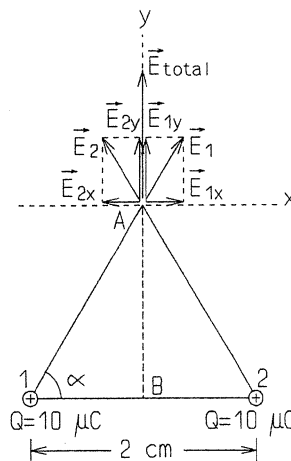
$$\text{a) } \vec{E} = \sum_{i=1}^{i=2} \vec{E}_i, \text{ sendo: } E_i = \frac{k Q_i}{r_i^2}$$

$$E_1 = E_2 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{(2 \cdot 10^{-2})^2} \rightarrow E_1 = E_2 = 2,25 \cdot 10^8 \text{ N C}^{-1}$$

$$E_{1x} = E_{2x} = E_1 \cos \alpha \rightarrow E_{1x} = 2,25 \cdot 10^8 \cdot \frac{1}{2} = 1,13 \cdot 10^8 \text{ N C}^{-1}$$

$$E_{1y} = E_1 \sin \alpha \rightarrow E_{1y} = 2,25 \cdot 10^8 \cdot \frac{\sqrt{2^2 - 1^2}}{2} = 1,95 \cdot 10^8 \text{ N C}^{-1}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_1 &= 1,13 \cdot 10^8 \vec{i} + 1,95 \cdot 10^8 \vec{j} \\ \vec{E}_2 &= -1,13 \cdot 10^8 \vec{i} + 1,95 \cdot 10^8 \vec{j} \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{E} = 3,90 \cdot 10^8 \vec{j} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$



Unha resposta xeral, independentemente de como se elixan os vértices, sería: $E_{\text{no terceiro vértice}} = 3,90 \cdot 10^8 \text{ N/C}$; coa dirección da bisectriz do ángulo no que se calcula e co sentido de cara ó exterior do triángulo.

b)

$$W_A^B \text{ (feito pola forza eléctrica do campo)} = -Q \cdot (V_B - V_A)$$

$$V = \sum_{i=1}^{i=2} V_i = \sum_{i=1}^{i=2} k \frac{Q_i}{r_i}$$

$$V_B = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-6}}{1 \cdot 10^{-2}} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-6}}{1 \cdot 10^{-2}} = 18 \cdot 10^6 \text{ V}$$

$$V_A = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-2}} + 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(10 \cdot 10^{-6})}{2 \cdot 10^{-2}} = 9 \cdot 10^6 \text{ V}$$

$$\rightarrow W_A^B = -5 \cdot 10^{-6} \cdot (18 \cdot 10^6 - 9 \cdot 10^6)$$

$$W_{A^B} = -45 \text{ J}$$

O traballo exterior, W_{exterior} , que hai que facer para levar a carga de $5 \mu\text{C}$ con velocidade constante desde A ata B, coincide co traballo feito pola forza do campo, cambiado de signo:

$$W_A^B \text{ (forza exterior)} = - W_A^B \text{ (forza campo eléctrico)} \rightarrow W_A^B \text{ (forza exterior)} = 45 \text{ J}$$

c) A forza electrostática é unha forza conservativa e o traballo que unha forza conservativa realiza soamente depende dos puntos entre os cales se desenvolve, sendo independente do camiño seguido.

2.- Dadas tres cargas puntuais: $Q_1 = 10^{-3} \mu\text{C}$ en $(-8,0) \text{ m}$; $Q_2 = -10^{-3} \mu\text{C}$ en $(8,0) \text{ m}$ e $Q_3 = 2 \cdot 10^{-3} \mu\text{C}$ en $(0,8) \text{ m}$; calcula: a) o campo e o potencial eléctricos en $(0,0)$; b) a enerxía electrostática; c) xustifica que o campo electrostático é conservativo. (Datos: $1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{ C}$; $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$). (Set. 07).

Solución:

a)

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^3 \vec{E}_i, \text{ sendo: } E_i = \frac{k Q_i}{r_i^2}$$

$$E_1 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6}}{8^2} \rightarrow E_1 = \frac{9}{64} \text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_1 = \frac{9}{64} \vec{i} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_1 = \frac{9}{64} \vec{i} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

$$E_3 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6}}{8^2} \rightarrow E_3 = \frac{9}{32} \text{ N C}^{-1}$$

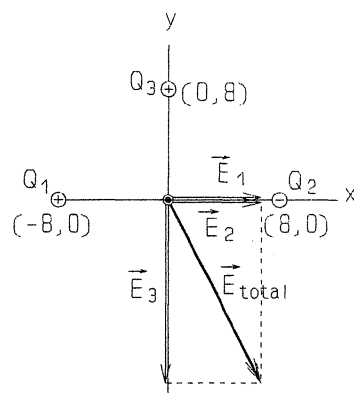
$$\vec{E}_3 = -\frac{9}{32} \vec{j} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

$$\vec{E}_{(0,0)} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \frac{9}{64} \vec{i} + \frac{9}{64} \vec{i} - \frac{9}{32} \vec{j}$$

$$\vec{E}_{(0,0)} = \frac{9}{32} \vec{i} - \frac{9}{32} \vec{j} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

$$V_{\text{total}} = \sum_{i=1}^3 V_i = \sum_{i=1}^3 \frac{k Q_i}{r_i}$$

$$V_{(0,0) \text{ total}} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6}}{8} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-10^{-3} \cdot 10^{-6})}{8} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6}}{8} \rightarrow V_{\text{total}} = \frac{9}{4} \text{ V}$$



b) A enerxía potencial electrostática E_p da interacción de dúas cargas, Q e Q' , separadas a distancia r , vén dada pola expresión: $E_p = \frac{k Q Q'}{r}$ e a enerxía potencial total é a suma das enerxías

de todas as interaccións: $E_{p \text{ total}} = E_{p \text{ 1-2}} + E_{p \text{ 1-3}} + E_{p \text{ 2-3}}$.

$$E_{p \text{ total}} = 9 \cdot 10^9 \cdot \left[\frac{10^{-3} \cdot 10^{-6} \cdot (-10^{-3}) \cdot 10^{-6}}{16} + \frac{10^{-3} \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6}}{\sqrt{8^2 + 8^2}} + \frac{-10^{-3} \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6}}{\sqrt{8^2 + 8^2}} \right]$$

$$E_{\text{total}} = -5,63 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

c) Un campo de forzas é conservativo cando o traballo que desenvolve a forza do campo só depende dos puntos inicial e final entre os cales se realiza, sendo independente do camiño seguido. Polo tanto, ó longo dun ciclo, o traballo desenvolvido vale cero.

Sabemos que as forzas electrostáticas (atractivas ou repulsivas) debidas a cargas puntuais en repouso son centrais e toda forza central é conservativa, podendo relacionar o traballo feito por esta forza coa variación da enerxía potencial eléctrica (e coa variación do potencial eléctrico):

$$W_{A \rightarrow B} = -\Delta E_p = -(E_{p \text{ B}} - E_{p \text{ A}}) = -Q (V_B - V_A)$$

3.- Tres cargas puntuais de $2 \mu\text{C}$ sitúanse respectivamente en $A(0,0)$, $B(1,0)$ e $C(1/2, \sqrt{3}/2)$. Calcula: a) o campo eléctrico nos puntos $D(1/2,0)$ e $F(1/2, 1/(2\sqrt{3}))$; b) o traballo para trasladar unha carga $Q' = 1 \mu\text{C}$ de D a F ; c) con este traballo, aumenta ou diminúe a enerxía electrostática do sistema? (As coordenadas danse en metros; $K = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$; $1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{ C}$). (Xuño 07).

Solución:

$$a) \vec{E} = \sum_{i=1}^3 \vec{E}_i, \text{ sendo: } E_i = \frac{k Q_i}{r_i^2}$$

$$E_{A \text{ en } D} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{0,5^2} \rightarrow E_{A \text{ en } D} = 7,2 \cdot 10^4 \text{ N C}^{-1}$$

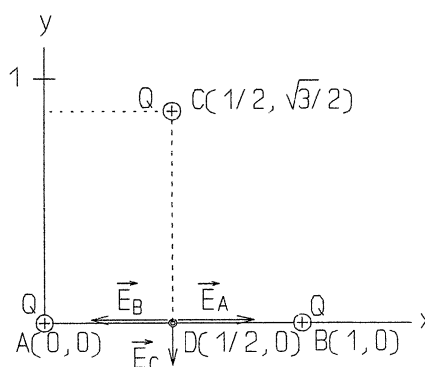
$$\vec{E}_{A \text{ en } D} = 7,2 \cdot 10^4 \vec{i} (\text{N C}^{-1})$$

$$\vec{E}_{B \text{ en } D} = -\vec{E}_{A \text{ en } D} = -7,2 \cdot 10^4 \vec{i} (\text{N C}^{-1})$$

$$E_{C \text{ en } D} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{3}/2)^2} \rightarrow E_{C \text{ en } D} = 2,4 \cdot 10^4 \text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_{C \text{ en } D} = -2,4 \cdot 10^4 \vec{j} (\text{N C}^{-1})$$

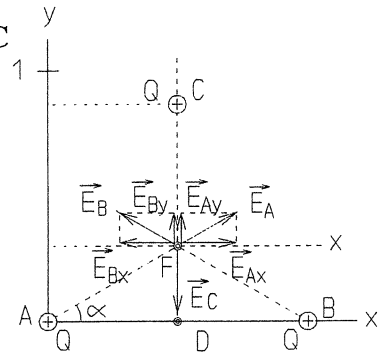
$$\vec{E}_{\text{total en } D} = \vec{E}_{C \text{ en } D} = -2,4 \cdot 10^4 \vec{j} (\text{N C}^{-1})$$



$$E_{A \text{ en } F} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{\left[\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2} \right]^2} \rightarrow E_{A \text{ en } F} = 5,4 \cdot 10^4 \text{ N/C}$$

$$\vec{E}_{(A \text{ en } F)} = \vec{E}_{x(A \text{ en } F)} + \vec{E}_{y(A \text{ en } F)}$$

$$\vec{E}_{A \text{ en } F} = E_{A \text{ en } F} \cdot \cos \alpha \vec{i} + E_{A \text{ en } F} \cdot \sin \alpha \vec{j}$$



$$\vec{E}_{A \text{ en } F} = 5,4 \cdot 10^4 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}} \vec{i} + 5,4 \cdot 10^4 \cdot \frac{1/(2\sqrt{3})}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}} \vec{j}$$

$$\vec{E}_{A \text{ en } F} = 4,7 \cdot 10^4 \vec{i} + 2,7 \cdot 10^4 \vec{j} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

$$\vec{E}_{B \text{ en } F} = -4,7 \cdot 10^4 \vec{i} + 2,7 \cdot 10^4 \vec{j} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

$$E_{C \text{ en } F} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right]^2} \rightarrow E_{C \text{ en } F} = 5,4 \cdot 10^4 \text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_{C \text{ en } F} = -5,4 \cdot 10^4 \vec{j} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

$$\vec{E}_{\text{total en } F} = \vec{E}_{A \text{ en } F} + \vec{E}_{B \text{ en } F} + \vec{E}_{C \text{ en } F} = \vec{0} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

$$b) W_D^F \text{ feito pela força eléctrica do campo} = -Q' \cdot (V_F - V_D)$$

$$V = \sum_{i=1}^{i=2} V_i = k \sum_{i=1}^{i=2} \frac{Q_i}{r_i} \text{ (sendo } r_i \neq 0\text{)}$$

$$V_D = 9 \cdot 10^9 \cdot \left[2 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{0,5} + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{3}/2} \right] \rightarrow V_D = 9,28 \cdot 10^4 \text{ V}$$

$$V_F = 9 \cdot 10^9 \cdot \left[2 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2}} + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}} \right] \rightarrow V_F = 9,36 \cdot 10^4 \text{ V}$$

$$W_{D \rightarrow F; \text{ feito pelas forças do campo}} = -1 \cdot 10^{-6} \cdot (9,36 \cdot 10^4 - 9,28 \cdot 10^4) \rightarrow W_{D \rightarrow F; \text{ campo}} = -8 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

O traballo exterior que hai que facer para que a carga Q' se desprace desde A ata B con velocidade constante coincide co traballo feito pola forza do campo, con signo cambiado:

$$W_{D \rightarrow F; \text{ exterior}} = -W_{D \rightarrow F; \text{ campo}} = +8 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

c) Calculamos a enerxía potencial electrostática en D, E_D , e en F, E_F , e comparamos ambos valores.

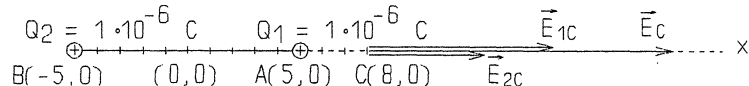
$$\left. \begin{aligned} E_D &= Q' \cdot V_D = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 9,28 \cdot 10^4 = 9,28 \cdot 10^{-2} \text{ J} \\ E_F &= Q' \cdot V_F = 1 \cdot 10^{-6} \cdot 9,36 \cdot 10^4 = 9,36 \cdot 10^{-2} \text{ J} \end{aligned} \right\} \rightarrow E_F > E_D$$

Cando a carga Q' se despraza desde D ata F, a enerxía electrostática do sistema aumenta polo traballo exterior realizado (a carga positiva Q' vai desde o punto D de menor potencial ata o punto F de maior potencial non de forma espontánea, senón como consecuencia dunha forza exterior aplicada).

4. Dúas cargas puntuais iguais $Q_1 = 1 \mu\text{C}$ están situadas nos puntos A(5,0) e B(-5,0). Calcula: a) O campo nos puntos C(8,0) e D(0,4); b) a enerxía para trasladar unha carga de $-1 \mu\text{C}$ desde C a D. Datos: $1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{ C}$; $k = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$; as coordenadas en metros. (Set. 06).

Solución:

a)

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^2 \vec{E}_i, \text{ sendo: } E_i = \frac{k Q_i}{r_i^2}$$


$$E_{1C} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{3^2} \rightarrow E_{1C} = 10^3 \text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_{1C} = 10^3 \vec{i} (\text{N C}^{-1})$$

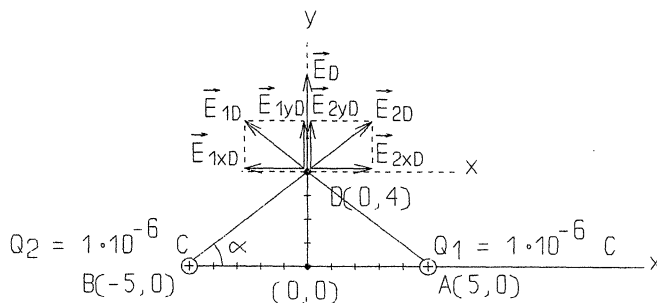
$$E_{2C} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{13^2} \rightarrow E_{2C} = 53,3 \text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_{2C} = 53 \vec{i} (\text{N C}^{-1})$$

$$\vec{E}_C = \vec{E}_{1C} + \vec{E}_{2C} \rightarrow \vec{E}_C = 1000 \vec{i} + 53 \vec{i} \rightarrow \vec{E}_C = 1053 \vec{i} (\text{N C}^{-1})$$

$$E_{1D} = E_{2D} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{5^2 + 4^2})^2}$$

$$E_{1D} = E_{2D} = 219,5 \text{ N C}^{-1}$$



$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_{1D} &= E_{1xD} \vec{i} + E_{1yD} \vec{j} \\ \vec{E}_{2D} &= E_{2xD} \vec{i} + E_{2yD} \vec{j} \\ E_{1xD} \vec{i} &= -E_{2xD} \vec{i} \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{E}_D = E_{1yD} \vec{j} + E_{2yD} \vec{j}$$

$$E_{1yD} = E_{2yD} = E_{1D} \cdot \sin \alpha \rightarrow E_{1yD} = 219,5 \cdot \frac{4}{\sqrt{5^2 + 4^2}} \rightarrow E_{1yD} = 137 \text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_D = 137 + 137 \rightarrow \vec{E}_D = 274 \text{ N C}^{-1}$$

b)

$$\left. \begin{aligned} W_C^D \text{ feito pola forza eléctrica do campo} &= -Q' \cdot (V_D - V_C) \\ V &= \sum_{i=1}^{i=2} V_i = \sum_{i=1}^{i=2} \frac{k Q_i}{r_i} \\ V_D &= \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{5^2 + 4^2}} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{5^2 + 4^2}} \rightarrow V_D = 2811 \text{ V} \\ V_C &= \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{3} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{13} \rightarrow V_C = 3692 \text{ V} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$W_C^D \text{ campo} = -(-1 \cdot 10^{-6}) \cdot (2811 - 3692) \rightarrow W_C^D \text{ campo} = -8,81 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

$$W_C^D \text{ forza exterior} = -W_C^D \text{ forza campo eléctrico} \rightarrow W_C^D \text{ forza exterior} = +8,81 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

5.- Dúas cargas puntuais negativas e iguais, de $10^{-3} \mu\text{C}$, están situadas sobre o eixe de abscisas, separadas unha distancia de 20 cm. A unha distancia de 50 cm sobre a vertical que pasa polo punto medio da liña que as une colócase unha terceira partícula (puntual) de carga $+10^{-3} \mu\text{C}$ e 1 g de masa, inicialmente en repouso. Calcula: a) O campo e o potencial eléctrico creado polas dúas primeiras na posición inicial da terceira; b) a velocidade da terceira carga ó chegar ó punto medio da liña de unión entre as dúas primeiras. Datos: $1 \mu\text{C} = 10^{-6} \text{ C}$; $k = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$; só se considera a interacción electrostática. (Xuño 04).

Solución:

a)

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{k Q_1}{r_1^2} \vec{u}_{r_1} + \frac{k Q_2}{r_2^2} \vec{u}_{r_2}$$

$$E_1 = E_2 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{0,5^2 + 0,1^2})^2} \rightarrow E_1 = E_2 = 34,6 \text{ N C}^{-1}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_{1A} &= E_{1xA} \vec{i} + E_{1yA} \vec{j} \\ \vec{E}_{2A} &= E_{2xA} \vec{i} + E_{2yA} \vec{j} \\ E_{1xA} \vec{i} &= -E_{2xA} \vec{i} \\ E_{1yA} \vec{j} &= E_{2yA} \vec{j} \end{aligned} \right\} \rightarrow \vec{E}_A = E_{1yA} \vec{j} + E_{2yA} \vec{j}$$

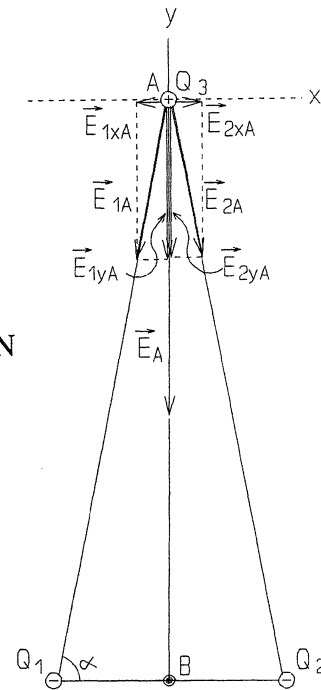
$$E_{1yA} = E_{1yA} \cdot \cos \alpha \rightarrow E_{1yA} = 34,6 \cdot \frac{50}{\sqrt{10^2 + 50^2}} \rightarrow E_{1yA} = 33,9 \text{ N}$$

$$\vec{E}_A = -33,9 \vec{j} - 33,9 \vec{j} \rightarrow \vec{E}_A = -67,8 \vec{j} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

$$V_A = \sum_{i=1}^{i=2} V_{iA} = \sum_{i=1}^{i=2} \frac{k Q_i}{r_{i-A}}$$

$$V_A = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-10^{-3}) \cdot 10^{-6}}{\sqrt{0,5^2 + 0,1^2}} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-10^{-3}) \cdot 10^{-6}}{\sqrt{0,5^2 + 0,1^2}}$$

$$V_A = 17,7 + 17,7 \rightarrow V_A = -35,4 \text{ V}$$



b) A forza eléctrica que actúa sobre a carga móbil ó longo do seu percorrido non é constante e, en consecuencia, o movemento non é uniformemente variado, non podendo facer uso das fórmulas cinemáticas deste movemento. Pero como esta forza é conservativa, podemos facer uso da conservación da enerxía mecánica:

$$\left. \begin{aligned} W_A^B &= \Delta E_k = E_{k_B} - E_{k_A} = E_{k_B} \\ W_A^B &= -\Delta E_p = -(E_{p_B} - E_{p_A}) \\ E_{k_B} &= \frac{1}{2} m v_B^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} E_{k_B} &= -E_{p_B} + E_{p_A} \\ E_{k_B} &= \frac{1}{2} m v_B^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2 (E_{p_A} - E_{p_B})}{m}}$$

$$E_{pA} = Q_3 \cdot V_{1A} + Q_3 \cdot V_{2A}$$

$$E_{pA} = 10^{-3} \cdot 10^{-6} \cdot (-17,7) + 10^{-3} \cdot 10^{-6} \cdot (-17,7) \rightarrow E_{pA} = -3,54 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

$$E_{pB} = \frac{k Q_1 Q_3}{r_{Q_1-Q_3}} + \frac{k Q_2 Q_3}{r_{Q_2-Q_3}}$$

$$E_{pB} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-10^{-3}) \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6}}{0,1} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-10^{-3}) \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6}}{0,1}$$

$$E_{pB} = -1,8 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

$$v_D = \sqrt{\frac{2 \cdot ((-3,54 \cdot 10^{-8}) - (-1,8 \cdot 10^{-7}))}{10^{-3}}} \rightarrow v_D = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$$

Das condicións do enunciado, cando Q_3 pasa polo eixe de abscisas, a velocidade ten a dirección do eixe de ordenadas, co sentido que vai desde o punto A cara ó B, $-\vec{j}$: $\vec{v}_B = -1,7 \cdot 10^{-2} \vec{j}$ (m/s).

6.- Dadas dúas cargas eléctricas, $Q_1 = 100 \mu\text{C}$ situada en $A(-3,0)$ e $Q_2 = -50 \mu\text{C}$ situada en $B(3,0)$ (as coordenadas en metros), calcula: a) O campo e o potencial en $(0,0)$; b) o traballo que hai que realizar para trasladar unha carga de -2 C dende o infinito ata $(0,0)$. Datos: $1 \text{ C} = 10^6 \mu\text{C}$, $k = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$. (Xuño 02).

Solución:

$$a) \vec{E} = \sum_{i=1}^{i=2} \vec{E}_i, \text{ sendo: } E_i = \frac{k Q_i}{r_i^2}$$

$$E_1 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}{3^2} \rightarrow E_1 = 10^5 \text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_1 = 10^5 \vec{i} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

$$E_2 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 50 \cdot 10^{-6}}{3^2} \rightarrow E_2 = 5 \cdot 10^4 \text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_2 = 5 \cdot 10^4 \vec{i} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 10^5 \vec{i} + 5 \cdot 10^4 \vec{i} \rightarrow \vec{E} = 1,5 \cdot 10^5 \vec{i} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

$$V = \sum_{i=1}^{i=2} V_i = k \sum_{i=1}^{i=2} \frac{Q_i}{r_i} \text{ (sendo } r_i \neq 0\text{)}$$

$$V_0 = 9 \cdot 10^9 \cdot \left[\frac{(100 \cdot 10^{-6})}{3} + \frac{(-50 \cdot 10^{-6})}{3} \right] \rightarrow V_0 = 1,5 \cdot 10^5 \text{ V}$$

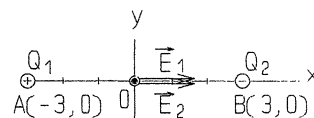
b)

$$W_{\infty}^0 \text{ (da forza eléctrica do campo)} = -Q' \cdot \Delta V = -Q' \cdot (V_0 - V_{\infty}) = -Q' \cdot (V_0 - 0)$$

$$W_{\infty}^0 = -(-2) \cdot (1,5 \cdot 10^5 - 0) \rightarrow W_{\infty}^0 = 3 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Como o traballo calculado é **positivo**, é realizado de forma espontánea pola forza do campo: a carga de -2 C desprázase por acción da forza do campo desde o infinito ata o punto $(0,0)$: as cargas negativas desprázanse espontaneamente desde as zonas de menos potencial ($V_{\infty} = 0 \text{ V}$) ás de máis potencial ($V_{(0,0)} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ V}$). O traballo exterior que hai que facer para que a carga de -2 C se desprace, desde o infinito ata o punto, a velocidade constante é: $W_{\text{exterior}} = -W_{\text{campo}} = -3 \cdot 10^5 \text{ J}$.

7.- Unha carga puntual Q crea un campo electrostático. Ó trasladar outra carga Q' desde



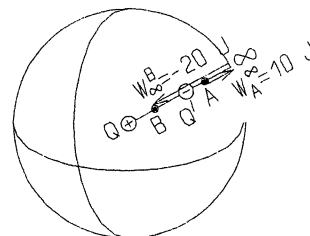
o punto A ó infinito realízase un traballo de 10 J e se se traslada desde o infinito a B o traballo é de -20 J. a) Que traballo se realiza para trasladar Q' de A a B? b) Se $Q' = -2$ C, cal é o signo de Q ? que punto está máis próximo de Q , o A ou o B? (Set. 01).

Solución:

$$a) W_{A \text{ (exterior)}}^B = W_{\infty \text{ (exterior)}}^B - W_{\infty \text{ (exterior)}}^A = W_{\infty \text{ (exterior)}}^B - (-W_{A \text{ (exterior)}}^{\infty})$$

$$W_{A \text{ (exterior)}}^B = (-20) - (-10) \rightarrow W_{A \text{ (exterior)}}^B = -10 \text{ J}$$

Como o traballo feito por unha forza exterior á do campo eléctrico é negativo; o traballo que desenvolve a forza eléctrica é positivo e a carga Q' desprázase de A a B de forma espontánea.



b)

$$\left. \begin{array}{l} W_{A \text{ (exterior)}}^{\infty} = +Q' (V_{\infty} - V_A) = Q' \cdot (0 - V_A) = -Q' \cdot V_A \\ W_{A \text{ (exterior)}}^{\infty} = 10 \text{ J} > 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -Q' \cdot V_A > 0 \\ Q' < 0 \end{array} \right\} \rightarrow V_A > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} V_A > 0 \\ V_A = \frac{k Q}{r} \end{array} \right\} \rightarrow Q > 0$$

Tamén podemos razoar o signo positivo da carga creadora do campo eléctrico, Q , da seguinte forma: Como $W_{A \text{ (exterior)}}^{\infty} > 0$, o traballo feito pola forza eléctrica do campo eléctrico, $W_{A \text{ (campo)}}^{\infty} < 0$ e a carga Q' non se despraza espontaneamente por acción das forzas do campo, sendo as carga Q e Q' de distinto signo. Como a carga Q' é negativa, a carga Q é positiva.

$$W_{A \text{ (exterior)}}^{\infty} = Q' \cdot (V_{\infty} - V_A) \rightarrow 10 = -2 \cdot (0 - V_A) \rightarrow V_A = 5 \text{ V}$$

$$W_{\infty \text{ (exterior)}}^B = Q' \cdot (V_B - V_{\infty}) \rightarrow -20 = -2 \cdot (V_B - 0) \rightarrow V_B = 10 \text{ V}$$

Como o potencial eléctrico é inversamente proporcional á distancia do punto onde se calcula á carga que o crea, o punto B está máis próximo a Q que o A.

De outra forma: O traballo exterior de desprazar a carga Q' desde A ata B é negativo, $W_{A \text{ (exterior)}}^B = -10 \text{ J}$, e, polo tanto, o traballo $W_{A \text{ (campo)}}^B = +10 \text{ J}$, sendo desenvolto de forma espontánea pola forza do campo eléctrico. Como as cargas Q e Q' son de distinto signo, o punto B está máis próximo de Q que o punto A.

8.- Dúas cargas eléctricas puntuais de 2 e $-2 \mu\text{C}$ cada unha están situadas respectivamente en (2,0) e en (-2,0) (en metros). Calcula: a) o campo eléctrico en (0,0) e en (0,10); b) o traballo para transportar unha carga Q' de $-1 \mu\text{C}$ desde (1,0) a (-1,0). Dato: $k = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$. (Xuño 01).

Solución:

a)

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=2} \vec{E}_i, \text{ sendo: } E_i = \frac{k Q_i}{r_i^2}$$

$$E_{1(0,0)} = E_{2(0,0)} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{2^2}$$

$$E_{1(0,0)} = E_{2(0,0)} = 4,5 \cdot 10^3 \text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_{1(0,0)} = \vec{E}_{2(0,0)} = -4,5 \cdot 10^3 \vec{i} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

$$\vec{E}_{\text{total}(0,0)} = \vec{E}_{1(0,0)} + \vec{E}_{2(0,0)} = -9,0 \cdot 10^3 \vec{i} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

$$E_{1(0,10)} = E_{2(0,10)} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{2^2 + 10^2})^2} \rightarrow E_{1(0,10)} = E_{2(0,10)} = 173,1 \text{ N C}^{-1}$$

$$E_{1x(0,10)} = E_{2x(0,10)} = E_{1(0,10)} \cdot \cos \alpha$$

$$E_{1x(0,10)} = E_{2x(0,10)} = 173,1 \cdot 10^3 \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2 + 10^2}} \rightarrow E_{1x(0,10)} = E_{2x(0,10)} = 34,0 \text{ N C}^{-1}$$

$$E_{(0,10)} = E_{1x(0,10)} + E_{2x(0,10)} = 34,0 + 34,0 = 68,0 \text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_{(0,10)} = -68,0 \vec{i} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

b)

$$W_{(1,0)}^{(-1,0)} \text{ (feito pola forza eléctrica do campo)} = -Q' \cdot (V_{(-1,0)} - V_{(1,0)})$$

$$V = \sum_{i=1}^{i=2} V_i = \sum_{i=1}^{i=2} \frac{k Q_i}{r_i}$$

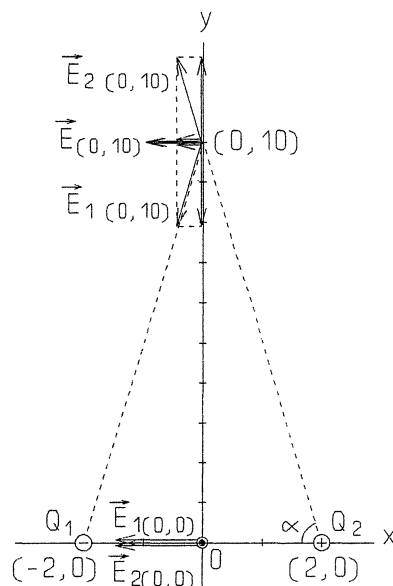
$$V_{(1,0)} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{1} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-2 \cdot 10^{-6})}{3} = 1,2 \cdot 10^4 \text{ V}$$

$$V_{(-1,0)} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{3} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-2 \cdot 10^{-6})}{1} = -1,2 \cdot 10^4 \text{ V}$$

$$W_{(1,0)}^{(-1,0)} = -(-1 \cdot 10^{-6}) \cdot (-1,2 \cdot 10^4 - 1,2 \cdot 10^4) \rightarrow W_{(1,0)}^{(-1,0)} = -2,4 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

Se a carga Q' se despraza a velocidade constante, podemos relacionar o traballo desenvolvido pola forza eléctrica do campo e traballo exterior segundo a expresión:

$$W_{(1,0)}^{(-1,0)} \text{ (forza exterior)} = -W_{(1,0)}^{(-1,0)} \text{ (forza campo eléctrico)} \rightarrow W_{(1,0)}^{(-1,0)} \text{ (forza exterior)} = +2,4 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$



9. Dúas cargas eléctricas puntuais de $-2 \mu\text{C}$, están situadas nos puntos $A(-4,0)$ e $B(4,0)$. Calcula: a) a forza sobre unha carga de $1 \mu\text{C}$, situada no punto $(0,5)$; b) a velocidade que terá ó pasar polo punto $(0,0)$? (Datos $k = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$, masa $m = 1 \text{ g}$). (Xuño 00).

Solución:

a)

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B$$

$$F_A = \frac{k Q_A Q}{r^2} \rightarrow F_A = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{4^2 + 5^2})^2} = 4,4 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

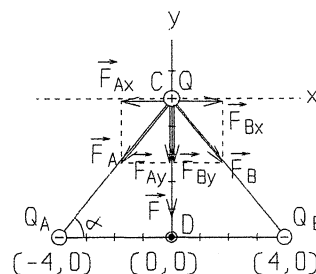
$$F_{Ax} = F_A \cdot \cos \alpha \rightarrow F_{Ax} = 4,4 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{4}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = 2,75 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

$$F_{Ay} = F_A \cdot \sin \alpha \rightarrow F_{Ay} = 4,4 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{5}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = 3,44 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

$$\vec{F}_A = -2,75 \cdot 10^{-4} \vec{i} - 3,44 \cdot 10^{-4} \vec{j} \text{ (N)}$$

$$\vec{F}_B = 2,75 \cdot 10^{-4} \vec{i} - 3,44 \cdot 10^{-4} \vec{j} \text{ (N)}$$

$$\vec{F} = -6,88 \cdot 10^{-4} \vec{j} \text{ (N)}$$



b) A forza eléctrica que actúa sobre a carga móbil ó longo do seu percorrido non é constante e, en consecuencia, o movemento non é uniformemente variado, non podendo facer uso das fórmulas cinemáticas deste movemento. Pero como a forza á que está sometida é conservativa, podemos facer uso da conservación da enerxía mecánica:

$$\left. \begin{aligned} W_C^D &= \Delta E_k = E_{k_D} - E_{k_C} = E_{k_D} \\ W_C^D &= -\Delta E_p = -(E_{p_D} - E_{p_C}) \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} E_{k_D} &= -E_{p_D} + E_{p_C} \\ E_{k_D} &= \frac{1}{2} m v_D^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow v_D = \sqrt{\frac{2(E_{p_C} - E_{p_D})}{m}}$$

$$E_{p_C} = \frac{k Q_A Q}{r_{Q_A-Q}} + \frac{k Q_B Q}{r_{Q_B-Q}}$$

$$E_{p_C} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-2 \cdot 10^{-6}) \cdot 10^{-6}}{\sqrt{4^2 + 5^2}} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-2 \cdot 10^{-6}) \cdot 10^{-6}}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = -5,6 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$E_{p_D} = \frac{k Q_A Q}{r_{Q_A-D}} + \frac{k Q_B Q}{r_{Q_B-D}}$$

$$E_{p_D} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-2 \cdot 10^{-6}) \cdot 10^{-6}}{4} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-2 \cdot 10^{-6}) \cdot 10^{-6}}{4} = -9,0 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$v_D = \sqrt{\frac{2 \cdot ((-5,6 \cdot 10^{-3}) - (-9,0 \cdot 10^{-3}))}{1 \cdot 10^{-3}}} \rightarrow v_D = 2,6 \text{ m s}^{-1}$$

10.- Dúas cargas puntuais de $8 \mu\text{C}$ e $-5 \mu\text{C}$ están situadas respectivamente nos puntos $(0,0)$ e $(1,1)$. Calcula: a) a forza que actúa sobre unha terceira carga de $1 \mu\text{C}$ situada no punto $(2,2)$, b) o traballo necesario para levar esta última carga desde o punto que ocupa ata o punto $(0,1)$. Datos: $k = 9,00 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$; as coordenadas danse en metros. (Xuño 98).

Solución:

a)

$$\vec{F} = \vec{F}_{Q_1-Q_3} + \vec{F}_{Q_2-Q_3}$$

$$F_{Q_1-Q_3} = \frac{k Q_1 Q_3}{r_{1-3}^2} \rightarrow F_{Q_1-Q_3} = \frac{9,00 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{2^2 + 2^2})^2} = 9,00 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

$$F_{Q_2-Q_3} = \frac{k Q_2 Q_3}{r_{2-3}^2} \rightarrow F_{Q_2-Q_3} = \frac{9,00 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{1^2 + 1^2})^2} = 22,50 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

$$(F_{Q_1-Q_3})_x = F_{Q_1-Q_3} \cdot \cos \alpha \rightarrow (F_{Q_1-Q_3})_x = 9,00 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 6,36 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

$$(F_{Q_1-Q_3})_y = F_{Q_1-Q_3} \cdot \sin \alpha \rightarrow (F_{Q_1-Q_3})_y = 9,00 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 6,36 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

$$\vec{F}_{Q_1-Q_3} = 6,36 \cdot 10^{-3} \vec{i} + 6,36 \cdot 10^{-3} \vec{j} \text{ (N)}$$

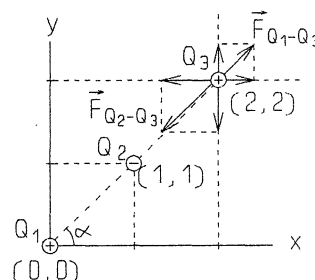
$$(F_{Q_2-Q_3})_x = F_{Q_2-Q_3} \cdot \cos \alpha \rightarrow (F_{Q_2-Q_3})_x = 22,50 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 15,91 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

$$(F_{Q_2-Q_3})_y = F_{Q_2-Q_3} \cdot \sin \alpha \rightarrow (F_{Q_2-Q_3})_y = 22,50 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 15,91 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

$$\vec{F}_{Q_2-Q_3} = -15,91 \cdot 10^{-3} \vec{i} - 15,91 \cdot 10^{-3} \vec{j} \text{ (N)}$$

$$\vec{F} = 6,36 \cdot 10^{-3} \vec{i} + 6,36 \cdot 10^{-3} \vec{j} + (-15,91 \cdot 10^{-3} \vec{i} - 15,91 \cdot 10^{-3} \vec{j})$$

$$\vec{F} = -9,55 \cdot 10^{-3} \vec{i} - 9,55 \cdot 10^{-3} \vec{j} \text{ (N)}$$



b)

$$W_{A \text{ (feito pola forza eléctrica do campo)}}^B = -Q \cdot (V_B - V_A)$$

$$V_B = \sum_{i=1}^{i=2} V_i = \sum_{i=1}^{i=2} \frac{k Q_i}{r_i}$$

$$V_B = \frac{9,00 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-6}}{1} + \frac{9,00 \cdot 10^9 \cdot (-5 \cdot 10^{-6})}{1} = 2,70 \cdot 10^4 \text{ V}$$

$$V_A = \frac{9,00 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{2^2 + 2^2}} + \frac{9,00 \cdot 10^9 \cdot (-5 \cdot 10^{-6})}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = -6,36 \cdot 10^3 \text{ V}$$

$$W_{A \text{ campo}}^B = -1 \cdot 10^{-6} \cdot (2,70 \cdot 10^4 - (-6,36 \cdot 10^3)) \rightarrow W_{A \text{ campo}}^B = 3,34 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

O traballo exterior, W_{exterior} , que hai que facer para que a terceira carga de $1 \mu\text{C}$ se desprace con velocidade constante desde o punto (2,2) ata o punto (0,1) coincide co traballo feito pola forza do campo, cambiado de signo:

$$W_{A \text{ (forza exterior)}}^B = -W_{A \text{ (forza campo eléctrico)}}^B \rightarrow W_{A \text{ (forza exterior)}}^B = -3,34 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

11. Nos vértices dun cadrado de 1 m de lado sitúanse catro cargas de valores -1 , $+1$, -1 e $+1$, en μC , de maneira que as de signo igual están en vértices opostos. Calcula: a) O campo eléctrico no punto medio dun calquera dos lados e b) O traballo necesario para desprazar unha quinta carga de $+1 \mu\text{C}$ desde un a outro punto medio de dous lados calquera. Dato: $k = 9,00 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$. (Set. 97).

Solución:

a)

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{i=4} \vec{E}_i, \text{ sendo: } E_i = \frac{k Q_i}{r_i^2}$$

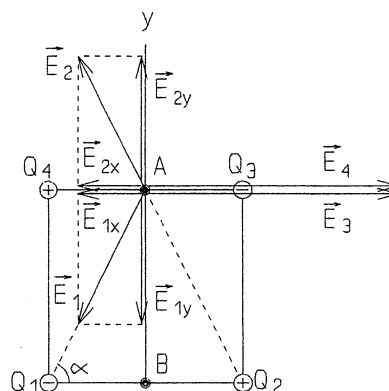
$$E_1 = \frac{9,00 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{(\sqrt{1^2 + 0,5^2})^2} \rightarrow E_1 = 7,2 \cdot 10^3 \text{ N C}^{-1}$$

$$E_{1x} = E_1 \cdot \cos \alpha \rightarrow E_{1x} = 7,2 \cdot 10^3 \cdot \frac{0,5}{\sqrt{1^2 + 0,5^2}} = 3,2 \cdot 10^3 \text{ N C}^{-1}$$

$$E_{1y} = E_1 \cdot \sin \alpha \rightarrow E_{1y} = 7,2 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + 0,5^2}} = 6,4 \cdot 10^3 \text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_1 = -3,2 \cdot 10^3 \vec{i} - 6,4 \cdot 10^3 \vec{j} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

$$\vec{E}_2 = -3,2 \cdot 10^3 \vec{i} + 6,4 \cdot 10^3 \vec{j} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$



$$E_3 = \frac{9,00 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-6}}{0,5^2} \rightarrow E_3 = 3,6 \cdot 10^4 \text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_3 = \vec{E}_4 = 3,6 \cdot 10^4 \vec{i} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$$

$$\vec{E} = (-3,2 \cdot 10^3 \vec{i} - 6,4 \cdot 10^3 \vec{j}) + (-3,2 \cdot 10^3 \vec{i} + 6,4 \cdot 10^3 \vec{j}) + (3,6 \cdot 10^4 \vec{i}) + (3,6 \cdot 10^4 \vec{i})$$

$$\vec{E} = 6,56 \cdot 10^4 \vec{i} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

b)

$$W_A^B \text{ (feito pola forza eléctrica do campo)} = -Q \cdot (V_B - V_A)$$

$$V = \sum_{i=1}^{i=4} V_i = k \sum_{i=1}^{i=4} \frac{Q_i}{r_i} \text{ (sendo } r_i \neq 0\text{)}$$

$$V_A = 9 \cdot 10^9 \cdot \left[\frac{(-1 \cdot 10^{-6})}{\sqrt{1^2 + 0,5^2}} + \frac{1 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1^2 + 0,5^2}} + \frac{(-1 \cdot 10^{-6})}{0,5} + \frac{1 \cdot 10^{-6}}{0,5} \right] = 0 \text{ V}$$

$$V_B = 9 \cdot 10^9 \cdot \left[\frac{(-1 \cdot 10^{-6})}{0,5} + \frac{1 \cdot 10^{-6}}{0,5} + \frac{(-1 \cdot 10^{-6})}{\sqrt{1^2 + 0,5^2}} + \frac{1 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1^2 + 0,5^2}} \right] = 0 \text{ V}$$

$$W_A^B \text{ (da forza eléctrica)} = 0 \text{ J}$$

O traballo exterior, W_{exterior} , para que a quinta carga de $1 \mu\text{C}$ se desprace con velocidade constante coincide co traballo feito pola forza do campo, cambiado de signo: $W_{\text{exterior}} = 0 \text{ J}$.

12.- Dadas as cargas puntuais $Q_1 = 80 \mu\text{C}$, $Q_2 = -80 \mu\text{C}$, $Q_3 = 40 \mu\text{C}$ situadas nos puntos A(-2,0), B(2,0) e C(0,2) respectivamente (coordenadas en metros), calcula: a) A intensidade do campo electrostático no punto (0,0) e b) O traballo necesario para traer unha carga de $1 \mu\text{C}$ desde o infinito ata o punto (0,0). ($k = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$). (Xuño 96).

Solución:

$$\text{a) } \vec{E} = \sum_{i=1}^{i=3} \vec{E}_i, \text{ sendo: } E_i = \frac{k Q_i}{r_i^2}$$

$$E_1 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 80 \cdot 10^{-6}}{2^2} \rightarrow E_1 = 1,80 \cdot 10^5 \text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_1 = 1,80 \cdot 10^5 \vec{i} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

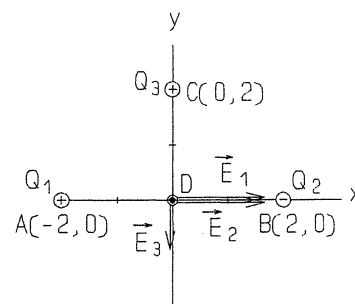
$$\vec{E}_2 = \vec{E}_1 = 1,80 \cdot 10^5 \vec{i} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

$$E_3 = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 40 \cdot 10^{-6}}{2^2} \rightarrow E_3 = 9,0 \cdot 10^4 \text{ N C}^{-1}$$

$$\vec{E}_3 = -9,0 \cdot 10^4 \vec{j} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 1,80 \cdot 10^5 \vec{i} + 1,80 \cdot 10^5 \vec{i} - 9,0 \cdot 10^4 \vec{j}$$

$$\vec{E} = 3,6 \cdot 10^5 \vec{i} - 9,0 \cdot 10^4 \vec{j} \text{ (N C}^{-1}\text{)}$$



b)

$$W_{\infty}^D \text{ feito pela força eléctrica do campo} = -Q \cdot (V_D - V_{\infty})$$

$$V_D = \sum_{i=1}^{i=3} V_i = \sum_{i=1}^{i=3} \frac{k Q_i}{r_i}$$

$$V_D = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 80 \cdot 10^{-6}}{2} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot (-80 \cdot 10^{-6})}{2} + \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 40 \cdot 10^{-6}}{2} = 1,80 \cdot 10^5 \text{ V}$$

$$V_{\infty} = 0 \text{ V}$$

$$W_{\infty}^D \text{ (do campo eléctrico)} = -1 \cdot 10^{-6} \cdot (1,80 \cdot 10^5 - 0) \rightarrow W_{\infty}^D \text{ (do campo eléctrico)} = -1,80 \cdot 10^{-1} \text{ J}$$

O trabalho exterior, W_{exterior} , para trazer com velocidade constante a carga de $1 \mu\text{C}$ desde o infinito ata o ponto (0,0) coincide co trabalho feito pola força do campo, cambiado de signo: