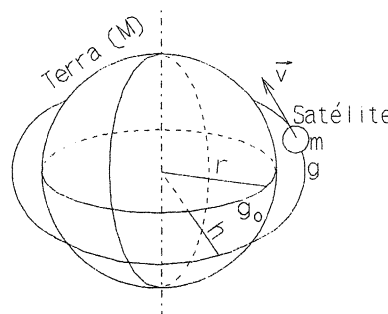


PROBLEMAS

1.- Os satélites Meteosat son satélites xeoestacionarios (situados sobre o Ecuador terrestre e cun período orbital de un día). Calcula: a) a altura á que se atopan respecto á superficie terrestre; b) a forza exercida sobre o satélite; c) a enerxía mecánica. (Datos: $R_T = 6,38 \cdot 10^6$ m; $M_T = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg; $m_{\text{satélite}} = 8 \cdot 10^2$ kg; $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻²). (Set. 08).

Solución:

a) Dado que o satélite se quere colocar nunha órbita xeoestacionario, ademais de ser estable, o que significa: $F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}}$, o seu período de revolución, $T_{\text{satélite}}$, coincide co da Terra, $T_{\text{Terra}}: T_{\text{satélite}} = T_{\text{Terra}} = 86400$ s.



$$\left. \begin{aligned} \frac{m v^2}{r+h} &= m g \\ v &= \omega (r+h) \\ g &= \frac{G M}{(r+h)^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{[\omega (r+h)]^2}{r+h} &= \frac{G M}{(r+h)^2} \\ \omega &= \frac{2 \pi}{T} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\left[\frac{2 \pi}{T} (r+h) \right]^2}{r+h} = \frac{G M}{(r+h)^2}$$

$$r+h = \sqrt[3]{\frac{G M T^2}{4 \pi^2}}$$

$$r+h = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 86400^2}{4 \cdot \pi^2}} \rightarrow r+h = 4,22 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$h = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m} \rightarrow h = 3,58 \cdot 10^7 \text{ m}$$

b) A forza que a Terra exerce sobre o satélite é a forza gravitatoria.

$$F_{\text{Terra-satélite}} = F_G = G \frac{M m}{(r+h)^2} \rightarrow F_G = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24} \cdot 800}{4,22 \cdot 10^7} \rightarrow F_G = 179 \text{ N}$$

c) A enerxía mecánica do satélite é a suma da súa enerxía cinética e potencial: $E_m = E_k + E_p$

$$\left. \begin{aligned} E_m &= E_p + E_k \\ E_p &= - \frac{G M m}{(r+h)} \\ E_k &= \frac{1}{2} m v^2 \\ v &= \sqrt{\frac{G M}{r+h}} \end{aligned} \right\} \rightarrow E_k = \frac{1}{2} m \frac{G M}{(r+h)}$$

$$\rightarrow E_m = - \frac{1}{2} \frac{G M m}{(r+h)}$$

$$E_m = - \frac{1}{2} \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 800}{4,22 \cdot 10^7} \rightarrow E_m = -3,78 \cdot 10^9 \text{ J}$$

2.- Dúas masas de 50 kg están situadas en A(-30,0) e B(30,0) respectivamente (coordenadas en metros). Calcula: a) o campo gravitatorio en P(0,40) e en D(0,0); b) o potencial gravitatorio en P e D; c) para unha masa m , onde é maior a enerxía potencial gravitatoria, en P ou en D?. (Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$). (Set. 08).

Solución:

$$a) \vec{g}_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{i=n} \vec{g}_i$$

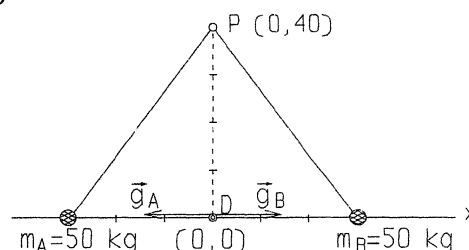
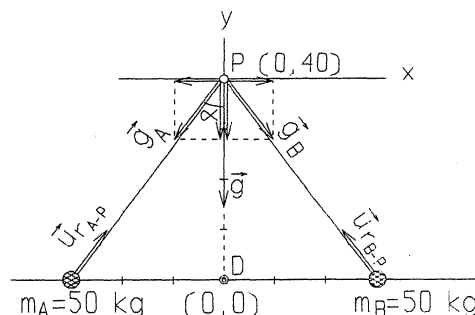
$$\vec{g}_i = - \frac{G m_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}$$

$$g_A = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 50}{(\sqrt{40^2 + 30^2})^2} \rightarrow g_A = 1,33 \cdot 10^{-12} \text{ m s}^{-2}$$

$$g_B = g_A = 1,33 \cdot 10^{-12} \text{ m s}^{-2}$$

$$\vec{g}_P = -2 \cdot 1,33 \cdot 10^{-12} \cdot \cos \alpha \vec{j} = -2 \cdot 1,33 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{40}{50} \vec{j} (\text{m s}^{-1})$$

$$\vec{g}_P = -2,13 \cdot 10^{-12} \vec{j} (\text{m s}^{-2})$$



No punto D(0,0), a intensidade de campo gravitatorio que crean ambas masas son vectores opostos: teñen o mesmo módulo, a mesma dirección e son de sentido contrario, e, en consecuencia, a resultante é nula: $\vec{g} = 0$.

b) Calculamos agora o potencial gravitatorio V que as masas situadas en A e en B crean no punto P.

$$\left. \begin{aligned} V_{\text{total}} &= \sum_{i=1}^{i=n} V_i = V_1 + V_2 \\ V_i &= - \frac{G m_i}{r_i} \\ V_1 &= V_2 \end{aligned} \right\} \rightarrow V_{\text{total}} = -2 \cdot \frac{G m}{r}$$

$$V_{P \text{ total}} = -2 \cdot \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 50}{\sqrt{40^2 + 30^2}} \rightarrow V_{P \text{ total}} = -2,13 \cdot 10^{-10} \text{ J kg}^{-1}$$

De forma análoga calculamos o potencial no punto D.

$$V_{D \text{ total}} = -2 \cdot \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 50}{30} \rightarrow V_{D \text{ total}} = -2,22 \cdot 10^{-10} \text{ J kg}^{-1}$$

c) A enerxía potencial gravitatoria E_p dunha masa m nun punto de potencial gravitatorio V é:

$$E_p = m \cdot V$$

Para o caso do exercicio resulta:

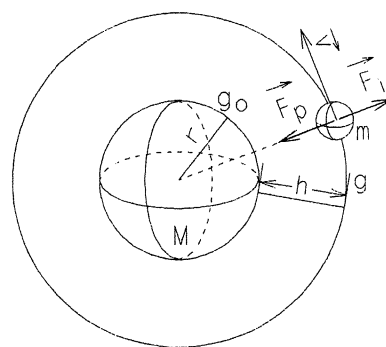
$$\left. \begin{array}{l} E_{p \text{ en } P} = -1,33 \cdot 10^{-10} \cdot m \\ E_{p \text{ en } D} = -2,22 \cdot 10^{-10} \cdot m \end{array} \right\} \rightarrow E_{p \text{ en } P} > E_{p \text{ en } D}$$

3.- Un satélite artificial de 100 kg describe órbitas circulares a unha altura de 6000 km sobre a superficie da Terra. Calcula: a) o tempo que tarda en dar unha volta completa; b) o peso do satélite a esta altura. (Datos: $g_0 = 9,80 \text{ m/s}^2$; $r_T = 6400 \text{ km}$). (Xuño 06).

Solución:

a) O período, T , de revolución dun satélite en órbita circular arredor da Terra é o tempo que tarda en dar unha volta completa:

$$\left. \begin{array}{l} T = \frac{2 \pi}{\omega} \\ \omega = \frac{v}{(r+h)} \end{array} \right\} \rightarrow T = \frac{2 \pi}{\frac{v}{(r+h)}} \rightarrow T = \frac{2 \pi (r+h)}{v}$$



Escribindo a velocidade de xiro dun satélite, v , en función do raio da Terra, r , do raio da órbita do satélite, $(r+h)$, e da aceleración da gravidade terrestre na súa superficie, g_0 :

$$v = \sqrt{\frac{g_0 r^2}{(r+h)}}, \text{ resulta: } T = \frac{2 \pi (r+h)}{\sqrt{\frac{g_0 r^2}{(r+h)}}}$$

$$T = \frac{2 \pi (6400 + 6000) \cdot 10^3}{\sqrt{\frac{9,80 \cdot (6400 \cdot 10^3)^2}{(6400 + 6000) \cdot 10^3}}} \rightarrow T = 1,37 \cdot 10^4 \text{ s}$$

b)

$$G_{\text{do satélite á altura da órbita}} = m_{\text{satélite}} \cdot g_{\text{Terra á altura de 6000 km}}$$

$$\left. \begin{array}{l} g_{\text{Terra á altura de 6000 km}} = \frac{G M_T}{(r+h)^2} \\ g_{\text{Terra na súa superficie}} = g_0 = \frac{G M_T}{r^2} \end{array} \right\} \rightarrow g_{\text{Terra á altura de 6000 km}} = \frac{g_0 \cdot r^2}{(r+h)^2}$$

$$g_{\text{Terra á altura de 6000 km}} = \frac{9,80 \cdot (6400 \cdot 10^3)^2}{[(6400 + 6000) \cdot 10^3]^2} \rightarrow g_{\text{Terra á altura de 6000 km}} = 1,5 \text{ m s}^{-2}$$

$$G_{\text{do satélite á altura de 6000 km}} = 100 \cdot 2,61 \rightarrow G_{\text{do satélite á altura de 6000 km}} = 261 \text{ N}$$

4.- O período de rotación da Terra arredor do Sol é un ano e o raio da órbita é $1,5 \cdot 10^{11}$ m. Se Xúpiter ten un período de aproximadamente 12 anos e se o raio da órbita de Neptuno é de $4,5 \cdot 10^{12}$ m, calcula: a) o raio da órbita de Xúpiter; b) o período do movemento orbital de Neptuno. (Set. 05).

Solución:

a) Se recordamos a terceira lei de Kepler, sabemos que o cociente entre o cadrado do tempo que tarda un planeta en dar unha volta arredor do Sol (período, T) e o cubo do semieixe maior da elipse que describe, r , (que, nunha aproximación circular, correspóndese co raio dunha circunferencia), é o mesmo para todos os planetas: $T^2/r^3 = \text{cte}$. Aplicando esta lei á Terra e a Xúpiter resulta:

$$\frac{T_{\text{Terra}}^2}{r_{\text{Terra}}^3} = \frac{T_{\text{Xúpiter}}^2}{r_{\text{Xúpiter}}^3} \rightarrow \frac{1^2}{(1,5 \cdot 10^{11})^3} = \frac{12^2}{r_{\text{Xúpiter}}^3} \rightarrow r_{\text{Xúpiter}} = 7,9 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

b) Aplicando a mesma lei á Terra e a Neptuno temos:

$$\frac{T_{\text{Terra}}^2}{r_{\text{Terra}}^3} = \frac{T_{\text{Neptuno}}^2}{r_{\text{Neptuno}}^3} \rightarrow \frac{1^2}{(1,5 \cdot 10^{11})^3} = \frac{T_{\text{Neptuno}}^2}{(4,5 \cdot 10^{12})^3} \rightarrow T_{\text{Neptuno}} = 164 \text{ anos}$$

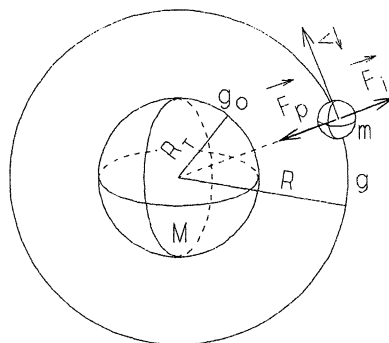
3.- Un Satélite artificial de 64,5 kg xira arredor da Terra nunha órbita circular de raio $R = 2,32 R_T$. Calcula: a) o período de rotación do satélite; b) o peso do satélite na órbita. Datos: $R_T = 6370$ km; $g_0 = 9,80 \text{ m/s}^2$. (Xuño 05).

Solución:

a) Operando de forma análoga a como se fixo no número

1 destes problemas resulta: $T = \frac{2 \pi R}{\sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{R}}}$

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6370 \cdot 10^3 \cdot 2,32}{\sqrt{\frac{9,80 \cdot (6370 \cdot 10^3)^2}{6370 \cdot 10^3 \cdot 2,32}}} \rightarrow T = 1,79 \cdot 10^4 \text{ s}$$



b)

$$G_{\text{do satélite á altura da órbita}} = m_{\text{satélite}} \cdot g_{\text{Terra á altura da órbita}}$$

$$\left. \begin{aligned} g_{\text{Terra á altura da órbita}} &= \frac{G M_T}{R^2} \\ g_{\text{Terra na súa superficie}} &= g_0 = \frac{G M_T}{R_T^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow g_{\text{Terra á altura da órbita}} = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{R^2}$$

$$g_{\text{Terra á altura da órbita}} = \frac{9,80 \cdot (6370 \cdot 10^3)^2}{(6370 \cdot 10^3 \cdot 2,32)^2} \rightarrow g_{\text{Terra á altura da órbita}} = 1,82 \text{ m s}^{-2}$$

$$G_{\text{do satélite á altura da órbita}} = 64,5 \cdot 1,82 \rightarrow G_{\text{do satélite á altura da órbita}} = 117 \text{ N}$$

5.- A masa da Lúa respecto da Terra é $0,0112 M_T$ e o seu raio é $r_T/4$. Dado un corpo cuxo peso na Terra é de 980 N ($g_0 = 9,80 \text{ m s}^{-2}$), calcula: a) a masa e o peso do corpo na Lúa; b) a velocidade coa que o corpo chega á superficie luar se cae desde unha altura de 100 m . (Set. 04)

Solución:

a) Aplicando a segunda lei de Newton, $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, calculamos a masa do corpo:

$$G_{0T} = m \cdot g_{0T} \rightarrow 980 = m \cdot 9,80 \rightarrow m = 100 \text{ kg}$$

A masa dun corpo non depende do lugar no que se encontre, tendo o mesmo valor na Lúa que na Terra.

O peso do corpo na Lúa calcúlase coa expresión: $G_{Lúa} = m \cdot g_{Lúa}$, polo que é necesario coñecer previamente a intensidade do campo gravitatorio luar na superficie da Lúa.

$$\left. \begin{aligned} g_{0L} &= \frac{G M_L}{r_L^2} \\ g_{0T} &= \frac{G M_T}{r_T^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{g_{0L}}{g_{0T}} = \frac{M_L}{M_T} \cdot \frac{r_T^2}{r_L^2} \rightarrow g_{0L} = 9,80 \cdot 0,0112 \cdot 4^2 \rightarrow g_{0L} = 1,76 \text{ m s}^{-2}$$

$$G_{0L} = 100 \cdot 1,76 \rightarrow G_{0L} = 176 \text{ N}$$

b) Como a altura desde a que o corpo cae é pequena, consideramos constante a aceleración da gravidade: $g = g_{\text{na superficie da Lúa}} = 1,76 \text{ m s}^{-2}$.

Como a aceleración de caída é constante, o movemento é rectilíneo uniformemente acelerado e a ecuación cinemática a utilizar para calcular a velocidade de chegada é: $\vec{v}_{\text{chan}} = \vec{v}_0 + \vec{g}_{Lúa} \cdot t$.

$$v_{\text{chan}} = 0 + 1,76 \cdot t$$

Para calcular o tempo facemos uso da ecuación do vector desprazamento, $\Delta \vec{r}$, para este movemento: $\Delta \vec{r} = \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot t^2 \rightarrow 100 = \frac{1}{2} \cdot 1,76 \cdot t^2 \rightarrow t = 10,66 \text{ s}$

$$v_{\text{chan}} = 1,76 \cdot 10,66 \rightarrow v_{\text{chan}} = 18,7 \text{ m s}^{-1}$$

6.- En cada un dos tres vértices dun cadrado de 2 m de lado hai unha masa de 10 kg . Calcula: a) o campo e o potencial gravitatorios creados por esas masas no vértice baleiro; b) a enerxía empregada para trasladar unha cuarta masa de 1 kg desde o infinito ó centro do cadrado. (Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$; as masas considéranse puntuais). (Set. 03).

Solución:

a) A intensidade do campo gravitatorio, $\vec{g}_i$, creado por unha masa m_i nun punto situado a unha distancia r_i vén dada pola expresión: $\vec{g} = -\frac{G m_i}{r_i^2} \vec{u}_r$, sendo G a constante de gravitación universal e $\vec{u}_r$ o vector unitario na dirección que une a masa m_i co punto onde se calcula $\vec{g}_i$, co sentido que vai desde m_i ata o punto.

Como son tres as masas creadoras de campo, a intensidade total obtense aplicando o principio

de superposición: $\vec{g} = \sum_{i=1}^{i=3} \vec{g}_i$

$$g_1 = g_3 = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{2^2} \rightarrow g_1 = g_3 = 1,67 \cdot 10^{-10} \text{ N kg}^{-1}$$

$$g_2 = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{(\sqrt{2^2 + 2^2})^2} \rightarrow g_2 = 0,83 \cdot 10^{-10} \text{ N kg}^{-1}$$

$$g_{2x} = g_2 \cdot \cos 45^\circ \rightarrow g_{2x} = 0,83 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow g_{2x} = 0,59 \cdot 10^{-10} \text{ N kg}^{-1}$$

$$g_{2y} = g_{2x}$$

$$g_x = g_1 + g_{2x} \rightarrow g_x = 1,67 \cdot 10^{-10} + 0,59 \cdot 10^{-10} \rightarrow g_x = 2,26 \cdot 10^{-10} \text{ N kg}^{-1}$$

$$g_y = g_3 + g_{2y} = g_x$$

$$\vec{g} = -2,26 \cdot 10^{-10} \vec{i} - 2,26 \cdot 10^{-10} \vec{j} \text{ (N kg}^{-1}\text{)}$$

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} \rightarrow g = \sqrt{(-2,26 \cdot 10^{-10})^2 + (-2,26 \cdot 10^{-10})^2} \rightarrow g = 3,20 \cdot 10^{-10} \text{ N kg}^{-1}$$

A intensidade de campo gravitatorio é un vector de módulo $3,20 \cdot 10^{-10} \text{ N/kg}$, coa dirección da diagonal que pasa polo vértice do cadrado que non ten masa e co sentido que vai desde este vértice cara ó centro da figura.

O potencial gravitatorio V nun punto debido á presenza de varias masas, m_i , cada unha delas á unha distancia r_i do punto, obtense sumando alxebricamente o potencial que cada unha das masas crea nese punto:

$$V = \sum_{i=1}^{i=3} V_i = \sum_{i=1}^{i=3} \left[-\frac{G m_i}{r_i} \right]$$

$$V_p = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{2} - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{\sqrt{2^2 + 2^2}} - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{2} \rightarrow V_p = -9,04 \cdot 10^{-10} \text{ J kg}^{-1}$$

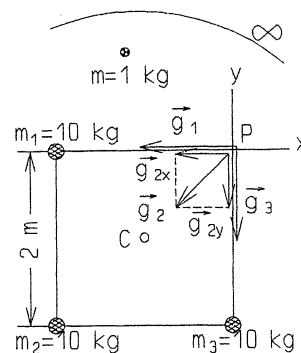
b) As forzas gravitatorias son conservativas e o traballo que estas forzas desenvolven non depende do camiño ó longo do cal se realiza, podendo calculalo como a variación da enerxía potencial, cambiada de signo: $W_\infty^C = -\Delta E_p$.

A enerxía potencial gravitatoria dunha masa m nun punto debido á influencia de varias masas m_i , cada unha delas a unha distancia r_i da masa m , é a suma das enerxías potenciais individuais:

$$E_p = \sum_{i=1}^{i=3} E_{p_i} = \sum_{i=1}^{i=3} \left[-\frac{G m_i \cdot m}{r_i} \right] \text{ Enerxía potencial gravitatorio no infinito: } E_{p_{\text{no } \infty}} = 0 \text{ J}$$

$$E_{p \text{ en } C} = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 10 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \cdot 3 \rightarrow E_{p \text{ en } C} = -1,41 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

$$W_\infty^C \text{ (feito pola forza do cmpo)} = -\Delta E_p = -(-1,41 \cdot 10^{-9} - 0) \rightarrow W_\infty^C = 1,41 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$



A masa de un kg desprázase espontaneamente, desde ó infinito ata o centro do cadrado, ganando velocidade, debido á forza gravitatoria do campo. Se queremos que a masa se desprace sen variación de enerxía cinética temos que aplicarlle unha forza exterior que anule á forza gravitatoria. Relacionando o traballo desenvolvido pola forza gravitatoria do campo co traballo exterior resulta:

$$W_{\infty}^C \text{ (forza exterior)} = - W_{\infty}^C \text{ (forza campo gravitatorio)} \rightarrow W_{\infty}^C \text{ (forza exterior)} = -1,41 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

7.- Un satélite artificial de 300 kg xira arredor da Terra nunha órbita circular de 36378 km de raio. Calcula: a) a velocidade do satélite na órbita; b) a enerxía total do satélite na órbita. Datos: $r_T = 6378 \text{ km}$; $g_0 = 9,80 \text{ m s}^{-2}$. (Xuño 03).

Solución:

a) Un satélite en órbita circular ó redor da Terra posúe unha velocidade, $\vec{v}$, que é de módulo constante e de dirección variable: tanxente en cada punto á traxectoria que describe. En consecuencia, sobre o satélite actúa unha forza normal, $\vec{F}_n$, que coincide coa forza con que a Terra o atrae (sistema de referencia inercial). Para un observador situado no satélite (sistema de referencia non inercial), as forzas que sobre el actúan son:

• A forza con que a Terra o atrae: $\vec{F}_{\text{peso}} = m \cdot \vec{g}$.

• A forza de inercia:

$$\vec{F}_{\text{inercia}} = m \cdot (-\vec{a}_n) = m \cdot \vec{a}_i = -m \cdot \frac{v^2}{(r+h)} \cdot \vec{u}_n.$$

Por outro lado, o observador está en repouso con respecto ó satélite e substituíndo na 2ª lei de Newton, $\vec{F}_{\text{neta}} = m \cdot \vec{a}$, resulta:

$$v = \sqrt{g(r+h)} \rightarrow v = \sqrt{g \cdot 36378 \cdot 10^3}$$

Como non temos o dato da aceleración da gravidade terrestre, g , á altura do satélite, imos relacionar este valor co que ten na superficie da Terra, g_0 .

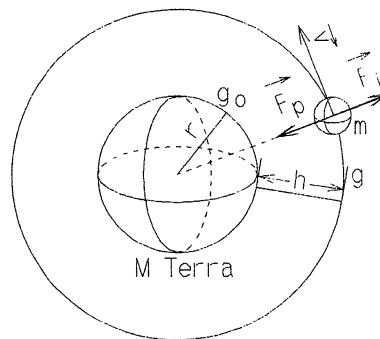
$$\left. \begin{aligned} g &= \frac{G M}{(r+h)^2} \\ g_0 &= \frac{G M}{r^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow g = \frac{g_0 r^2}{(r+h)^2} \rightarrow g = \frac{9,80 \cdot (6378 \cdot 10^3)^2}{(36378 \cdot 10^3)^2}$$

$$g = 0,30 \text{ m s}^{-2}$$

$$v = \sqrt{0,30 \cdot 36378 \cdot 10^3} \rightarrow v = 3304 \text{ m s}^{-1}$$

b) A enerxía (mecánica) total, E_m , é a suma das enerxías cinética, E_k , e potencial, E_p :
 $E_m = E_k + E_p$

$$\left. \begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{(r+h)} \\ G M &= g_0 r^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{g_0 r^2 m}{(r+h)}$$



$$E_m = \frac{1}{2} \cdot 300 \cdot 3304^2 - \frac{9,80 \cdot (6378 \cdot 10^3)^2 \cdot 300}{36378 \cdot 10^3} \rightarrow E_m = -1,65 \cdot 10^9 \text{ J}$$

8.- Un astronauta de 75 kg xira arredor da Terra (dentro dun satélite artificial) nunha órbita situada a 10000 km sobre a superficie da Terra. Calcula: a) A velocidade orbital e o período de rotación; b) o peso do astronauta. Datos: $g_0 = 9,80 \text{ m s}^{-2}$; $R_{\text{Terra}} = 6400 \text{ km}$. (Set. 02).

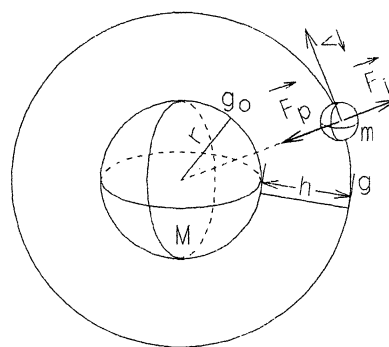
Solución:

a) Para un observador situado no satélite (sistema de referencia non inercial) resulta que:

$$\vec{F}_{\text{peso}} + \vec{F}_{\text{inercia}} = \vec{0} \rightarrow F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}} \rightarrow m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r+h}$$

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{g(r+h)} \\ g &= \frac{GM}{(r+h)^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{(r+h)}}$$

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{GM}{(r+h)}} \\ g_0 &= \frac{GM}{r^2} \rightarrow GM = g_0 \cdot r^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{g_0 r^2}{(r+h)}}$$



$$v = \sqrt{\frac{9,80 (6400 \cdot 10^3)^2}{(6400 + 10000) \cdot 10^3}} \rightarrow v = 4947,3 \text{ m s}^{-1}$$

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ \omega &= \frac{v}{(r+h)} \end{aligned} \right\} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{v}{(r+h)}} \rightarrow T = \frac{2\pi(r+h)}{v}$$

$$T = \frac{2\pi(6400 + 10000) \cdot 10^3}{4947,3} \rightarrow T = 20828,4 \text{ s}$$

b)

$$G_{\text{do astronauta na órbita}} = m \cdot g_{\text{Terra á altura de 10000 km}}$$

$$\left. \begin{aligned} g_{\text{Terra á altura de 10000 km}} &= \frac{GM_T}{(r+h)^2} \\ g_{\text{Terra na súa superficie}} &= g_{0T} = \frac{GM_T}{r^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow g_{\text{Terra á altura de 100000 km}} = \frac{g_{0T} \cdot r^2}{(r+h)^2}$$

$$g_{\text{Terra á altura de 100000 km}} = \frac{9,80 \cdot (6400 \cdot 10^3)^2}{[(6400 + 10000) \cdot 10^3]^2} \rightarrow g_{\text{Terra á altura de 100000 km}} = 1,5 \text{ m s}^{-2}$$

$$G_{\text{do astronauta na órbita}} = 75 \cdot 1,5 \rightarrow G_{\text{do astronauta na órbita}} = 112,5 \text{ N}$$

9.- Un satélite artificial describe unha órbita circular de raio $2 \cdot R_T$ en torno á Terra. Calcula: a) A velocidade orbital; b) o peso do satélite na órbita se na superficie da Terra pesa 5000 N (debuxa as forzas que actúan sobre o satélite). Datos: $R_T = 6400$ km; $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻²; $g_0 = 9,8$ m s⁻². (Xuño 02).

Solución:

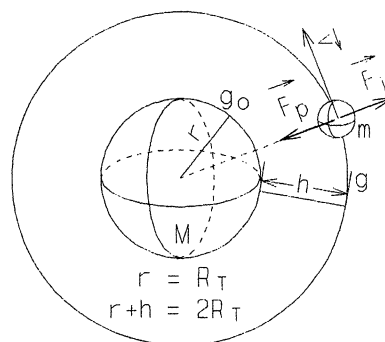
a) Para un observador situado no satélite (sistema de referencia non inercial) resulta que:

$$\vec{F}_{\text{peso}} + \vec{F}_{\text{inercia}} = \vec{0} \rightarrow F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}} \rightarrow m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r+h}$$

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{g(r+h)} \\ g &= \frac{GM}{(r+h)^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{(r+h)}}$$

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{GM}{(r+h)}} \\ g_0 &= \frac{GM}{r^2} \rightarrow GM = g_0 \cdot r^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{g_0 r^2}{(r+h)}} \left. \begin{aligned} r &= R_T \\ (r+h) &= 2 \cdot R_T \end{aligned} \right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{g_0 R_T}{2}}$$

$$v = \sqrt{\frac{9,8 \cdot 6400 \cdot 10^3}{2}} \rightarrow v = 5600 \text{ m s}^{-1}$$



b) $G_{\text{do satélite na órbita}} = m_{\text{satélite}} \cdot g_{\text{Terra á altura do satélite}}$

$$\left. \begin{aligned} \text{Peso na superficie da Terra} &= m_{\text{satélite}} \cdot g_{0T} \\ \text{Peso na superficie da Terra} &= 5000 \text{ N} \\ g_{0T} &= 9,8 \text{ m s}^{-2} \end{aligned} \right\} \rightarrow 5000 = m_{\text{satélite}} \cdot 9,8 \rightarrow m_{\text{satélite}} = 510 \text{ kg}$$

$$\left. \begin{aligned} g_{\text{Terra á altura } h} &= \frac{GM_T}{(r+h)^2} \\ (r+h) &= 2 R_T \end{aligned} \right\} \rightarrow g_{\text{Terra á altura } h} = \frac{GM_T}{(2 R_T)^2}$$

$$\left. \begin{aligned} g_{\text{Terra na súa superficie}} &= g_{0T} = \frac{GM_T}{r^2} \\ r &= R_T \end{aligned} \right\} \rightarrow g_{0T} = \frac{GM_T}{R_T^2}$$

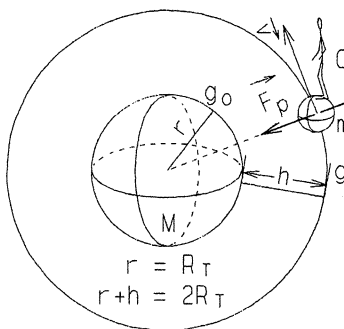
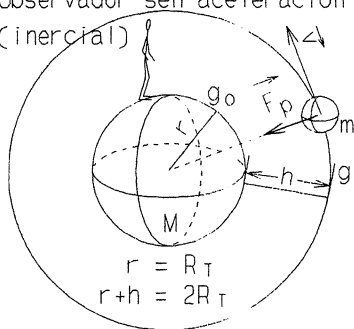
$$\rightarrow g_{\text{Terra á altura } h} = \frac{g_{0T} \cdot R_T^2}{(2 R_T)^2} = \frac{g_{0T}}{4}$$

$$g_{\text{Terra á altura } h} = \frac{9,8}{4} \rightarrow g_{\text{Terra á altura } h} = 2,45 \text{ m s}^{-2}$$

$$G_{\text{do satélite na órbita}} = 510 \cdot 2,45 \rightarrow G_{\text{do satélite na órbita}} = 1249,5 \text{ N}$$

As forzas que actúan sobre o satélite depende do sistema de referencia que se tome. Para un observador inercial (sen aceleración), por exemplo, para unha persoa situada na Terra, a única forza que actúa sobre o satélite é a forza con que a Terra o atrae (peso), $\vec{F}_p$, que é unha forza normal e é a que causa o movemento circular do satélite. Para un observador non inercial (con aceleración), por exemplo, para un astronauta, as forzas que actúan sobre o satélite son: A forza con que a Terra o atrae (peso), $\vec{F}_p$, e a forza de inercia, $\vec{F}_i$, dando unha resultante nula.

Observador sen aceleración
(inercial)



Observador con aceleración
(non inercial)

10.- Un satélite artificial cunha masa de 200 kg móvese nunha órbita circular arredor da Terra cunha velocidade constante de 10800 km/h. Calcula: a) á que altura está situado?; b) fai un gráfico indicando que forzas actúan sobre o satélite e calcula a enerxía total. Datos: $g_0 = 9,8 \text{ m s}^{-2}$; $R_T = 6370 \text{ km}$. (Set. 01).

Solución:

a) Un satélite en órbita circular ó redor da Terra posúe unha velocidade, $\vec{v}$, que é de módulo constante, $v = 10800 \text{ km/h}$, e de dirección variable: tanxente en cada punto á traxectoria que describe. En consecuencia, sobre o satélite actúa unha forza normal, $\vec{F}_n$, que coincide coa forza con que a Terra o atrae (sistema de referencia inercial). Para un observador situado no satélite (sistema de referencia non inercial), as forzas que sobre el actúan son:

• A forza con que a Terra o atrae: $\vec{F}_{\text{peso}} = m \cdot \vec{g}$.

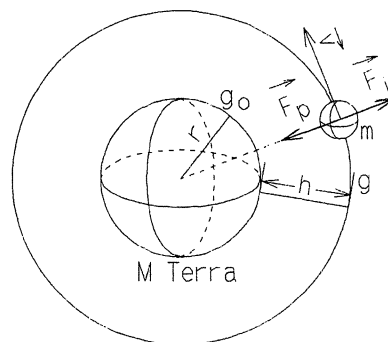
• A forza de inercia:

$$\vec{F}_{\text{inercia}} = m \cdot (-\vec{a}_n) = m \cdot \vec{a}_i = -m \cdot \frac{v^2}{(r+h)} \cdot \vec{u}_n.$$

Por outro lado, o observador está en repouso e substituíndo na 2ª lei de Newton, $\vec{F}_{\text{neta}} = m \cdot \vec{a}$, resulta:

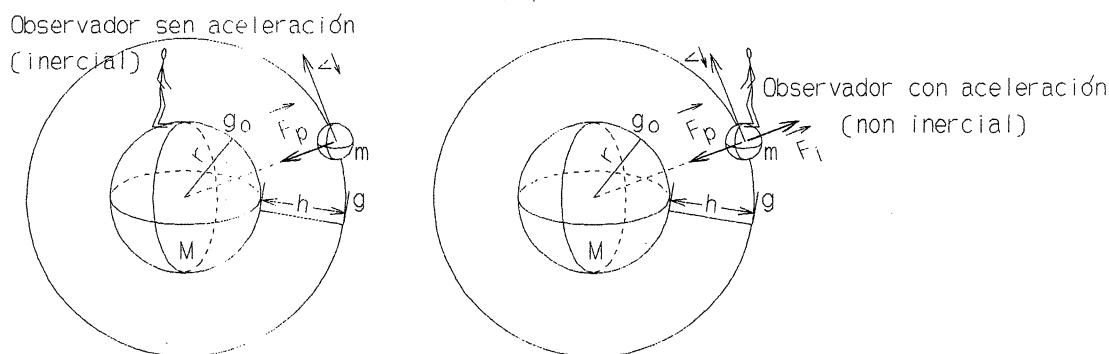
$$\vec{F}_{\text{peso}} + \vec{F}_{\text{inercia}} = \vec{0} \rightarrow F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}} \rightarrow m \cdot g = m \cdot \frac{v^2}{r+h}$$

$$\left. \begin{aligned} g &= \frac{v^2}{(r+h)} \\ g &= \frac{GM}{(r+h)^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{GM}{(r+h)^2} = \frac{v^2}{(r+h)} \left\{ \begin{aligned} &\rightarrow \frac{g_0 r^2}{(r+h)} = v^2 \rightarrow h = \frac{g_0 r^2}{v^2} - r \\ &GM = g_0 r^2 \end{aligned} \right.$$



$$h = \frac{9,8 \cdot 6370000^2}{\left[\frac{10800 \cdot 1000}{3600} \right]^2} - 6370000 \rightarrow h = 37813736 \text{ m}$$

b) As forzas que actúan sobre o satélite depende do sistema de referencia que se tome. Para un observador inercial (sen aceleración), por exemplo, para unha persoa situada na Terra, a única forza que actúa sobre o satélite é a forza con que a Terra o atrae (peso), $\vec{F}_p$, que é unha forza normal á traxectoria e é a que causa o movemento circular do satélite. Para un observador non inercial (con aceleración), por exemplo, para un astronauta, as forzas que actúan sobre o satélite son: A forza con que a Terra o atrae (peso), $\vec{F}_p$, e a forza de inercia, $\vec{F}_i$, dando unha resultante nula.



$$E_m = E_k + E_p$$

$$E_m = \frac{1}{2} m v_{\text{xiro}}^2 + \left[-\frac{G M m}{r+h} \right] \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow E_m = \frac{1}{2} m \frac{G M}{(r+h)} - \frac{G M m}{(r+h)} \\ G M = g_0 r^2 \end{array} \right\} \rightarrow E_m = -\frac{1}{2} \frac{g_0 r^2 m}{(r+h)}$$

$$E_m = -\frac{1}{2} \frac{9,8 \cdot 6370000^2 \cdot 200}{6370 \cdot 10^3 + 37813736} \rightarrow E_m = -9,0 \cdot 10^8 \text{ J}$$

12.- Lánzase un proxectil verticalmente desde a superficie da Terra, cunha velocidade inicial de 3 km s^{-1} . Calcula: a) Que altura máxima alcanzará?; b) a velocidade orbital que é preciso comunicarlle a esa altura para que describa unha órbita circular. Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$; $R_T = 6378 \text{ km}$; $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. (Xuño 01).

Solución:

a) Cando a velocidade coa que se lanza o "proxectil" e, en consecuencia, a altura que alcanza é pequena, a aceleración da gravidade é constante, podendo utilizar as ecuacións do movemento rectilíneo uniformemente variado. Esta situación non é a que ten lugar para o enunciado do problema.

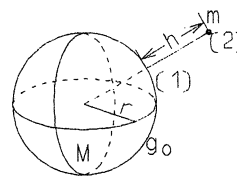
Pero o campo gravitatorio terrestre no que se move o proxectil é conservativo, podendo establecer o principio de conservación da enerxía mecánica, E_m :

$$E_{m1} = E_{m2} \rightarrow E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2}$$

A enerxía inicial que posúe o proxectil de masa m ó ser lanzado cunha velocidade $v = 3 \text{ km/s}$ é a suma da súa enerxía cinética e potencial.

$$E_{m1} = \frac{1}{2} m v^2 + \left[-\frac{G M m}{r} \right]$$

sendo G a constante de gravitación universal, M a masa da Terra, r o seu raio e m a masa do corpo que se lanza.



A medida que o proxectil ascende, a súa velocidade diminúe, sendo nula á altura h na que se detén. Nese punto a súa enerxía é só potencial, de valor:

$$E_{m2} = -\frac{G M m}{r+h}$$

A conservación da enerxía mecánica permítenos agora escribir a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M m}{r} = -\frac{G M m}{r+h}$$

Despexamos agora a altura h :

$$\frac{v^2 r - 2 G M}{2 r} = -\frac{G M}{r+h} \rightarrow r+h = -\frac{2 r G M}{v^2 r - 2 G M} \rightarrow h = -\frac{2 r G M}{v^2 r - 2 G M} - r$$

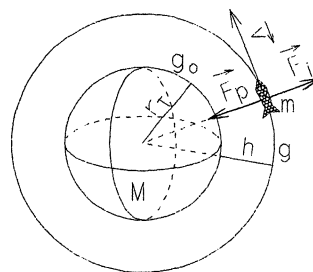
$$h = \frac{-2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 6378 \cdot 10^3}{(3 \cdot 10^3)^2 \cdot 6378 \cdot 10^3 - 2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}} - 6378 \cdot 10^3 \rightarrow h = 4,95 \cdot 10^5 \text{ m}$$

b) A velocidade que lle hai que comunicar ó proxectil á altura h é a velocidade de órbita, que hai de ter un valor tal que, para un observador situado no proxectil (sistema de referencia non inercial), a forza de inercia, $\vec{F}_i$, sexa de igual módulo e dirección que a forza con que a Terra o atrae, $\vec{F}_{\text{peso}}$ (peso do proxectil) e de sentido contrario: $\vec{F}_i = -\vec{F}_{\text{peso}} \rightarrow F_i = F_{\text{peso}}$.

$$m_{\text{proxetil}} \cdot \frac{v_{\text{órbita}}^2}{(r_{\text{Terra}} + h)} = m_{\text{proxetil}} \cdot g \rightarrow v_{\text{órbita}} = \sqrt{g (r_{\text{Terra}} + h)}$$

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{g (r_T + h)} \\ g &= \frac{G M_T}{(r_T + h)^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G M_T}{(r_T + h)}}$$

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(6378000 + 4,95 \cdot 10^5)}} \rightarrow v = 7,62 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$$



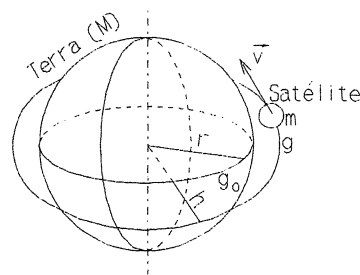
13. Deséxase por en órbita un satélite xeoestacionario de 25 kg. Calcule: a) o raio da órbita; b) as enerxías cinética, potencial e total do satélite na órbita. (Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$, $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$). (Set. 00).

Solución:

a) Dado que o satélite se quere colocar nunha órbita xeoestacionario, ademais de ser estable, o que significa: $F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}}$, o seu período de revolución, $T_{\text{satélite}}$, coincide co da Terra, T_{Terra} : $T_{\text{satélite}} = T_{\text{Terra}} = 86400 \text{ s}$.

a)

$$\left. \begin{aligned} \frac{m v^2}{r+h} &= m g \\ v &= \omega (r+h) \\ g &= \frac{G M}{(r+h)^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{[\omega (r+h)]^2}{r+h} = \frac{G M}{(r+h)^2}$$



$$\frac{4 \pi^2 (r+h)}{86400^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(r+h)^2} \rightarrow (r+h) = 4,23 \cdot 10^7 \text{ m}$$

b)

$$v = \omega (r+h) \rightarrow v = \frac{2 \pi (r+h)}{T} \rightarrow v = \frac{2 \pi \cdot 4,23 \cdot 10^7}{86400} = 3,08 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot (3,08 \cdot 10^3)^2 \rightarrow E_k = 1,2 \cdot 10^8 \text{ J}$$

$$E_p = -\frac{G M m}{r+h} \rightarrow E_p = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 25}{4,23 \cdot 10^7} \rightarrow E_p = -2,4 \cdot 10^8 \text{ J}$$

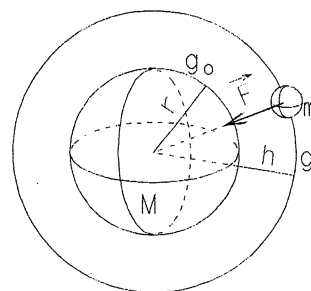
$$E_m = E_k + E_p \rightarrow E_m = 1,19 \cdot 10^8 - 2,36 \cdot 10^8 \rightarrow E_m = -1,2 \cdot 10^8 \text{ J}$$

14.- Un satélite artificial cunha masa de 200 kg móvese nunha órbita circular a $5 \cdot 10^7 \text{ m}$ por encima da superficie terrestre. a) Que forza gravitatoria actúa sobre o satélite?; b) cal é o período de rotación do satélite? (Datos: $g_0 = 9,81 \text{ m s}^{-2}$; $R_T = 6370 \text{ km}$). (Xuño 00).

Solución:

$$a) \vec{F} = m \vec{g} \rightarrow F = 200 \cdot g$$

$$\left. \begin{aligned} g &= \frac{G M}{(r+h)^2} \\ g_0 &= \frac{G M}{r^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow g = \frac{g_0 \cdot r^2}{(r+h)^2}$$



$$\text{Peso} = 200 \cdot \frac{9,81 \cdot (6370 \cdot 10^3)^2}{(6370 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^7)^2} \rightarrow \text{Peso} = 25,05 \text{ N}$$

b)

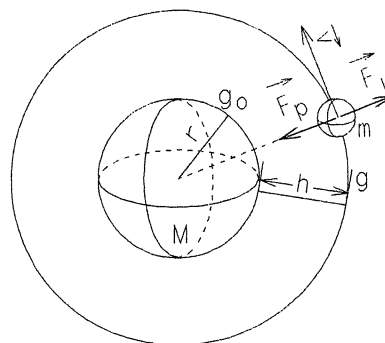
$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{2 \pi}{\omega} \\ \omega &= \frac{v}{(r+h)} \end{aligned} \right\} \rightarrow T = \frac{2 \pi (r+h)}{v}$$

$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6378 \cdot 10^3 + 300 \cdot 10^3}} \rightarrow v = 7728,4 \text{ m s}^{-1}$$

b)

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{2 \pi}{\omega} \\ v &= \omega (r+h) \end{aligned} \right\} \rightarrow T = \frac{2 \pi (r+h)}{v} \rightarrow$$

$$T = \frac{2 \pi (6378 \cdot 10^3 + 300 \cdot 10^3)}{7728,4} \rightarrow T = 5426,5 \text{ s}$$

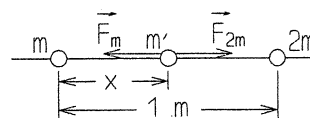


17.- Dous puntos materiais de masas m e $2m$ respectivamente, atópanse a unha distancia de 1 m. Busca o punto onde unha terceira masa, a) estaría en equilibrio, b) sentiría iguais forzas (módulo, dirección e sentido) por parte das dúas primeiras. (Set. 98).

Solución:

a) Equilibrio $\Rightarrow \vec{F}_n = \vec{0}$.

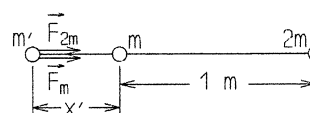
$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \rightarrow F_1 = F_2 \rightarrow \frac{G m m'}{x^2} = \frac{G 2 m m'}{(1-x)^2}$$



$$(1-x)^2 = 2 x^2 \rightarrow x^2 + 2 x - 1 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 0,41 \text{ m} \\ -2,41 \text{ m} \end{cases}$$

b) $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$

$$\frac{G m m'}{x'^2} = \frac{G 2 m m'}{(x'+1)^2} \rightarrow (x'+1)^2 = 2 x'^2$$



$$x^2 - 2 x - 1 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} -0,41 \text{ m} \\ 2,41 \text{ m} \end{cases}$$

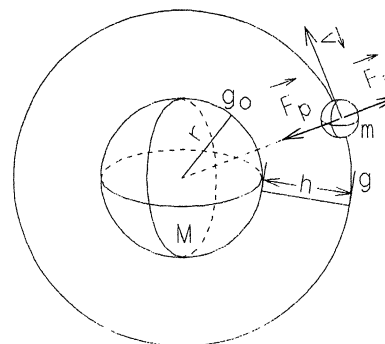
18.- A menor velocidade de xiro dun satélite na Terra, coñecida como primeira velocidade cósmica, é a que se obtería para un raio orbital igual ó raio terrestre r_T . Calcula: a) a primeira velocidade cósmica, b) o período de revolución correspondente. Datos $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$, $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $r_T = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$. (Xuño 98).

Solución:

a)

$$F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}} \rightarrow m g = m \frac{v^2}{r+h} \rightarrow v = \sqrt{g(r+h)}$$

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{g(r+h)} \\ g &= \frac{G M}{(r+h)^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G M}{r+h}}$$



$$v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6,38 \cdot 10^6}} \rightarrow v = 7906,8 \text{ m s}^{-1}$$

b)

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ \omega &= \frac{v}{r+h} \end{aligned} \right\} \rightarrow T = \frac{2\pi \cdot (r+h)}{v} \rightarrow T = \frac{2\pi \cdot 6,38 \cdot 10^6}{7906,8} \rightarrow T = 5067,3 \text{ s}$$

19.- Europa, satélite de Xúpiter, foi descuberto por Galileo en 1610. Sabendo que o raio da órbita que describe é de $6,7 \cdot 10^5 \text{ km}$ e o seu período de 3 días, 13 horas e 13 minutos, calcula: a) a velocidade de Europa relativa a Xúpiter, b) a masa de Xúpiter. Dato: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$. (Set. 97).

Solución:

a)

$$\left. \begin{aligned} v &= \omega (r+h) \\ \omega &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned} \right\} \rightarrow v = \frac{2\pi}{T} (r+h)$$

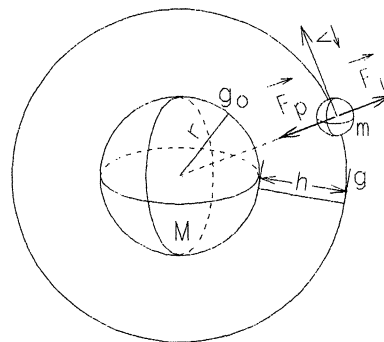
$$v = \frac{2\pi}{3 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 + 13 \cdot 60 \cdot 60 + 13 \cdot 60} \cdot 6,7 \cdot 10^5 \cdot 10^3 \rightarrow v = 13715,4 \text{ m s}^{-1}$$

b)

$$F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}} \rightarrow m g = m \frac{v^2}{r+h} \rightarrow v = \sqrt{g(r+h)}$$

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{g(r+h)} \\ g &= \frac{GM}{(r+h)^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r+h}} \rightarrow M = \frac{v^2 (r+h)}{G}$$

$$M = \frac{13715,4^2 \cdot 6,7 \cdot 10^8}{6,67 \cdot 10^{-11}} \rightarrow M = 1,89 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$



20.- Calcula o raio que debería ter a Terra conservando a súa masa, para que a velocidade de escape fose igual á da luz, $c = 300000 \text{ km s}^{-1}$ (¡extraño furado negro!). b) Ante un colapso deste tipo, variará o período de rotación da Lúa ó redor da Terra? Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$; $r_T = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$; $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. (Xuño 97).

Solución:

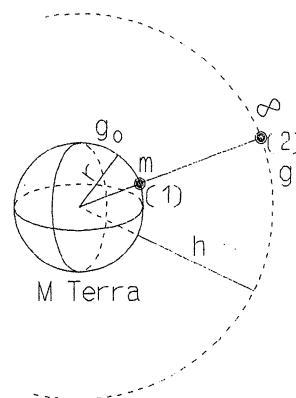
a) Como a forza gravitatoria é conservativa, a enerxía mecánica consérvase para calquera

punto do campo gravitatorio: $E_{m_1} = E_{m_2} \rightarrow E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}$.

$$\frac{1}{2} m \cdot v_1^2 + \left[-\frac{G M m}{r} \right] = 0 + 0$$

$$\frac{1}{2} m \cdot v_1^2 = \frac{G M m}{r} \rightarrow r = \frac{2 G M}{v_1^2}$$

$$r = \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{(300000 \cdot 10^3)^2} \rightarrow r = 8,9 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$



O valor do raio calculado anteriormente, para cando $v_{\text{escape}} = v_{\text{luz}} = c$, coñécese como raio de Schwarzschild, r_s . Un corpo de masa m , neste caso a masa da Terra, e cun raio igual ou inferior a r_s produce unha forza gravitatoria tan grande que ningunha partícula que estea na súa superficie pode escapar. A un corpo con raio igual ou menor que r_s se lle chama **furado negro**, nome que foi proposto por J. A. Wheeler en 1969.

b) O período de rotación da Lúa ó redor da Terra calcúlase da forma:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{2 \pi}{\omega} \\ \omega &= \frac{v}{r+h} \end{aligned} \right\} \rightarrow T = \frac{2 \pi}{v} (r+h) \left. \begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{G M}{(r+h)}} \end{aligned} \right\} \rightarrow T = 2 \pi \sqrt{\frac{(r+h)^3}{G M}}$$

Se o raio da órbita permanece constante: o que diminúe r aumentao h , de modo que $r+h = \text{cte}$; o período de rotación da Lúa arredor da Terra permanece constante. A órbita da Lúa ó redor da Terra non se ve alterada pola hipotética concentración de masa da Terra: Aínda que esta se converta en puntual, concentrándose no seu centro, non se altera a interacción gravitatoria Lúa-Terra e, polo tanto, tampouco se alteran os efectos dinámicos ou de movemento da Lúa.

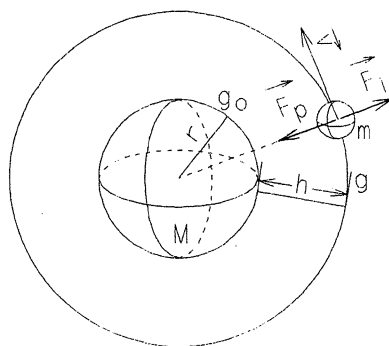
En consecuencia, non haberá modificación algunha no período de revolución da Lúa ó redor da Terra.

21. A distancia Terra-Lúa é aproximadamente $60 r_T$, sendo r_T o raio da Terra, igual a 6400 km. Calcula: a) a velocidade lineal da Lúa no seu movemento ó redor da Terra e b) o correspondente período de rotación en días. Datos: $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$, $M_T = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. (Set. 96).

Solución:

$$a) F_{\text{peso}} = F_{\text{inercia}} \rightarrow m g = m \frac{v^2}{r+h} \rightarrow v = \sqrt{g(r+h)}$$

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{g(r+h)} \\ g &= \frac{G M}{(r+h)^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G M}{r+h}}$$



$$v = \sqrt{\frac{6,7 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{60 \cdot 6400 \cdot 10^3}} \rightarrow v = 1019,2 \text{ m s}^{-1}$$

b)

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega} \\ \omega &= \frac{v}{r+h} \end{aligned} \right\} \rightarrow T = \frac{2\pi}{v} (r+h) \rightarrow T = \frac{2\pi}{1019,2} \cdot 60 \cdot 6400 \cdot 10^3 \rightarrow T = 2366091 \text{ s} \\ T = 27,4 \text{ días}$$

22.- Nun planeta que ten a metade do raio terrestre, a aceleración da gravidade na súa superficie vale 5 m s^{-2} . Calcula: a) a relación entre as masas do planeta e a Terra, e b) a altura á que é necesario deixar caer desde o repouso un obxecto no planeta para que chegue á súa superficie coa mesma velocidade con que o fai na Terra, cando cae desde unha altura de 100 m. (Na Terra: $g = 10 \text{ m s}^{-2}$). (Xuño-96).

Solución:

$$\left. \begin{aligned} a) \quad g_{\text{superficie planeta}} &= \frac{G M_{\text{planeta}}}{r_{\text{planeta}}^2} \\ g_{\text{superficie Terra}} &= \frac{G M_{\text{Terra}}}{r_{\text{Terra}}^2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{g_{\text{superficie planeta}}}{g_{\text{superficie Terra}}} = \frac{M_{\text{planeta}}}{M_{\text{Terra}}} \cdot \frac{r_{\text{Terra}}^2}{r_{\text{planeta}}^2}$$

$$\frac{5}{10} = \frac{M_{\text{planeta}}}{M_{\text{Terra}}} \cdot \frac{r_{\text{Terra}}^2}{\frac{1}{2} \cdot r_{\text{Terra}}^2} \rightarrow \frac{M_{\text{planeta}}}{M_{\text{Terra}}} = \frac{1}{8}$$

b) Como a altura á superficie da Terra desde a que se deixa caer o obxecto é pequena, a aceleración da gravidade é constante, podendo utilizar as ecuacións do movemento rectilíneo uniformemente variado:

$$\vec{y} = \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{g} \cdot t^2$$

$$\vec{v}_f = \vec{v}_0 + \vec{g} \cdot t$$

Para o caso do planeta:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot t^2 \\ v_f &= 5 \cdot t \end{aligned} \right\} \rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{v^2}{5^2}$$

Para o caso da Terra:

$$100 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 \rightarrow t = \sqrt{20} \text{ s}$$

$$v_f = 10 \cdot \sqrt{20} \text{ m s}^{-1}$$

$$\rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{(10 \cdot \sqrt{20})^2}{5^2} \rightarrow y = 200 \text{ m}$$