

O exame consta de **4 preguntas de resposta obrigatoria**: as preguntas 1 e 2 sen apartados optativos e as preguntas 3 e 4 con posibilidade de elección entre apartados.

PREGUNTA 1. ESTADÍSTICA E PROBABILIDADE. (2 puntos)

1.1) (1 pto) En una muestra de 1 000 personas, mayores de 18 años, de una ciudad, hemos obtenido una estatura media de 1,72 m y una desviación típica de 0,4 m.

Con estos datos, hemos concluido que, la estatura media de los habitantes mayores de 18 años de esa ciudad está entre 170 cm y 174 cm. ¿Con qué nivel de confianza hemos llegado a dicha conclusión?

1.2) (1pto) En un determinado lugar, se seleccionó al azar una muestra de 100 personas cuya media de ingresos mensuales resultó igual a 1 060 euros con una desviación típica de 200 euros. Si se considera un nivel de significación igual a 0,01, ¿cuál es el tamaño muestral necesario para estimar la media de ingresos mensuales con un error menor de 30 euros?

PREGUNTA 2. ÁLXEBRA. (2 puntos)

Cierto fabricante produce dos artículos, *A* y *B*, para lo que requiere la utilización de dos secciones de producción: sección de montaje y sección de pintura.

El artículo *A* requiere una hora de trabajo en la sección de montaje y dos en la de pintura; y el artículo *B*, tres horas en la sección de montaje y una hora en la de pintura.

La sección de montaje solo puede estar en funcionamiento nueve horas diarias, mientras que la de pintura solo ocho horas cada día. El beneficio que se obtiene produciendo el artículo *B* es de 40 euros y el de *A* es de 20 euros.

Calcula la producción diaria de los artículos *A* y *B* que maximiza el beneficio.

PREGUNTA 3. ANÁLISE. (3 puntos)

Responda un dos seguintes dous apartados: 3.1. ou 3.2.

3.1

Calcula $\int_0^2 f(x)$, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

3.2

La producción de cierta hortaliza en un invernadero ($Q(x)$ en kg) depende de la temperatura (x en °C) según la expresión: $Q(x) = (x + 1)^2 (32 - x)$

- Calcula razonadamente cuál es la temperatura óptima a mantener en el invernadero.
- ¿Qué producción de hortaliza se obtendría?

PREGUNTA 4. ESTADÍSTICA E ÁLXEBRA. (3 puntos)

Responda un dos siguientes dous apartados de Estadística: 4.1. ou 4.2. (1,5 puntos)

4.1

En una clase de 30 alumnos hay 18 que han aprobado matemáticas, 16 que han aprobado inglés y 6 que no han aprobado ninguna de las dos.
Elegimos al azar un alumno de esa clase:

- ¿Cuál es la probabilidad de que haya aprobado inglés y matemáticas?
- Sabiendo que ha aprobado matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que haya aprobado inglés?
- ¿Son independientes los sucesos "Aprobar matemáticas" y "Aprobar inglés"?

4.2

En unas oposiciones, el temario consta de 85 temas. Se eligen tres temas al azar de entre los 85. Si un opositor sabe 35 de los 85 temas, ¿cuál es la probabilidad de que sepa al menos uno de los tres temas?

Responda un dos siguientes dous apartados de Álgebra: 4.3. ou 4.4. (1,5 puntos)

4.3

En una papelería van a vender carpetas, cuadernos y bolígrafos, agrupándolos en tres tipos de lotes:

- Lote A: 1 carpeta, 1 cuaderno y 1 bolígrafo.
- Lote B: 1 carpeta, 3 cuadernos y 3 bolígrafos.
- Lote C: 2 carpetas, 3 cuadernos y 4 bolígrafos.

Cada carpeta cuesta 6 euros, cada cuaderno 1,5 euros y cada bolígrafo 0,24 euros.

- Escribe una matriz que describa el contenido (número de carpetas, cuadernos y bolígrafos) de cada lote.
- Obtén matricialmente el precio total de cada uno de los lotes A, B y C.

4.4

Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3$, calcula el valor de los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2a+2b & b \\ 2c+2d & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix}$$

Soluciones

1.1

En una muestra de 1 000 personas, mayores de 18 años, de una ciudad, hemos obtenido una estatura media de 1,72 m y una desviación típica de 0,4 m.

Con estos datos, hemos concluido que, la estatura media de los habitantes mayores de 18 años de esa ciudad está entre 170 cm y 174 cm. ¿Con qué nivel de confianza hemos llegado a dicha conclusión?

Solución:

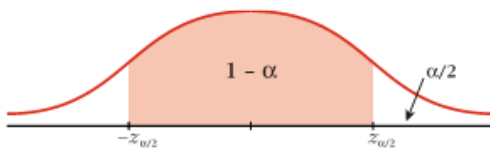
La expresión que nos da el error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Sabemos que $E = \frac{174-170}{2} = 2 \text{ cm} = 0,02 \text{ m}$

Como no conocemos σ , tomamos $s = 0,4 \text{ m}$. Y sabemos que $n = 1\,000$.

Sustituyendo en la expresión anterior, tenemos que:

$$0,02 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{0,4}{\sqrt{1000}} \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0,02 \cdot \sqrt{1000}}{0,4} = 1,58$$



$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9429 \rightarrow \alpha = 0,1142 \rightarrow 1 - \alpha = 0,8858$$

El nivel de confianza es del 88,58%.

1.2

El error máximo admisible es $E = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Para un nivel de significación de 0,01, tenemos que:

$$\alpha = 0,01 \rightarrow 1 - \alpha = 0,99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2,575.$$

El valor de σ lo aproximamos por $s = 200$ euros.

Sabemos que $E = 30$ euros.

Sustituyendo la expresión anterior, tenemos que:

$$30 = 2,575 \cdot \frac{200}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = \frac{2,575 \cdot 200}{30} = 17,17 \rightarrow n = 294,69$$

Deberemos tomar una muestra de, al menos, 295 personas.

Problema 2 : Álgebra

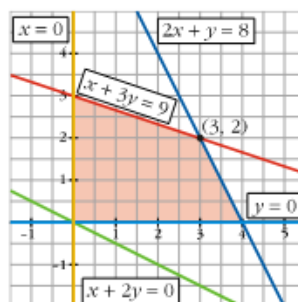
	CANTIDAD	MONTAJE	PINTURA	BENEFICIO
A	x	x horas	$2x$ horas	$20x$
B	y	$3y$ horas	y horas	$40y$
TOTAL		$x + 3y$	$2x + y$	$20x + 40y$

Las restricciones son:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 9 \\ 2x + y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La función que nos da el beneficio es $z = 20x + 40y = 20(x + 2y)$. Debemos obtener el máximo de esta función, sujeta a las restricciones anteriores.

Dibujamos el recinto correspondiente a las restricciones y la recta $20(x + 2y) = 0 \rightarrow x + 2y = 0$, que nos da la dirección de las rectas $z = 20x + 40y$.



El máximo se alcanza en el punto de intersección de las rectas $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$, es decir, en $(3, 2)$.

Por tanto, deben producirse 3 unidades de A y 2 de B . En este caso, el beneficio será de $z = 20 \cdot 3 + 40 \cdot 2 = 140$ euros.

3.1

Calcula $\int_0^2 f(x)$, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Solución:

- Entre 0 y 1:

$$G_1(x) = \int (x^2 + 1) = \frac{x^3}{3} + x$$

$$G_1(1) = \frac{4}{3}; \quad G_1(0) = 0$$

$$\int_0^1 (x^2 + 1) = G_1(1) - G_1(0) = \frac{4}{3}$$

- Entre 1 y 2:

$$G_2(x) = \int 2 = 2x$$

$$G_2(2) = 4; \quad G_2(1) = 2$$

$$\int_1^2 2 = G_2(2) - G_2(1) = 4 - 2 = 2$$

- Por tanto:

$$\int_0^2 f(x) = \frac{4}{3} + 2 = \frac{10}{3}$$

3.2

a) Buscamos el máximo de la función $Q(x)$:

$$\begin{aligned} Q'(x) &= 2(x+1)(32-x) + (x+1)^2 \cdot (-1) = (x+1)[2(32-x) - (x+1)] = \\ &= (x+1)[64 - 2x - x - 1] = (x+1)(63 - 3x) \end{aligned}$$

$$Q'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x+1=0 \rightarrow x=-1 \\ 63-3x=0 \rightarrow x=21 \end{cases}$$

$$Q''(x) = (63 - 3x) + (x+1) \cdot (-3) = 63 - 3x - 3x - 3 = -6x + 60$$

$$Q''(-1) = 66 > 0 \rightarrow \text{en } x = -1 \text{ hay un mínimo.}$$

$$Q''(21) = -66 < 0 \rightarrow \text{en } x = 21 \text{ hay un máximo.}$$

Por tanto, la temperatura ha de ser de 21 °C.

b) La producción en este caso sería de:

$$Q(21) = 5324 \text{ kg}$$

4.1

Organizamos los datos en una tabla de doble entrada, completando los que faltan:

	APRUEBAN MATEMÁTICAS	NO APRUEBAN MATEMÁTICAS	
APRUEBAN INGLÉS	10	6	16
NO APRUEBAN INGLÉS	8	6	14
	18	12	30

Llamamos M = "Aprueba matemáticas", I = "Aprueba inglés".

$$a) P[M \cap I] = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} = 0,33$$

$$b) P[I / M] = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} = 0,56$$

$$c) P[M] \cdot P[I] = \frac{18}{30} \cdot \frac{16}{30} = \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{15} = \frac{24}{75} = \frac{8}{25}$$

$$P[M \cap I] = \frac{1}{3} \neq \frac{8}{25}$$

Como $P[M \cap I] \neq P[M] \cdot P[I]$, los dos sucesos no son independientes.

4.2

Tenemos que hallar la probabilidad de que ocurra el siguiente suceso:

A = "el opositor conoce, al menos, uno de los tres temas"

Para calcularla, utilizaremos el complementario. Si sabe 35 temas, hay $85 - 35 = 50$ temas que no sabe; entonces:

$$P[A] = 1 - P[A'] = 1 - P["no sabe ninguno de los tres"] =$$

$$= 1 - \frac{50}{85} \cdot \frac{49}{84} \cdot \frac{48}{83} = 1 - 0,198 = 0,802$$

Por tanto, la probabilidad de que sepa al menos uno de los tres temas es de 0,802.

4.3

a) La matriz será:

$$\begin{array}{l} \text{CARPETAS} \\ A \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{CUADERNOS} \\ B \\ C \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{BOLÍGRAFOS} \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b) Los precios de cada carpeta, cada cuaderno y cada bolígrafo se resumen en la matriz:

$$\begin{array}{l} \text{CARPETA} \\ \text{CUADERNO} \\ \text{BOLÍGRAFO} \end{array} \begin{pmatrix} 6 \\ 1,5 \\ 0,24 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos la matriz obtenida en a) con esta última, obtendremos la matriz que buscamos:

$$\begin{array}{l} \text{CARPETA} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{CUADERNO} \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{BOLÍGRAFO} \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{l} \text{CARPETA} \\ \text{CUADERNO} \\ \text{BOLÍGRAFO} \end{array} \begin{pmatrix} 6 \\ 1,5 \\ 0,24 \end{pmatrix} = \begin{array}{l} A \\ B \\ C \end{array} \begin{pmatrix} 7,74 \\ 11,22 \\ 17,46 \end{pmatrix}$$

Es decir, el lote A cuesta 7,74 euros, el lote B, 11,22 euros y el lote C, 17,46 euros.

4.4

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 2a+2b & b \\ 2c+2d & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & b \\ 2d & d \end{vmatrix} \stackrel{(1)}{=} 2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + 0 = 2 \cdot 3 = 6$$

(1) El segundo determinante es 0, pues tiene dos columnas proporcionales.

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix} = 2^2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 = 12$$