



ALUMNO/A:

Instrucciones:

RESOLVER CUATRO, Y SOLO CUATRO, DE LAS SEIS SIGUIENTES PREGUNTAS

Ejercicio 1 Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Sea M una matriz cuadrada de orden tres, con determinante $|M| = -2$, y verificando la igualdad $M^3 + M + I = 0$

- I) Demostrar que $M + I$ también es una matriz inversible. (0.75 puntos)
II) Obtener el determinante de $2M + 2I$. (0.75 puntos)

b) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3+x & 8+y & 4+z \\ 1 & 8/3 & 4/3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, si el determinante de A es 1, calcular razonadamente el determinante de B (1 punto)

Ejercicio 2 Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y + mz = m \\ mx + (m-1)y + z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema según los valores de m . (1 punto)
b) Resolverlo, si es posible, cuando $m = 1$ y cuando $m = -1$. (0.75 puntos)
c) Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, determinar el rango de la matriz $C^t \cdot D$. (0.75 puntos)

Ejercicio 3 Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 0 \end{pmatrix}$:

- a) ¿Qué condiciones tienen que cumplir x , y y z para que las matrices A y B commuten para el producto? (1 punto)
b) Si B es una de esas matrices que commutan con A , ¿en qué condiciones B es inversible?. Calcular la expresión de B^{-1} en función de los parámetros que necesite. (1.5 puntos)

Ejercicio 4 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

a) Calcular su determinante en función de los valores de a . (0.75 puntos)

b) Determinar los valores de a para los cuales A tiene inversa. (0.75 puntos)

c) Resolver el sistema $AX = 0$ cuando $a = 0$, siendo $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (1 punto)

Ejercicio 5 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & m^2 \\ 1 & -1 & m^2 - m \end{pmatrix}$, con $m \in \mathbb{R}$.

a) Calcular el rango de A en función de los valores de m . (1 punto)

b) Si $m = 2$, ¿es posible calcular una matriz X que verifique $3XA - A = I$? Justificar la respuesta, y en caso afirmativo, calcular X . (1.5 puntos)

Ejercicio 6 Dadas $A = \begin{pmatrix} t & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Determinar para qué valores de t tiene solución la ecuación matricial $A^2X + AX = B$ (1 punto)

b) Resolver la anterior ecuación, si es posible, para $t = 1$ (1 punto)

c) Si $t = -1$, calcula A^2 , A^4 , y A^{16} (0.5 puntos)