4. Cálculo Integral

4.1. Primitiva de una función

Definición Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, y una función $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Una función F es una primitiva en I (o antiderivada) de f si cumple

$$F'(x) = f(x) \quad \forall\, x \in I$$

Teorema Sea $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Si F y G son dos primitivas de f en I, entonces existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(x) = G(x) + C \quad \forall x \in I$$

4.2. Integral indefinida

Definición Sea una función $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, y F una función primitiva de f en I. La integral indefinida de f es el conjunto de todas las funciones primitivas de f. Es decir:

$$\int f(x)\, dx = \{F(x) + C \,/\, C \in \mathbb{R}\}$$

Propiedad

$$\int (a\, f(x) + b\, g(x))\, dx = a \int f(x)\, dx + b \int g(x)\, dx \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

4.3. Integral definida en $[a, b]$

Definición Sean $a, b \in \mathbb{R}$, y una función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada. Se dice que la función f es Riemann integrable si existe y es un número real el límite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{con } x_{i-1} \le c_i \le x_i,\ x_0 = a,\ x_n = b$$

Si f es Riemann integrable en $[a, b]$, dicho límite se llama integral definida de f en $[a, b]$, y se representa $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.

Interpretación geométrica de la integral definida

En el caso de que $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sea una función que toma valores positivos, la expresión $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$ proporciona una aproximación al área delimitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje OX, y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Dicha área puede aproximarse mediante la suma de las áreas de rectángulos de base $x_i - x_{i-1}$, y altura $f(c_i)$. A medida que aumenta el número de rectángulos en los que se divide el intervalo $[a, b]$ $(n \to +\infty)$, el valor de la expresión tiende a esta área.

Por tanto, $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ es el área delimitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje OX, y las rectas $x = a$ y $x = b$.

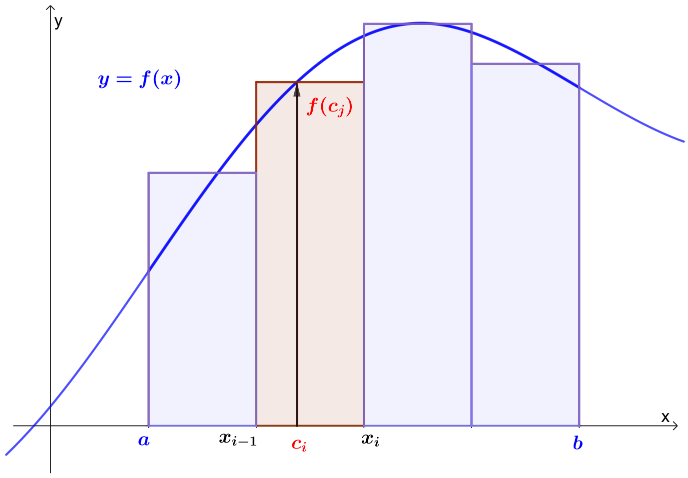

Figura 1: Definición de integral de Riemann

4.3.1. Propiedades de la integral definida

Sean a, $b \in \mathbb{R}$, y $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función Riemann integrable en $[a, b]$

I) Si $c \in (a, b)$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

II) Si $a = b$, entonces $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

III) $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

4.4. Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral

Sean a, $b \in \mathbb{R}$, y $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b - a)$$

Intepretación geométrica Si la función es positiva, el área comprendida bajo la curva en el intervalo $[a, b]$ coincide con el área del rectángulo de base el segmento de extremos a y b, y altura $f(c)$ para algún c interior al intervalo.

4.5. Teorema Fundamental del Cálculo Integral

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, y $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$.
Entonces:

I) La función $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ (llamada función integral) es derivable en (a, b)

II) $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$

Observación: Si f es una función positiva en $[a, b]$, la función F proporciona el área bajo la función f entre $x = a$ y un valor $x \in [a, b]$

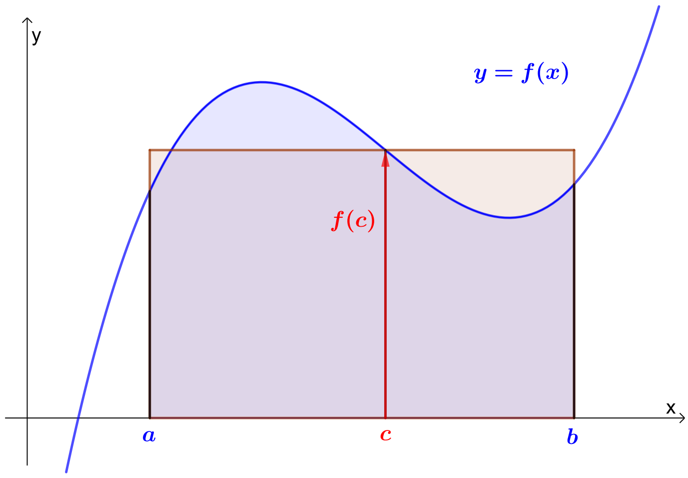

Figura 2: Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral

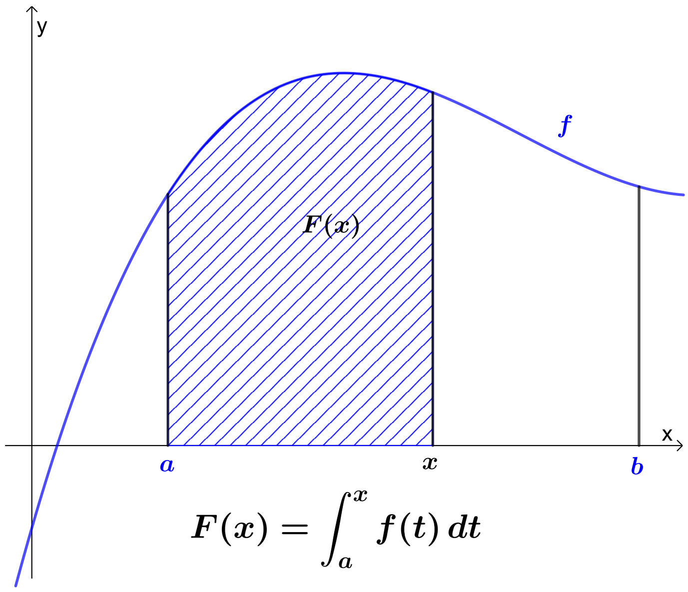

Figura 3: Función área (función integral)

4.6. Regla de Barrow

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, y $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Si F es una primitiva de f en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$