Proyecto MaTEX

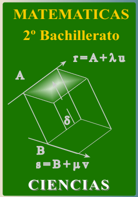
Vectores

Fco Javier González Ortiz

Directorio

11 de junio de 2004

Versin 1.00



MaTEX

VECTORES

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

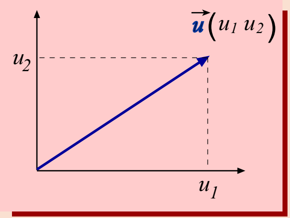
Tabla de Contenido

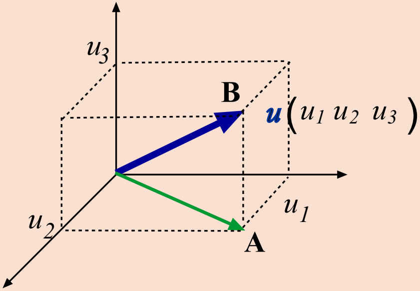
1. Producto escalar de vectores

1.1. Teorema de Pitágoras

La longitud de un vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$ en el plano, que representaremos por $||\vec{u}||$, en dos dimensiones es la hipotenusa del triángulo rectángulo y se halla por el teorema de Pitágoras,

$$||\vec{u}||^2 = u_1^2 + u_2^2$$





En el espacio tridimensional el vector $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ es la diagonal OB de una caja y su longitud se halla aplicando dos veces el teorema de Pitágoras. Primero se calcula la longitud de $\overrightarrow{OA}$,

$$||\overrightarrow{OA}||^2 = u_1^2 + u_2^2$$

OA forma un ángulo recto con el lado vertical $\overrightarrow{AB}(0, 0, u_3)$, de modo que recurrimos otra vez a Pitágoras. La hipotenusa del triángulo OAB es la

MATEMATICAS 2º Bachillerato CIENCIAS
MaTEX
VECTORES
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

longitud $||\vec{u}||$ que buscamos y está dada por

$$||\vec{u}||^2 = ||\overrightarrow{OA}||^2 + ||\overrightarrow{AB}||^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \tag{1}$$

Para un vector de n dimensiones $\vec{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$, la longitud o norma de un vector de R^n es la raíz cuadrada positiva de

$$\boxed{||\vec{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}} \tag{2}$$

Ejemplo 1.1. Hallar la norma de los vectores

$$\vec{u} = (1, 1, 1) \qquad \vec{v} = (0, 2, 0)$$

Solución: De la expresión anterior

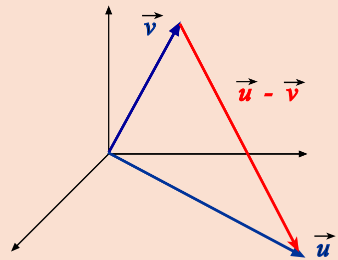
$$||\vec{u}|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$
$$||\vec{v}|| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2} = 2$$

$\square$

1.2. Vectores ortogonales

Supongamos dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en (figura). Diremos que son **perpendiculares** u ortogonales si se satisface el teorema de Pitágoras:

$$||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 = ||\vec{u} - \vec{v}||^2$$



Aplicando la ecuación, la condición se transforma en

$$\begin{aligned} (u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2) \quad & +(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2) = & (3) \\ = \quad & (u_1 - v_1)^2 + \cdots (u_n - v_n)^2 & (4) \end{aligned}$$

El segundo miembro es

$$(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2) - 2(u_1\, v_1 + \cdots + u_n\, v_n) + (v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)$$

Así la igualdad es válida si el producto cruzado es cero. Diremos que dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales $\vec{u} \perp \vec{v}$ si

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Longleftrightarrow u_1\, v_1 + \cdots + u_n\, v_n = 0} \qquad (5)$$

De la ecuación anterior nos interesa el miembro izquierdo, que definimos como

MATEMATICAS
2º Bachillerato
CIENCIAS
MaTEX
VECTORES
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

producto escalar de dos vectores

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1\,v_1 + \cdots + u_n\,v_n} \tag{6}$$

1.3. Norma de un vector

Observar que si multiplicamos escalarmente un vector $\vec{u}$ por si mismo se obtiene el cuadrado de su norma o longitud:

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = ||\vec{u}||^2 \tag{7}$$

o dicho de otra forma, la norma de un vector es la raíz positiva de su producto escalar

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} \tag{8}$$

1.4. Ángulo de dos vectores

Del teorema del coseno se tiene

$$||\vec{v}-\vec{u}||^2 = ||\vec{v}||^2 + ||\vec{u}||^2 - 2\,||\vec{v}||\,||\vec{u}||\,\cos\theta \tag{9}$$

donde θ es el ángulo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Por otra parte

$$(\vec{v}-\vec{u})(\vec{v}-\vec{u}) = \vec{v}\vec{v} - 2\,\vec{v}\vec{u} + \vec{u}\vec{u} = ||\vec{v}||^2 - 2\,\vec{v}\vec{u} + ||\vec{u}||^2 \tag{10}$$

Igualando las ecuaciones anteriores se tiene

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\,\cos\theta} \tag{11}$$

que nos da una segunda definición del producto escalar. Por ello se obtiene que el ángulo θ de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ viene dado por

$$\boxed{\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||}} \tag{12}$$

Ejemplo 1.2. Determinar el ángulo de los vectores de R^3, $\vec{u} = (2,1,-1)$ y $\vec{v} = (0,1,3)$.

Solución: Tenemos:

$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{(2,1,-1)\cdot(0,1,3)}{||(2,1,-1)||\,||(0,1,3)||} = \frac{-2}{\sqrt{6}\,\sqrt{10}}$$

y de esto bastaría hallar

$$\theta = \angle(\vec{u},\vec{v}) = \arccos\frac{-2}{\sqrt{6}\,\sqrt{10}}$$

□

Ejercicio 1. Dados los vectores $\vec{u} = (2,-3,5)$ y $\vec{v} = (6,-1,0)$ hallar:

1. los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
2. El producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$
3. El coseno del ángulo que forman.
4. Hallar m para que el vector $\vec{w}(m,2,3)$ sea ortogonal a $\vec{u}$

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 2. Responder a las siguientes cuestiones:

a) Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores tales que,

$$||\vec{u}|| = 9 \qquad (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = 17$$

calcular la norma del vector $\vec{v}$.

b) ¿Es posible que el producto escalar de dos vectores del espacio sea cero, sin que ninguno de ellos sea el vector nulo?

c) Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (4, 5, 6)$ determina el módulo de los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{v} - \vec{u}$.

d) Si la norma del vector $||\vec{u}|| = 2$, ¿cuál es la norma del vector $3\,\vec{u}$?

e) A partir del vector $\vec{u} = (1, 1, 1)$, encuentra un vector unitario con la misma dirección de $\vec{u}$.

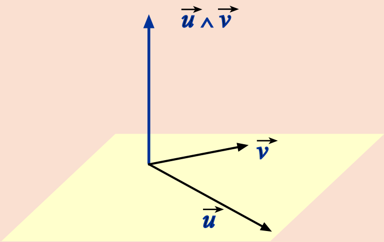
2. Producto vectorial de dos vectores

El producto vectorial de dos vectores en el espacio R^3 tiene su origen en la búsqueda de un vector ortogonal a dos vectores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$. Designaremos el producto vectorial por $\vec{u} \wedge \vec{v}$ y su expresión corresponde a:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \tag{13}$$

Esta expresión es más cómoda usando una notación de determinante, si bien no es un determinante.

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}}$$



2.1. Propiedades del producto vectorial

1. El producto vectorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$ es un vector ortogonal a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$.
2. La norma del producto vectorial es:

$$\boxed{||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = ||\vec{u}|| \, ||\vec{v}|| \text{ sen } \theta} \tag{14}$$

2.2. Área de un paralelogramo

Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ dos representantes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con origen en A. Se forma un paralelogramo como en la figura.

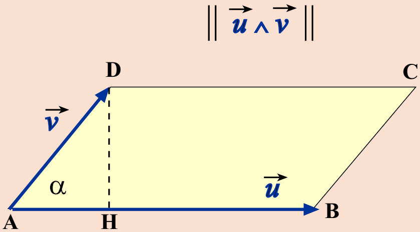
Area del paralelogramo

$$ABCD = ||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{DH}||$$

Como

$$||\overrightarrow{DH}|| = ||\overrightarrow{AD}|| \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$\text{Area} = ||\overrightarrow{AB}|| ||\overrightarrow{AD}|| \cdot \operatorname{sen}\,\theta$$



$$\boxed{\text{Area } ABCD = ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}|| = ||\vec{u} \wedge \vec{v}||} \tag{15}$$

Ejemplo 2.1. Hallar el producto vectorial de $\vec{u} = (1, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 1, 2)$.

Solución:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\,\vec{i} - 4\vec{j} - 1\,\vec{k} = (3, -4, -1)$$

$\square$

Ejemplo 2.2. Dados los vectores $\vec{u} = (3, 1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 3, 4)$, hallar:

a) El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

b) Un vector ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$

c) El área de paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

Solución:

a) $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 7\,\vec{i} - 14\vec{j} + 7\,\vec{k} = (7, -14, 7).$

b) Un vector ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el producto vectorial calculado.

c) El área del paralelogramo determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ viene dado por la norma del producto vectorial, luego

$$\text{area} = ||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = \sqrt{7^2 + 14^2 + 7^2} = 7\sqrt{6}$$

□

Ejercicio 3. Responder a las siguientes cuestiones:

a) Siendo $u(1, 2, 1)$ y $v(1, 0, 2)$, comprobar que el producto vectorial de

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

b) ¿Cúal es el producto vectorial de dos vectores linealmente dependientes?

c) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cumplen $||\vec{u}|| = 5$ y $||\vec{v}|| = 2$, y además $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$. Calcula $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

3. Producto mixto

La mezcla de los productos ya vistos, producto escalar y producto vectorial, nos conduce al producto mixto de tres vectores. Dados tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, se define su **producto mixto**, como

$$\boxed{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \vec{u}\cdot(\vec{v}\wedge\vec{w})} \tag{16}$$

3.1. Expresión analítica

Sean los tres vectores de R^3, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, aplicando las expresiones del producto escalar y vectorial obtenemos:

$$\begin{aligned}
[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] &= (u_1, u_2, u_3)\cdot\left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}\right) \\
&= u_1\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - u_2\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

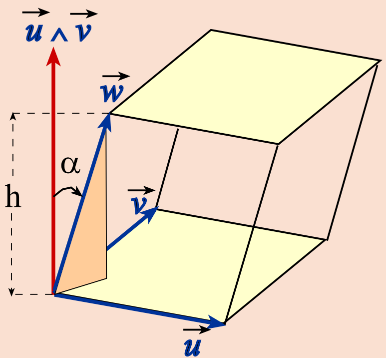
Que corresponde al desarrollo de un determinante formado por los tres vectores, luego de forma cómoda, el producto mixto se puede escribir

$$\boxed{[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}} \tag{17}$$

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

3.2. Interpretación geométrica.

Tomando los tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, por traslación se puede construir un paralelepípedo con volumen $V = S\,h$, siendo S la superficie de la base y h la altura.



De (15) se tiene que la superficie de la base es

$$S = ||\vec{u} \wedge \vec{v}||$$

y en la figura se aprecia que la altura

$$h = ||\vec{w}|| \cos \alpha$$

Luego

$$\begin{aligned} V &= ||\vec{u} \wedge \vec{v}|| \cdot ||\vec{w}|| \cdot \cos \alpha \\ &= \vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v}) \\ &= |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| \end{aligned}$$

Por tanto volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores, (en valor absoluto, pues el determinante puede ser negativo y el volumen se toma positivo).

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

Test. Sean $\vec{u}, \vec{v}$ dos vectores de R^3 y $\alpha \in R$ un número real. Tiene sentido la expresión

$$\alpha + (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

(a) Verdadero (b) Falso

Inicio del Test Indicar si las siguientes expresiones entre productos de vectores corresponden a un vector, un número o no tienen sentido:

1. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$ ☐ Vector ☐ Número ☐ Nada

2. $\vec{u} + (\vec{v} \cdot \vec{w})$ ☐ Vector ☐ Número ☐ Nada

3. $\vec{u} + (\vec{v} \wedge \vec{w})$ ☐ Vector ☐ Número ☐ Nada

4. $(\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{v} \wedge \vec{w})$ ☐ Vector ☐ Número ☐ Nada

5. $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$ ☐ Vector ☐ Número ☐ Nada

6. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + 3\,\vec{w})$ ☐ Vector ☐ Número ☐ Nada

Final del Test Puntos: Correctas

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1.

1. $||\vec{u}|| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$ y
$$||\vec{v}|| = \sqrt{6^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{37}$$
2. El producto escalar
$$\vec{u} \,.\, \vec{v} = (2, -3, 5)\,(6, -1, 0) = 2\,.\,6 + 3\,.\,1 + 5\,.\,0 = 15$$
3. Como $\vec{u} \,.\, \vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\,cos\alpha$, tenemos,
$$\cos\,\alpha = \frac{15}{\sqrt{38}\,\sqrt{37}}$$
4. $\vec{w}$ ortogonal a $\vec{u}$ si $\vec{w} \,.\, \vec{u} = 0$, luego,
$$(m, 2, 3)\,.\,(2, -3, 5) = 0 \Rightarrow 2m + 9 = 0 \Rightarrow m = -9/2$$

Ejercicio 1

Ejercicio 2.

a) Como

$$(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\,\vec{u} - \vec{v}\,\vec{v} = ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2 = 17$$

y $||\vec{u}|| = 9 \Rightarrow 81 - ||\vec{v}||^2 = 17 \Rightarrow ||\vec{v}||^2 = 64 \Rightarrow ||\vec{v}|| = \mathbf{8}$.

b) Si. Por ejemplo $\vec{u} = (1,0,0)$ y $\vec{v} = (0,1,0)$.

c)

$$\vec{u}+\vec{v} = (5,7,9) \qquad ||(5,7,9)|| = \sqrt{5^2+7^2+9^2} = \sqrt{155}$$
$$\vec{v}-\vec{u} = (3,3,3) \qquad ||(3,3,3)|| = \sqrt{3^2+3^2+3^2} = 3\cdot\sqrt{3}$$

d) Si $||\vec{u}|| = 2$, $||3\,\vec{u}|| = 3\,||\vec{u}|| = 6$.

e) Para convertir un vector en unitario se divide por su norma, así

$$||\vec{u}|| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$$

luego el vector

$$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

es unitario.

Ejercicio 2

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 3.

a) El producto vectorial:

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=(4,-1,-2)$$

y

$$\vec{v}\wedge\vec{u}=(-4,1,2)$$

b) Sean dos vectores $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$ y $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$ linealmente dependientes, luego $\vec{v}=\lambda\,\vec{u}$. El producto vectorial:

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \lambda u_1 & \lambda u_2 & \lambda u_3 \end{vmatrix}=(0,0,0)$$

La respuesta es el vector nulo.

c) Como $||\vec{u}\wedge\vec{v}||=||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||\cdot\operatorname{sen}\alpha$. Necesitamos hallar $\operatorname{sen}\alpha$ a partir del dato $\vec{u}\cdot\vec{v}=10$. Ya que

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||\cdot\cos\alpha$$

$$10=5\cdot 2\cdot\cos\alpha \qquad \cos\alpha=1$$

Como $\operatorname{sen}\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=0$, se tiene

$$||\vec{u}\wedge\vec{v}||=0 \quad \Rightarrow \vec{u}\wedge\vec{v}=(0,0,0)$$

Ejercicio 3

Soluciones a los Tests

Solución al Test: La expresión

$$\alpha + (\vec{u} \wedge \vec{v})$$

no tiene sentido pues $(\vec{u} \wedge \vec{v})$ es el producto vectorial y por tanto un vector, pero $\alpha + (\vec{u} \wedge \vec{v})$ es la suma de un vector y un número que no está definida.

Final del Test

Índice alfabético