

2020

¿Cuántas cartas necesito para la torre?

IES O Couto

Departamento de Matemáticas

Vamos a contar de forma razonada cuántas cartas hay en la torre de 100 pisos.

Podemos intentar hacerlo fijándonos en la torre construida y contando.

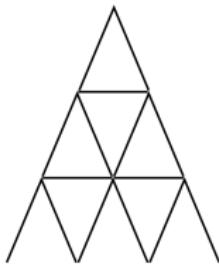


Figura: Torre de tres pisos

En esa torre de tres pisos es fácil contar el número total de cartas y ver que hay 15 cartas.

Contando paso a paso

2

Podemos utilizar ciertas estrategias para contar cuántas cartas hay en total. Por ejemplo, contamos por una parte las cartas inclinadas a la derecha, y luego las cartas inclinadas a la izquierda y las cartas tumbadas.

Lo que vamos hacer aquí es lo siguiente:

En vez de contar todas las cartas de la construcción a la vez, vamos a calcular cuántas cartas tiene cada piso de la torre.

Contando por pisos

3

Enumeramos los pisos de arriba hacia abajo. Así el piso uno será el de arriba de todo, el dos justo el que tiene debajo, y así sucesivamente.



Figura: Piso 1



Figura: Piso 2



Haciendo de esta forma vemos
que el primer piso está formado por dos cartas.

Figura: Piso 1



Y

que el piso 2 tiene 3 cartas más que el piso uno.

Figura: Piso 2

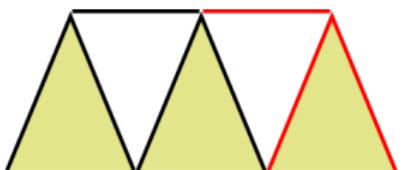


Figura: Piso 2

Y que el piso
3 tiene 3 cartas más que el piso dos.



Figura: Piso ?

Siguiendo ese razonamiento,
un piso cualquiera
tiene 3 cartas más que
el piso que tiene justo encima.

Contando las cartas del de 10 pisos

8

Con estos datos es fácil ver que el piso 1 tiene 2 cartas, el piso 2 tiene 5, el piso 3 tiene 8, etc.

Ponemos estos datos en una tabla:

P 1	P 2	P 3	P 4	P 5	P 6	P 7	P 8	P 9	P 10
2	5	8	11	14	17	20	23	26	29

Si nos da pereza sumar esas cantidades, con ayuda de una calculadora vemos que para hacer una torre de 10 pisos necesitamos 155 cartas.

Podemos hacer una tabla similar a la anterior para contar las cartas necesarias para la torre de 100 pisos, pero . . . incluso con calculadora nos dará pereza sumar los 100 sumandos implicados. Y eso sin contar que nos podemos equivocar al escribir los números con el teclado.

¡Hora de buscar una estrategia matemática!

Con la forma de contar anterior está claro que vamos a tener una tabla con 100 sumandos, uno por cada piso de la torre que tendremos que sumar.

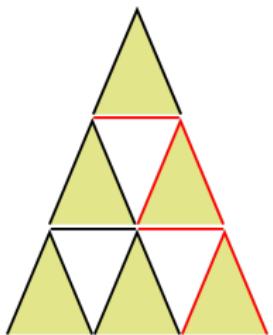
Torre de 100 pisos

¿Cómo sabemos cuántas cartas tiene un piso cualquiera?

- ▶ El primer piso tenía 2.
- ▶ El segundo piso tiene las del anterior más 3.
- ▶ El tercer piso tiene las que tenía el segundo más 3, pero el segundo tenía las del primero más 3.
- ▶ Por tanto el tercero tiene las cartas del primero más 2 veces 3.
- ▶ Del mismo modo, el cuarto piso, tendrá las mismas cartas que el primer piso más 3 veces 3.

Torre de 100 pisos

Veamos el razonamiento anterior con gráficos



Para comparar las cartas del tercer piso con las del primero hay que añadir las tres cartas nuevas del segundo piso, y las tres cartas nuevas del tercero.

Torre de 100 pisos

Así tenemos que:

- ▶ El primer piso tiene 2 cartas.
- ▶ El segundo piso tiene $2 + 3$ cartas.
- ▶ El tercer piso tiene $2 + 3 + 3$ cartas. Es decir $2 + 2 \cdot 3$ cartas.
- ▶ El cuarto piso tiene $2 + 3 \cdot 3$ cartas.
- ▶ :
- ▶ El piso 99 tendrá $2 + 98 \cdot 3$ cartas, que son 296 cartas.
- ▶ El piso 100 tendrá $2 + 99 \cdot 3$ cartas, que son 299 cartas.

Conclusión

¿Para qué nos sirve todo lo anterior?

Aún sabiendo lo que tenemos que sumar, que serán los números 2, 5, 8, 11, ..., 296, 299, es fácil ver que nos llevará tiempo, y que sabiéndolo hacer es fácil meter la pata.

¡Imagínate que el profe te manda de deberes una suma con 100 números!

Ahora viene la magia de las matemáticas: En vez de sumar una vez las cartas de los pisos para saber cuántas hay, las vamos a sumar **dos veces**.

Conclusión

Para ello colocamos las cartas que necesitamos en cada piso en dos filas:

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & + & 5 & + & \cdots & + & 296 & + & 299 \\ 299 & + & 296 & + & \cdots & + & 5 & + & 2 \end{array}$$

Si sumamos las columnas anteriores tenemos:

$$301 + 301 + \cdots + 301 + 301$$

Cambiamos el problema de sumar por uno de multiplicar mucho más fácil.

Y así el número de cartas para una torre de 100 pisos es:

$$\frac{100 \cdot 301}{2} = 15050$$

¿Por qué dividido por 2? Porque hemos hecho la suma dos veces al transformarla en la multiplicación



Gracias por tu atención!