# Determinantes

IES O Couto

curso 2019-2020

# Introducción

El determinante de una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es un número real que se denota $|A|$ o $det(A)$, asociado a dicha matriz, y que nos permitirá:

- Determinar si la matriz es regular o singular, y calcular su inversa en caso de que exista.
- Determinar el rango de la matriz.
- Clasificar un sistema lineal de ecuaciones, e incluso expresar las soluciones del mismo.

# Definición

La definición formal de determinante no es sencilla, pero existen reglas que facilitan su cálculo según la dimensión de la matriz.

## Determinante de una matriz de orden 2

Dada la matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, su determinante es el número real $|A|$ obtenido mediante la expresión:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{22}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) = 8 + 6 = 14$$

## Determinante de una matriz de orden 3

Dada la matriz $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, su determinante se calcula mediante la fórmula conocida como **Regla de Sarrus**:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 6 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 0 - (-3) \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 4 \cdot 6 =$$

$$= 16 + 6 + 0 - 0 + 12 - 36 = -2$$

Para recordar la regla de Sarrus, conviene observar que en el cálculo de $|A|$ hay cierto patrón en el signo de los productos.

- Son postivos los productos: $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$, $a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$, $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- Son negativos los productos: $a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$, $a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$, $a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Es decir:

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

# Determinantes de matrices de orden superior

## Menor complementario de un elemento $a_{ij}$

Dada $A = (a_{ij})_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se llama **menor complementario del elemento $a_{ij}$**, y se denota $M_{ij}$ ,al determinante de la matriz de orden $n-1$ que resulta de eliminar la fila $i$ y la columna $j$ de la matriz $A$.

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\,j-1} & a_{1\,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1\,1} & a_{i-1\,2} & \dots & a_{i-1\,j-1} & a_{i-1\,j+1} & \dots & a_{i-1\,n} \\ a_{i+1\,1} & a_{i+1\,2} & \dots & a_{i+1\,j-1} & a_{i+1\,j+1} & \dots & a_{i+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\,j-1} & a_{n\,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

## Adjunto de un elemento $a_{ij}$

Dada $A = (a_{ij})_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, el **adjunto del elemento $a_{ij}$** es la cantidad $A_{ij}$ :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

En $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ los adjuntos de los elementos son los siguientes:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 2, \; A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 6$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8, \; A_{21} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -4, \; A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \; A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

## Matriz adjunta

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se llama **matriz adjunta** de $A$, $Adj(A)$, a la matriz cuyos coeficientes son los adjuntos de $A$:

$$Adj(A) = (A_{ij})_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow Adj(A) = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ -2 & -4 & -5 \\ -2 & -6 & -7 \end{pmatrix}$$

## Desarrollo de Laplace

El teorema de Laplace (también conocido como desarrollo de Laplace), permite simplificar el cálculo del determinante en una matriz de elevadas dimensiones a base de descomponerlo en la suma de determinantes de orden inferior, ya que el cálculo de un determinante de orden $n$ se transforma en el cálculo de $n$ determinantes de orden $n-1$ (los menores complementarios de todos los elementos de la fila k-ésima)

### Desarrollo de un determinante por los elementos de una fila (Teorema de Laplace)

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, y una fila cualquiera $k$, el determinante de $A$ puede obtenerse mediante la fórmula:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{kj}$$

Dicha fórmula se conoce como desarrrollo del determinante por los elementos de la fila k-ésima.

El teorema de Laplace puede enunciarse análogamente para obtener el desarrollo del determinante por los elementos de la columna k-ésima.

**Desarrollo de un determinante por los elementos de una columna (Teorema de Laplace)**

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, y una columna cualquiera $k$, el determinante de $A$ puede obtenerse mediante la fórmula:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$

- Si se utiliza el desarrollo de Laplace para calcular un determinante de orden 2 o de orden 3, se obtienen las fórmulas ya vistas.
- Para agilizar el cálculo mediante el desarrollo por adjuntos, procura utilizarse una fila o columna en la que varios elementos sean cero.

Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, podemos calcular el determinante desarrollando por los elementos de la tercera columna:

$$|A| = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{43} \cdot A_{43} = a_{23} \cdot A_{23} + a_{43} \cdot A_{43} \implies$$

$$|A| = -1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \implies$$

$$|A| = -1 \cdot (-1) \cdot (-11) + 2 \cdot (-1) \cdot (-42) = -11 + 84 = 73$$

# Propiedades de los determinantes (I)

El determinante de una matriz tiene una serie de propiedades que pueden utilizarse para agilizar su cálculo. Las expondremos para matrices de orden 2 porque es inmediato obtener su comprobación aplicando la fórmula del cálculo del determinante, aunque son válidas para determinantes de cualquier orden.

1. $|A| = |A^t|$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

   Como consecuencia de esta propiedad, cualquier otra propiedad que enunciemos relativa a las filas de una matriz se cumplirá igualmente para sus columnas.

2. Si una fila (o columna) puede descomponerse en sumandos, se cumple:

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b+b' \\ c & d+d' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b' \\ c & d' \end{vmatrix}$$

# Propiedades de los determinantes (II)

3. Si una fila (o columna) es múltiplo de un escalar, se cumple:

$$\begin{vmatrix} k\,a & k\,b \\ c & d \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} k\,a & b \\ k\,c & d \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

4. El determinante cambia de signo cuando se intercambian entre sí dos filas (o dos columnas)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$$

5. Si dos filas (o dos columnas) son iguales, el determinante vale 0

$$\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = ac - ac = 0$$

6. Si alguna fila (o columna) tiene nulos todos sus elementos, el determinante vale 0.

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

# Propiedades de los determinantes (III)

7. Si una fila (o columna) es combinación lineal de otras, el determinante vale 0.

$$\begin{vmatrix} a & k\,a \\ c & k\,c \end{vmatrix} \overset{\text{prop. }3}{=} k \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} \overset{\text{prop. }5}{=} 0$$

$$\begin{vmatrix} a & c \\ k\,a & k\,c \end{vmatrix} \overset{\text{prop. }3}{=} k \begin{vmatrix} a & c \\ a & c \end{vmatrix} \overset{\text{prop. }5}{=} 0$$

8. Si a una fila (o columna) le sumamos una combinación lineal de otras filas (o columnas), el determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} a+kc & b+kd \\ c & d \end{vmatrix} \overset{\text{prop. }2}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kc & kd \\ c & d \end{vmatrix} \overset{\text{prop. }3}{=}$$

$$\overset{\text{prop. }3}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} c & d \\ c & d \end{vmatrix} \overset{\text{prop. }5}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Análogamente:

$$\begin{vmatrix} a+kb & b \\ c+kd & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} b & b \\ d & d \end{vmatrix} = 0$$

# Propiedades de los determinantes (IV)

Estas propiedades se utilizan para reducir el coste del cálculo de un determinante: se hacen transformaciones elementales entre filas (o columnas) con el fin de anular el mayor número de coeficientes de una matriz antes de desarrollar el determinante por adjuntos.
Desarrollando por adjuntos, es fácil concluir que:

- El determinante de una matriz diagonal coincide con el producto de los elementos de la diagonal principal.
  En particular, el determinante de la matriz identidad es 1.
- El determinante de una matriz triangular (superior o inferior) coincide con el producto de los elementos de la diagonal principal.

## Determinantes y operaciones con matrices

Dadas $A$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- $|A + B| \neq |A| + |B|$
- $|kA| = k^n \cdot |A| \quad \forall k \in \mathbb{R}$
- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

# Ejercicios de cálculo de determinantes

## Ejercicio 1

*Calcular:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

Intentamos hacer el mayor número posible de ceros. Empezamos haciendo $C_1 + C_3 \to C_1$ y $C_2 + 2C_3 \to C_2$, y desarrollamos por la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 9 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & -2 & 1 \\ 3 & 8 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & 9 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 3 & 8 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \cdot 1 \cdot (90 + 16 + 27 - (-30) - (-27) - 48) = -142$$

## Ejercicio 2

*Calcular el determinante siguiente*

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 10 & 12 & 14 & 16 \\ 21 & 23 & 25 & 27 \end{vmatrix}$$

Restamos cada columna menos la anterior, y obtenemos un determinante con tres columnas iguales:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 10 & 2 & 2 & 2 \\ 21 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

## Ejercicio 3

*Sabiendo que* $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 12$, *hallar* $\begin{vmatrix} a+2d & c+2f & b+2e \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a+2d & c+2f & b+2e \\ 3d & 3f & 3e \\ -g & -i & -h \end{vmatrix} \overset{C_2 \longleftrightarrow C_3}{=} -\begin{vmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ 3d & 3e & 3f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} =$$

$$-3 \cdot \begin{vmatrix} a+2d & b+2e & c+2f \\ d & e & f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} a+2d & b+2c & c+2f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} =$$

$$3 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 3 \cdot 12 + 3 \cdot 0 = 36$$

## Ejercicio 4

*Sean $C_1$, $C_2$, y $C_3$ las columnas primera, segunda, y tercera respectivamente de una matriz cuadrada $M$ de orden 3 con $det(M) = 4$. Calcula, enunciando las propiedades de determinantes que utilices, el determinante de la matriz cuyas columnas primera, segunda, y tercera sean respectivamente $-C_2$, $2C_1 - C_3$, y $C_2 + C_3$. (Galicia. Junio 2011. Opción A)*

$$det(-C_2, 2C_1 - C_3, C_2 + C_3) = -det(C_2, 2C_1 - C_3, C_2 + C_3) =$$
$$-det(C_2, 2C_1, C_2 + C_3) - det(C_2, -C_3, C_2 + C_3) =$$
$$-2det(C_2, C_1, C_2 + C_3) + det(C_2, C_3, C_2 + C_3) =$$
$$-2det(C_2, C_1, C_2) - 2det(C_2, C_1, C_3) + det(C_2, C_3, C_2) + det(C_2, C_3, C_3) =$$
$$-2det(C_2, C_1, C_3) = 2det(C_1, C_2, C_3) = 2det(M) = 2 \cdot 4 = 8$$

# Cálculo de la matriz inversa

## Teorema

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se cumple que la suma de los productos de los elementos de una fila (o columna) por los adjuntos de otra fila (o columna) paralela es nula:

$$a_{i1} \cdot A_{k1} + a_{i2} \cdot A_{k2} + \ldots + a_{ij} \cdot A_{kj} + \ldots + a_{in} \cdot A_{kn} = 0 \quad i \neq k$$

$$(a_{1j} \cdot A_{1p} + a_{2j} \cdot A_{2p} + \ldots + a_{ij} \cdot A_{ip} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{np} = 0 \quad j \neq p)$$

Podemos demostrar el anterior teorema para una matriz de orden 3, para las filas 1 y 2. La demostración es similar para cualquier pareja de filas o columnas de una matriz de orden $n$:

$$a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Aplicaremos el anterior teorema a una matriz de orden 3, y deduciremos la expresión de la inversa de una matriz, que será válida para una matriz de cualquier orden.
Si efectuamos el producto $A \cdot (Adj(A))^t$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$A \cdot (Adj(A))^t = |A| \cdot I \implies A^{-1} \cdot A \cdot (Adj(A))^t = |A| \cdot A^{-1} \cdot I \implies (Adj(A))^t = |A| \cdot A^{-1}$$

### Teorema

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- $A$ es regular si y solo si $|A| \neq 0$.
- Si $A$ es regular, entonces $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(Adj(A))^t$
- Si $A$ es regular, entonces $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

## Ejercicio 5

*Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = B$, con*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Comprobamos si $A$ es regular, para lo cual es necesario y suficiente que $|A| \neq 0$.

$$|A| = 6 + 0 + (-2) - 0 - 1 - 10 = -7 \neq 0$$

2. Como $A$ es regular:

$$A \cdot X = B \implies A^{-1} \cdot A \cdot X = B \implies I \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies X = A^{-1} \cdot B$$

3. Calculamos los menores complementarios de los elementos de $A$:

$$M_{11} = -2,\ M_{12} = 3,\ M_{13} = 11,\ M_{21} = -1,\ M_{22} = -2,\ M_{23} = -12$$

$$M_{31} = -1,\ M_{32} = -2,\ M_{33} = -5$$

4. Calculamos la matriz adjunta de $A$, $Adj(A) = (A_{ij})_3$, cuyos coeficientes son los adjuntos $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 11 \\ 1 & -2 & 12 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

5. $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(Adj(A))^t$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{11}{7} & -\frac{12}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

6. Calculamos $X = A^{-1} \cdot B$:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{11}{7} & -\frac{12}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{20}{7} \\ \frac{15}{7} & \frac{30}{7} \\ -\frac{83}{7} & -\frac{117}{7} \end{pmatrix}$$

# Rango de una matriz

Una matriz puede considerarse como un conjunto de vectores fila, o un conjunto de vectores columna.

**Teorema**

En una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, el número de filas linealmente independientes coincide con el número de columnas linealmente independientes.

**Rango de una matriz**

Dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, se define el **rango de A** como el número máximo de filas o columnas linealmente independientes.

Del anterior teorema se deduce que

$$rango(A) = rango(A^t)$$

Veamos sobre una matriz concreta que el número máximo de filas linealmente independientes coincide con el número máximo de columnas linealmente independientes:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -2 & 10 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Examinando las filas vemos que:

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}} = \frac{a_{23}}{a_{13}} = \frac{a_{24}}{a_{14}} = 2 \text{ y } \frac{a_{31}}{a_{11}} \neq \frac{a_{32}}{a_{12}}$$

Por tanto, hay dos filas linealmente independientes ($F_1$ y $F_3$). Es decir, el rango por filas es 2.
Si examinamos las columnas, vemos que $C_1$ y $C_2$ son linealmente independientes:

$$\frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{21}} \neq \frac{a_{32}}{a_{31}}$$

Supongamos ahora que $C_1$, $C_2$, $C_3$ son linealmente independientes. Entonces, si $\alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3 = 0$, necesariamente debería ocurrir que $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Es decir:

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha a_{11}+\beta a_{12}+\gamma a_{13}=0\\ \alpha a_{21}+\beta a_{22}+\gamma a_{23}=0\\ \alpha a_{31}+\beta a_{32}+\gamma a_{33}=0\end{array}\right. \xrightarrow{\frac{a_{21}}{a_{11}}=\frac{a_{22}}{a_{12}}=\frac{a_{23}}{a_{13}}=\frac{a_{24}}{a_{14}}=2} \left\{\begin{array}{l}\alpha a_{11}+\beta a_{12}+\gamma a_{13}=0\\ 2\alpha a_{11}+2\beta a_{12}+2\gamma a_{13}=0\\ \alpha a_{31}+\beta a_{32}+\gamma a_{33}=0\end{array}\right.$$

Por tanto, los escalares $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ satisfacen:

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha a_{11}+\beta a_{12}+\gamma a_{13}=0\\ \alpha a_{31}+\beta a_{32}+\gamma a_{33}=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha+2\beta-\gamma=0\\ 3\alpha+\beta+\gamma=0\end{array}\right. \overset{Ec_1+Ec_2\to Ec_2}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha+2\beta-\gamma=0\\ 4\alpha+3\beta=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha=-\dfrac{3}{4}\beta\\ \\ \gamma=\dfrac{11}{4}\beta\end{array}\right.$$

En consecuencia, tomando por ejemplo $\beta=4$, resulta que $C_3$ es combinación lineal de $C_1$ y $C_2$, ya que:

$$-3C_1+4C_2+11C_3=0 \Longrightarrow C_3=\frac{3}{11}C_1-\frac{4}{11}C_2$$

Por tanto, las columnas $C_1$, $C_2$ y $C_3$ no forman un sistema linealmente independiente, dado que existen escalares $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$, no simultáneamente nulos, para los cuales $\alpha\, C_1 + \beta C_2 + \gamma\, C_3 = 0$. Así:

$$-3C_1 + 4C_2 + 11C_3 = 0 \implies C_3 = \frac{3}{11}C_1 - \frac{4}{11}C_2$$

Repitiendo el mismo razonamiento para la columna $C_4$, obtendríamos también que es combinación lineal de $C_1$ y $C_2$.
En definitiva, el número máximo de columnas linealmente independientes es también 2, o lo que es lo mismo, el rango por columnas también es 2.

## Cálculo del rango de una matriz mediante transformaciones elementales

**Teorema**

Si se tiene un sistema de vectores linealmente independientes, puede sumarse a un vector cualquiera una combinación lineal de otros vectores del sistema, y el nuevo sistema de vectores obtenido sigue siendo un conjunto de vectores linealmente independientes.

El anterior teorema permite calcular fácilmente el rango de una matriz efectuando transformaciones elementales en sus filas y/o columnas.
La idea es efectuar estas transformaciones para conseguir detectar con facilidad filas o columnas linealmente dependientes de otras.

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -3 & -9 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Efectuamos las siguientes transformaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -3 & -9 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{2F_1+F_4\to F_4 \\ F_2-2F_1\to F_2}]{F_3+3F_1\to F_3} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 7 & -2 \\ 0 & 6 & 7 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2+F_3\to F_3]{F_4+F_2\to F_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathit{rango}(A) = 2$$

# Cálculo del rango de una matriz por menores

## Menores de una matriz

Un **menor** de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es el determinante de una submatriz cuadrada obtenida de A mediante la eliminación de una o más de sus filas o columnas.

## Teorema

El rango de una matriz coincide con el orden del mayor menor no nulo.

## Ejercicio 6

*Estudiar el rango de la matriz $A$ en función del parámetro $k$.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & k & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

1. El rango de $A$ se define como el número máximo de filas o columnas linealmente independientes. Como $A \in \mathcal{M}_{3\times 5}(\mathbb{R})$, su máximo rango posible es 3.
2. Como existen menores de orden 2 no nulos, como mínimo el rango es 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

3. Hay que comprobar si el rango puede ser 3 independientemente del valor de $k$. Para ello, deben calcularse todos los menores de orden 3 de $A$ que puedan formarse sin elegir la columna $C_2$. Al hacerlo, se encuentra que todos esos menores son nulos (omitimos estos cálculos).

4. Como las columnas $C_1$ y $C_3$ son linealmente independientes elegimos ahora la submatriz formada por las tres primeras columnas

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & k & -1 \end{vmatrix} = -7 - 7k \neq 0 \Longleftrightarrow k \neq -1$$

Por tanto:

- $k = -1 \implies rang(A) = 2$
- $k \neq -1 \implies rang(A) = 3$

(Observando las filas de $A$, vemos que si $k = -1$, entonces $F_3 = 2F_1 + F_2$, por tanto, para que $A$ tuviese rango máximo necesariamente $k \neq -1$)

## Ejercicio 7

*Sabiendo que a, b, y c son no nulos, estudiar el rango de*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$$

1. Comprobamos si la matriz puede ser de rango completo, para lo cual, sería necesario y suficiente que su determinante fuese no nulo:
$$|A| = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = abc(-4+0+9-(-3)-8) = abc(-12+12) = 0$$
para cualesquiera valores de $a$, $b$ y $c$. Por tanto, $rang(A) \leq 2$
2. Tomando un menor cualquiera de orden 2, resulta que:
$$\begin{vmatrix} a & b \\ 2a & -b \end{vmatrix} = -3ab \neq 0 \quad \forall\, a,\, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies rang(A) = 2$$

## Ejercicio 8

*Estudiar según los valores de a, b, y c el rango de*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}$$

Efectuamos transformaciones elementales en las filas de la matriz.

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_3\to F_3} \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[C_1-C_3\to C_1]{C_2-C_3\to C_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ a-c & b-c & c \\ 0 & 0 & a+b+c \end{pmatrix}$$

1. Si $a=b=c$, las dos primeras columnas son nulas, pero la tercera no. Por tanto
$$a=b=c \implies rang(A)=1$$

2. En cualquier otro caso, o $b-c \neq 0$, o $a-c \neq 0$, por tanto, existiría un menor de orden dos no nulo en la matriz:

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ a-c & 0 \end{vmatrix} = -5(a-c) \neq 0 \text{ o } \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ b-c & 0 \end{vmatrix} = -5(b-c) \neq 0$$

   Es decir, $rang(A) \geq 2$. Pero como las columnas $C_1$ y $C_2$ son linealmente dependientes, $rang(A) = 2$

Por tanto:

- $a = b = c \implies rango(A) = 1$
- En otro caso $rango(A) = 2$