Sucesiones de números reales

IES O Couto

curso 2018-2019

Definición

Sucesión de números reales

Una sucesión es un conjunto ordenado de números $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ puede definirse más formalmente como una función del conjunto de los números naturales en el conjunto de los números reales.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ 1 & \longrightarrow & a_1 \\ 2 & \longrightarrow & a_2 \\ & \ldots & \\ n & \longrightarrow & a_n \end{array}$$

Términos de una sucesión

Cada uno de los elementos de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ recibe el nombre de término de la sucesión.
El término a_n recibe el nombre de término enésimo de la sucesión.

Formas de expresar una sucesión

Dado que una sucesión es un conjunto infinito de puntos, podemos caracterizarlo de distintas formas: por comprensión, dando el término general, o mediante una ley de recurrencia.

I) Por comprensión

Definir un conjunto por comprensión es describir qué elementos que pertenecen a él utilizando lenguaje natural.

Ejemplos

- La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de los números naturales pares:

$$\{2,\ 4,\ 6,\ 8, \ldots\}$$

- La sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de los números primos:

$$\{2,\ 3,\ 5, 7,\ 11 \ldots\}$$

II) Término general

El término general de una sucesión es una fórmula que relaciona cada término de la sucesión con el lugar que ocupa.
No siempre es posible encontrar la expresión del término general de una sucesión.

Ejemplos

- Para la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de los números pares, el término general es $a_n = 2n$
- Para la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de los números primos, no se conoce el término general.

III) Forma recurrente

Una forma recurrente o ley de recurrencia es una fórmula que permite calcular el valor de un término a partir de términos anteriores

Ejemplos

- La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de los números pares puede expresarse de manera recurrente como:

$$a_1 = 2$$
$$a_n = a_{n-1} + 2$$

- La sucesión de Fibonacci, $\{1, 1, 2, 3, 5, \ldots\}$, en la que cada término es la suma de los dos anteriores, se expresa de forma recurrente como:

$$c_1 = 1$$
$$c_2 = 1$$
$$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$$

Progresiones Aritméticas

Definición

Una progresión aritmética es una sucesión $\{a_n\}$ en la que cada término se obtiene sumando al anterior una cantidad constante llamada diferencia (d)

- El término general es $a_n = a_1 + d(n-1)$
- La ley de recurrencia es

$$\begin{aligned} &a_1 \\ &a_n = a_{n-1} + d \end{aligned}$$

Ejemplo

- La sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{2, 4, 6, 8\ldots\}$ es aritmética con diferencia 2:

$$a_n = 2 + 2(n-1) = 2n$$

Observación

El término general de una sucesión aritmética es siempre un polinomio en n de grado 1.

Suma de n términos de una progresión aritmética

Para deducir la fórmula para calcular la suma de n términos de una progresión aritmética, S_n, expresamos dos veces su valor.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} S_n & = & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & \dots & + & a_{n-2} & + & a_{n-1} & + & a_n \\ S_n & = & a_n & + & a_{n-1} & + & a_{n-2} & + & \dots & + & a_3 & + & a_2 & + & a_1 \end{array}$$

Dado que en una sucesión aritmética $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots$, sumando miembro a miembro las dos igualdades anteriores, se deduce que

$$S_n = \frac{(a_1 + a_2)n}{2}$$

Vamos a comprobar con un ejemplo concreto la obtención de la anterior fórmula para S_n.

Ejemplo

Supongamos que queremos deducir la fórmula para sumar los primeros veinte números naturales impares:

$$\begin{array}{lcccccccccccccc} S_{20} & = & 1 & + & 3 & + & 5 & + & \ldots & + & 35 & + & 37 & + & 39 \\ S_{20} & = & 39 & + & 37 & + & 35 & + & \ldots & + & 5 & + & 3 & + & 1 \end{array}$$

Sumando miembro a miembro las anteriores igualdades, dado que las sumas $1+39=3+37=5+35\ldots$ son todas iguales a $1+39$, entonces

$$S_{20} = \frac{(1+39)20}{2} = 400$$

Progresiones Geométricas

Definición

Una sucesión geométrica es una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en la que cada término se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad constante llamada razón (R).

- El término general es $a_n = a_1 \cdot R^{n-1}$
- La ley de recurrencia es

$$\begin{aligned} &a_1 \\ &a_n = a_{n-1} \cdot R \end{aligned}$$

Ejemplo

- La sucesión $\{a_n\} = \{2, -6, 18, -54\ldots\}$ es geométrica con razón $R = -3$:

$$a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$$

Observación

El término general de una sucesión geométrica es siempre una función exponencial.

Suma de n términos de una progresión geométrica

Para deducir la fórmula para calcular la suma de n términos de una progresión aritmética, S_n, consideramos las dos siguientes igualdades:

$$\begin{array}{rcccccccccc} S_n & = & a_1 & + & a_1 R & + & \dots & + & a_1 R^{n-2} & + & a_1 R^{n-1} \\ R \cdot S_n & = & a_1 R & + & a_1 R^2 & + & \dots & + & a_1 R^{n-1} & + & a_1 R^n \end{array}$$

Si $R \neq 1$, restando la primera igualdad menos la segunda, y despejando S_n, se obtiene

$$S_n = \frac{a_1 R^n - a_1}{R - 1} = \frac{a_n R - a_1}{R - 1}$$

Obviamente, si $R = 1$, $S_n = n\, a_1$

Suma de la totalidad de los términos de una progresión geométrica

Cuando $|R| < 1$, la cantidad R^n tiende hacia cero, por tanto, los términos de la sucesión tienden a anularse. Esto permite que pueda obtenerse la suma de la cantidad infinita de términos de la sucesión.
Dicha suma es:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-R} \quad \text{si} \ -1 < R < 1$$

Ejemplo: Aplicación al cálculo de una fracción generatriz

$$1 + 0'24 + 0'0024 + 0'000024 + 0'00000024 + \ldots = 1.\widehat{24}$$

Por otra parte, la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{0'24,\ 0'0024,\ 0'000024,\ 0'00000024\ldots\}$ es geométrica, con razón $R = 0'01$, por tanto:

$$1.\widehat{24} = 1 + S_\infty = 1 + \frac{0'24}{1-0'01} = 1 + \frac{24}{99} = \frac{99+24}{99} = \frac{123}{99}$$

Monotonía de sucesiones

Sucesión monótona

Una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona si es creciente o si es decreciente:

- $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente $\iff a_n \leq a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$
- $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente $\iff a_n \geq a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$

(Si las desigualdades anteriores son estrictas, la sucesión se dice estrictamente creciente, o estrictamente decreciente, según corresponda).

Sucesión constante

Una sucesión es constante si todos sus términos son iguales.

Sucesiones acotadas

Dada una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

- Se dice que está acotada superiormente cuando existe un número real K tal que $a_n \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Se dice que está acotada inferiormente cuando existe un número real K tal que $a_n \geq K, \forall n \in \mathbb{N}$

Sucesión acotada

Una sucesión está acotada si está acotada inferiormente y superiormente. Equivalentemente:

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ acotada } \iff \exists K > 0,\ K \in \mathbb{R} \ / \ |a_n| < K, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Límite de una sucesión

Sucesiones convergentes

- Un número real L es el límite de una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ si a partir de cierto $n_o \in \mathbb{N}$, la distancia entre todos los términos a_n y L puede hacerse tan pequeña como se desee.
- Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene por límite $L \in \mathbb{R}$, se dice que es convergente.
- Matemáticamente se expresa como:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L$$

O también:

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$$

Teorema de las sucesiones monótonas

Toda sucesión monótona creciente y acotada superiormente es convergente. Análogamente, es convergente toda sucesión monótona decreciente y acotada inferiormente.

Límites infinitos

Sucesiones divergentes

- Si a partir de un cierto valor $n_o \in \mathbb{N}$, todos los términos a_n de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pueden hacerse tan grandes como se desee (o equivalentemente, si la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y no está acotada superiormente), se dice que la sucesión es divergente, y que su límite es $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \text{ , o que } \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

- Análogamente, si a partir de cierto $n_o \in \mathbb{N}$, todos los términos a_n de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pueden hacerse tan negativos como se desee (o equivalentemente, si la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y no está acotada inferiormente), la sucesión es divergente, y su límite es $-\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \text{ , o que } \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

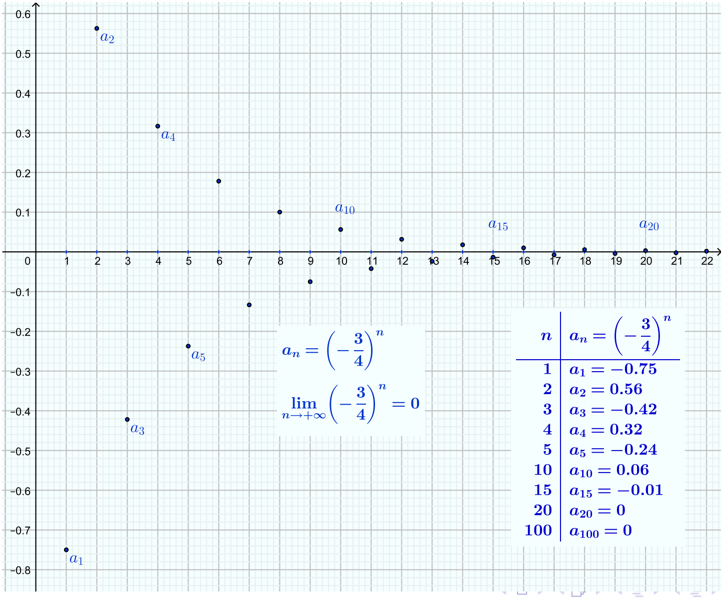
Unicidad del límite

Teorema

Si una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene límite (real o infinito), entonces dicho límite es único.

Ejemplos

- Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es aritmética:
  - $d > 0 \implies \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ creciente con $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$
  - $d < 0 \implies \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ decreciente con $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$
  - $d = 0 \implies \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ constante $\lim_{n\to+\infty} a_n = a_1$
- Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es geométrica:
  - $R > 1 \implies \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monótona y divergente
  - $R = 1 \implies \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ constante con $\lim_{n\to+\infty} a_n = a_1$
  - $0 < R < 1 \implies \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monótona y convergente hacia 0
  - $-1 < R < 0 \implies \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente hacia 0
  - $R \leq -1 \implies \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ oscilante (sin límite)



$$a_n = \left(-\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

n	$a_n = \left(-\frac{3}{4}\right)^n$
1	$a_1 = -0.75$
2	$a_2 = 0.56$
3	$a_3 = -0.42$
4	$a_4 = 0.32$
5	$a_5 = -0.24$
10	$a_{10} = 0.06$
15	$a_{15} = -0.01$
20	$a_{20} = 0$
100	$a_{100} = 0$

Ejemplos de cálculo de límites (I)

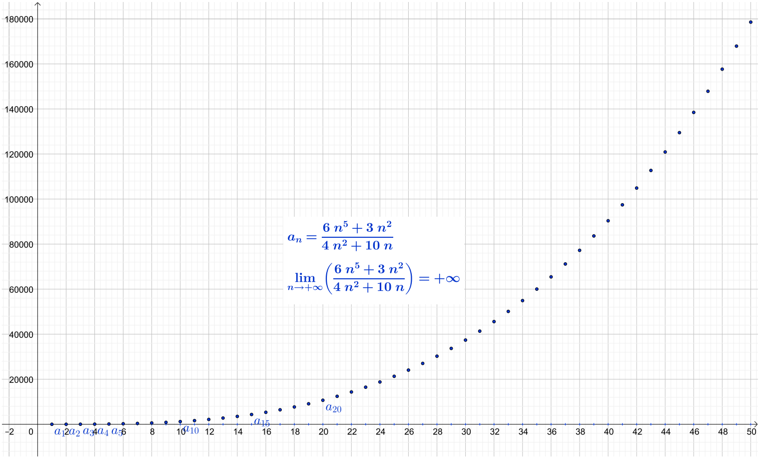
Término general de tipo $a_n = n^p$

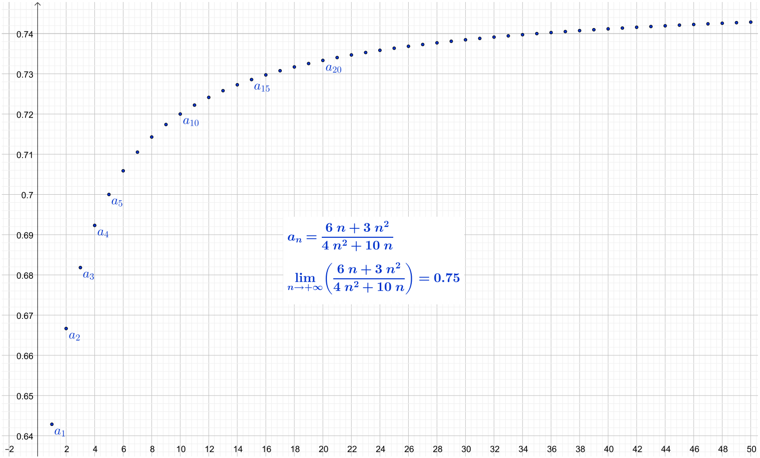
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 - 200n) = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (200n - n^2) = -\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{4n^3 + n} = +\infty$

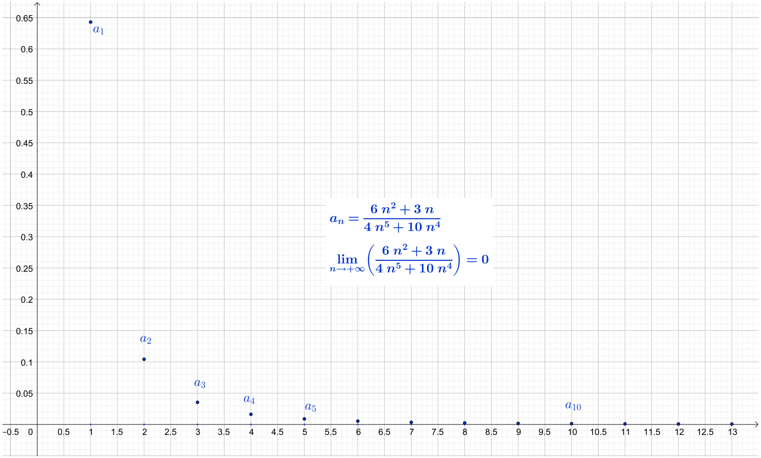
Ejemplos de cálculo de límites (II)

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

- $$\lim_{n\to+\infty}\frac{6n+3n^2}{4n^2+10n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(\frac{6}{n}+3\right)}{n^2\left(4+\frac{10}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{6}{n}+3}{4+\frac{10}{n}}=\frac{3}{4}$$
- $$\lim_{n\to+\infty}\frac{6n^5+3n^2}{4n^2+10n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^5\left(6+\frac{3}{n^3}\right)}{n^2\left(4+\frac{10}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{6n^3+3}{4+\frac{10}{n}}=+\infty$$
- $$\lim_{n\to+\infty}\frac{6n^2+3n}{4n^5+10n^4}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\left(6+\frac{3}{n}\right)}{n^5\left(4+\frac{10}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{6+\frac{3}{n}}{4n^3+10n^4}=0$$


180000
160000
140000
120000
100000
80000
60000
40000
20000
-2
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
34
36
38
40
42
44
46
48
50
a_1
a_2
a_3
a_4
a_5
a_{10}
a_{15}
a_{20}
$a_n = \dfrac{6\,n^5 + 3\,n^2}{4\,n^2 + 10\,n}$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{6\,n^5 + 3\,n^2}{4\,n^2 + 10\,n} \right) = +\infty$

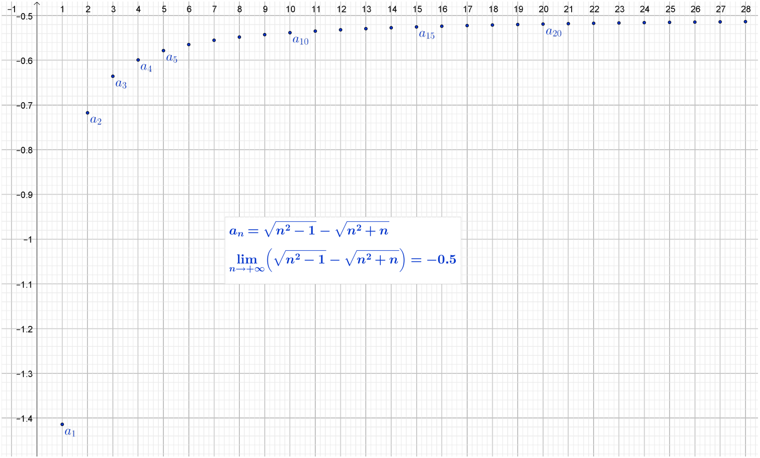

$a_n = \dfrac{6\,n + 3\,n^2}{4\,n^2 + 10\,n}$
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{6\,n + 3\,n^2}{4\,n^2 + 10\,n}\right) = 0.75$
a_1
a_2
a_3
a_4
a_5
a_{10}
a_{15}
a_{20}
0.74
0.73
0.72
0.71
0.7
0.69
0.68
0.67
0.66
0.65
0.64
-2 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50


a_1
a_2
a_3
a_4
a_5
a_{10}
$a_n = \dfrac{6\,n^2 + 3\,n}{4\,n^5 + 10\,n^4}$
$\lim_{n \to +\infty} \left(\dfrac{6\,n^2 + 3\,n}{4\,n^5 + 10\,n^4} \right) = 0$

Ejemplos de cálculos de límites (III)

Indeterminación $\infty - \infty$

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n^2-1}-\frac{3n}{n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{2-3n(n+1)}{(n-1)(n+1)}=-3$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+n}\right)=$
  $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+n})(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+n})}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+n}}=$
  $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-1-n^2-n}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-n-1}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+n}}=$
  $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(-1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}=-\frac{1}{2}$


a_1
a_2
a_3
a_4
a_5
a_{10}
a_{15}
a_{20}
$a_n = \sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2+n}$
$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2+n}\right) = -0.5$

Ejemplos de cálculo de límites (IV)

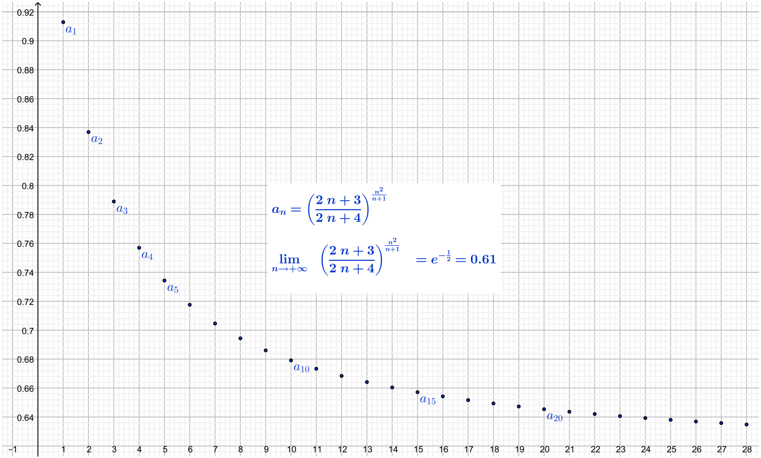
Número e

- La sucesión de término general $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ es creciente y acotada superiormente, por tanto, converge hacia un número real: el número irracional $e = 2'718281\ldots$.
- Como consecuencia, dada una sucesión cualquiera $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty \implies \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

Indeterminación 1^∞

- $$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+4}\right)^{\frac{n^2}{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{-1}{2n+4}\right)^{\frac{n^2}{n+1}} =$$
$$\lim_{n\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{\frac{2n+4}{-1}}\right)^{\frac{2n+4}{-1}}\right]^{\frac{-1}{2n+4}\cdot\frac{n^2}{n+1}} = e^{\lim \frac{-n^2}{(2n+4)(n+1)}} = e^{-\frac{1}{2}}$$


$a_n = \left(\frac{2\,n+3}{2\,n+4}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}$
$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2\,n+3}{2\,n+4}\right)^{\frac{n^2}{n+1}} = e^{-\frac{1}{2}} = 0.61$
a_1
a_2
a_3
a_4
a_5
a_{10}
a_{15}
a_{20}
0.92
0.9
0.88
0.86
0.84
0.82
0.8
0.78
0.76
0.74
0.72
0.7
0.68
0.66
0.64
−1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28