IES CASTELAO
Rúa Aragón 22, 36206 Vigo
886 111111 fax 886 111117
www.edu.xunta.gal/centros/iescastelaovigo

XUNTA DE GALICIA
CONSELLERÍA DE EDUCACIÓN
E ORDENACIÓN UNIVERSITARIA

Examen: Solucionario - Práctica 2

DEPARTAMENTO MATEMÁTICAS

Fecha:

Curso / Grupo: 2ºBach -

APELLIDOS:...

NOMBRE:...

CORRECTOR DEL EXAMEN:

CADA EJERCICIO SERÁ VALORADO CON 2 PTOS

1.UN PUNTO HACER LA TABLA Y 0,5 RESPONDER BIEN A CADA PREGUNTA

7. Estadística y Probabilidad.

a) En una famosa biblioteca, el 70% de los libros son novelas, el 40% son clásicos anteriores al siglo XIX y el 60% de los clásicos son novelas. Si se elige en esa biblioteca un libro al azar, calcule la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico, y la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela.

b) En un cierto país, el 80% de los delitos contra la propiedad quedan sin resolver. Si en una localidad de ese país se cometieron 3 de esos delitos, calcule la probabilidad de que se resuelva por lo menos 1.

a)

Si el 60% de los clásicos son novelas significa que $0.60 \cdot 0.40 = 0.24$, el 24 por ciento del total son novelas y clásicos.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Novela	No novela	
Clásicos	**24**		**40**
No clásicos			
	70		**100**

Completamos la tabla.

	Novela	No novela	
Clásicos	**24**	**16**	**40**
No clásicos	**46**	**14**	**60**
	70	**30**	**100**

Mirando en la tabla tenemos que la probabilidad de que no sea una novela, pero sí un clásico es del $16/100 = 0.16$.

Mirando en la tabla tenemos que la probabilidad de que sea un clásico sabiendo que es una novela es $\dfrac{\text{Nº de novelas y clásicos}}{\text{Nº de novelas}} = \dfrac{24}{70} = 0.343$

b) El suceso contrario a "se resuelva por lo menos 1" es que no se resuelva ninguno.

$$P(\text{Se resuelva al menos 1}) = 1 - P(\text{No se resuelve ninguno}) = 1 - 0.80 \cdot 0.80 \cdot 0.80 = \boxed{0.488}$$

2. UN PUNTO CADA APARTADO

a) Se hace un examen tipo test con 60 preguntas y 4 opciones por pregunta, de las que solo una es correcta. Calcule la probabilidad de acertar por lo menos 16 preguntas si se responden las 60 al azar.
b) Si X sigue una distribución normal de media 25 y desviación típica 2, calcule $P(X<24)$. Luego, calcule el valor de $\alpha > 0$ tal que $P(25-\alpha < X < 25+\alpha) = 0.2128$.

a)

Resolvemos el problema utilizando la distribución binomial.
X = Número de aciertos al responder 60 preguntas.

Los parámetros son n = 60 y p = probabilidad de acertar una pregunta = 1/4 = 0.25.

X = B(60, 0.25)

Aproximamos esta binomial por una normal pues el número de repeticiones es muy alto.

Comprobamos la bondad de la aproximación.
n · p = 60 · 0.25 =15 > 5 y también n · q = 60 · 0.75 = 45 >5. La aproximación es buena.

Aproximamos la binomial por una normal de parámetros media = $\mu = np = 15$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{60\cdot 0.25\cdot 0.75} = \frac{3\sqrt{5}}{2} = 3.35$

X = B(60, 0.25) se aproxima con una normal $Y = N\left(15, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$

Nos piden calcular $P(X \geq 16)$.

$$P(X \geq 16) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 15.5) = 1 - P(Y \leq 15.5) =$$

$$= \{\textit{Tipificamos}\} = 1 - P\left(Z \leq \frac{15.5-15}{\frac{3\sqrt{5}}{2}}\right) = 1 - P(Z \leq 0.15) =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla}\} = 1 - 0.5596 = \boxed{0.4404}$$

b) X(25, 2)

$$P(X < 24) = \{\textit{Tipificamos}\} = P\left(Z < \frac{24-25}{2}\right) = P(Z < -0.5) =$$

$$= P(Z \geq 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) = \{\text{Miramos en la tabla}\} = 1 - 0.6915 = \boxed{0.3085}$$

Respondemos a la segunda cuestión.

$$P(25-\alpha < X < 25+\alpha) = P(X < 25+\alpha) - P(X < 25-\alpha) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(Z < \frac{25+\alpha-25}{2}\right) - P\left(Z < \frac{25-\alpha-25}{2}\right) = P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) - P\left(Z < \frac{-\alpha}{2}\right) =$$

$$= P\left(Z < \frac{\alpha}{2}\right) - P\left(Z \geq \frac{\alpha}{2}\right) = P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right)\right] = 2P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) - 1$$

Como debe ser igual a 0.2128 tenemos que:

$$2P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 0.2128 \Rightarrow 2P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) = 1.2128 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1.2128}{2} = 0.6064$$

Buscamos en la tabla y tenemos que:

$$\frac{\alpha}{2} = 0.27 \Rightarrow \boxed{\alpha = 0.54}$$

3. LLEGAR A LOS VALORES DE "m": 1PTO ;
ESCRIBIR BIEN CADA CASO: 0,25PTOS

Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema: $\begin{cases} x + (m-3)y + mz = 1 \\ (m-3)y + (m^2-m)z = 1 \\ x + m^2z = 0 \end{cases}$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2-m \\ 1 & 0 & m^2 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m-3 & m \\ 0 & m-3 & m^2-m \\ 1 & 0 & m^2 \end{vmatrix} = \{\text{Saco } m-3 \text{ como factor común en columna } 2^a\} =$$

$$= (m-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & m(m-1) \\ 1 & 0 & m^2 \end{vmatrix} = \{\text{Saco } m \text{ como factor común en columna } 3^a\} =$$

$$= (m-3)m\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & m-1 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix} = (m-3)m(m+m-1-1) = (m-3)m(2m-2) = 2m(m-3)(m-1)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 2m(m-3)(m-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$$

Analizamos cuatro casos por separado.

CASO 1. $m \neq 0, m \neq 3$ y $m \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $m = 0$

El sistema queda tan sencillo que lo resolvemos.

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ -3y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = 1 \\ \boxed{y = \frac{-1}{3}} \\ \boxed{x = 0} \end{cases} \Rightarrow 0 - 3\left(\frac{-1}{3}\right) = 1 \Rightarrow 1 = 1 \text{ ¡Cierto!}$$

$$\text{Soluciones}: \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{-1}{3}, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

CASO 3. $m = 3$

El sistema queda tan sencillo que intentamos resolverlo.

$$\begin{cases} x+3z=1 \\ 6z=1 \\ x+9z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3z=1 \\ \boxed{z=\frac{1}{6}} \\ x+9z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3\frac{1}{6}=1 \\ x+9\frac{1}{6}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{2}=1 \\ x+\frac{3}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \\ x=-\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{¡¡Imposible!!}$$

El sistema es incompatible.

CASO 4. $m = 1$

El sistema queda tan sencillo que lo resolvemos.

$$\begin{cases} x-2y+z=1 \\ \quad -2y \quad\ =1 \\ x \quad + \quad z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=1 \\ \boxed{y=\frac{-1}{2}} \\ x \quad + \quad z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2\frac{-1}{2}+z=1 \\ x \quad + \quad z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1+z=1 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+z=0 \Rightarrow \boxed{x=-z}$$

$$\boxed{\textit{Solución}: \begin{cases} x=-t \\ y=-\frac{1}{2}, \quad t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}}$$

El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)