Solución Boletín: Paso de Binomial a Normal

1.

Se trata de una experiencia dicotómica en la que el éxito es dar en la diana con probabilidad $p = 0{,}4$. El número de aciertos sigue una distribución $x = B(6;\ 0{,}4)$.

a) $P[x = 1] = \binom{6}{1} \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}19$

b) $P[x \geq 1] = 1 - P[x = 0] = 1 - 0{,}6^6 = 0{,}95$

2.

a) $n \cdot p = 100 \cdot 0{,}1 = 10$

Es mayor que 5, luego la aproximación por la distribución normal será de parámetros:

$\mu = n \cdot p = 10$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0,1 \cdot 0,9} = 3$

$x = B(100;\ 0{,}1) \approx x' = N(10;\ 3)$

$P[x = 10] = 0$

$P[x < 2] = P[x' < 1,5] = P\left[z < \dfrac{1,5 - 10}{3}\right] = P[z < -2,83] = P[z > 2,83] = 1 - P[z < 2,83] = 0,0023$

$P[5 < x < 15] = P[5,5 < x' < 14,5] = P\left[\dfrac{5,5 - 10}{3} < z < \dfrac{14,5 - 10}{3}\right] = P[-1,5 < z < 1,5] =$

$= 0{,}9332 \cdot 2 - 1 = 0{,}8664$

b) $n \cdot p = 1\,000 \cdot 0{,}02 = 20$

Es mayor que 5, luego la aproximación por la distribución normal será de parámetros:

$\mu = n \cdot p = 20$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{1\,000 \cdot 0,03 \cdot 0,98} = 4{,}43$

$x = B(1\,000;\ 0{,}02) \approx x' = N(20;\ 4{,}43)$

$P[x > 30] = P[x' > 30{,}5] = P\left[z > \dfrac{30,5 - 20}{4,43}\right] = P[z > 2,37] = 1 - P[z < 2,37] = 1 - 0,9911 = 0,0089$

$P[x < 80] = P[x' < 79{,}5] = P\left[z < \dfrac{79,5 - 20}{4,43}\right] = P[z < 13,43] = 1$

c) $n \cdot q = 50 \cdot 0{,}1 = 5$

Es mayor que 3, luego la aproximación por la distribución normal será de parámetros:

$\mu = n \cdot p = 45$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{50 \cdot 0,1 \cdot 0,9} = 2{,}12$

$x = B(50;\ 0{,}9) \approx x' = N(45;\ 2{,}12)$

$P[x > 45] = P[x' > 44{,}5] = P\left[z > \dfrac{44,5 - 45}{2,12}\right] = P[z > -0,24] = P[z < 0,24] = 0,5948$

$P[x \leq 30] = P[x' \leq 30{,}5] = P\left[z \leq \dfrac{30,5 - 45}{2,12}\right] = P[z \leq -6,84] = P[z \geq 6,84] = 1 - P[z \leq 6,84] = 0$

3.

El número de cincos obtenidos al lanzar 1 000 veces un dado sigue una distribución $B\left(1000, \frac{1}{6}\right)$.

Como $n \cdot p = 1\,000 \cdot \frac{1}{6} = 166{,}67$ es mayor que 5, podemos aproximar esta binomial mediante una normal de parámetros $\mu = 166{,}67$ y $\sigma = \sqrt{1000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 11{,}79$.

Por tanto $x = B\left(1000, \frac{1}{6}\right) \approx x' = N(166{,}67;\ 11{,}79)$

$$P[x < 100] = P[x' \le 99{,}5] = P\left[z \le \frac{99{,}5 - 166{,}67}{11{,}79}\right] = P[z \le -5{,}7] = P[z \ge 5{,}7] = 1 - P[z < 5{,}7] \approx 0$$

La probabilidad obtenida es casi nula y podemos afirmar que es prácticamente imposible que eso ocurra.

4.

El número de tornillos defectuosos de cada caja sigue una distribución $x = B\left(50, \frac{2}{100}\right)$

a) $P[x = 0] = 0{,}98^{50} = 0{,}36$

b) $P[x = 1] = \binom{50}{1} \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98^{49} = 0{,}37$

c) $P[x > 2] = 1 - P[x \le 2] = 1 - P[x = 0] - P[x = 1] - P[x = 2]$

$P[x = 2] = \binom{50}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{48} = 0{,}19$

$P[x > 2] = 1 - 0{,}36 - 0{,}37 - 0{,}19 = 0{,}08$

5.

Se pide comparar el número de éxitos en binomiales con valores de n distintos, en la primera $n = 4$ y en la segunda $n = 6$.

$B(4;\ 0{,}5) \rightarrow P[x = 2] = \binom{4}{2} \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}375$

$B(6;\ 0{,}5) \rightarrow P[x = 3] = \binom{6}{3} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^3 = 0{,}3125$

Es decir, cuantas más partidas se jueguen, más difícil resulta que ganen el mismo número de veces.

6.

Sea $x = N(5, \sigma)$ la distribución del retraso. Como el intervalo [2, 8] está centrado en 5, por la simetría de la normal respecto de su media podemos asegurar que el 34,13 % de los autobuses se retrasa entre 5 y 8 minutos.

a) $P[5 \leq x \leq 8] = 0{,}3413 \;\rightarrow\; P[x \leq 8] = 0{,}3413 + 0{,}5 = 0{,}8413 \;\rightarrow\; P\left[z \leq \dfrac{8-5}{\sigma}\right] = 0{,}8413 \;\rightarrow$

$$\rightarrow\; \frac{3}{\sigma} = 1 \;\rightarrow\; \sigma = 3$$

b) $P[x \leq 0] = P\left[z \leq \dfrac{0-5}{3}\right] = P[z \leq -1{,}67] = P[z \geq 1{,}67] = 1 - P[z < 1{,}67] = 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$

7.

Se trata de una experiencia dicotómica en la que la probabilidad de ser niño es $p = 0{,}46$. El número de niños nacidos sigue una distribución $B(2\,500;\, 0{,}46)$.

Como $n \cdot p = 2\,500 \cdot 0{,}46 = 1\,150 > 5$ podemos aproximar de forma muy precisa con la normal de media $\mu = 1\,150$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{2\,500 \cdot 0{,}46 \cdot 0{,}54} = 24{,}9$

$x = B(2\,500;\, 0{,}46) \approx x' = N(1\,150;\, 24{,}9)$

$$P[1\,200 \leq x \leq 1\,400] = P[1\,199{,}5 \leq x' \leq 1\,400{,}5] = P\left[\frac{1199{,}5-1150}{24{,}9} \leq z \leq \frac{1400{,}5-1150}{24{,}9}\right] =$$

$$= P[1{,}99 \leq z \leq 10{,}06] = P[z \leq 10{,}06] - P[z \leq 1{,}99] = 1 - 0{,}9767 = 0{,}0233$$

8.

Se trata de una experiencia dicotómica en la que la probabilidad de acertar es $p = \dfrac{1}{3}$. El número de respuestas acertadas sigue una distribución $B\left(50, \dfrac{1}{3}\right)$.

Como $n \cdot p = 50 \cdot \dfrac{1}{3} = 16{,}67 > 5$ podemos aproximar de forma muy precisa con la normal de media $\mu = 16{,}67$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{50 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3}} = 3{,}33$.

$x = B\left(50, \dfrac{1}{3}\right) \approx x' = N(16{,}67;\, 3{,}33)$

Aprobar:

$$P[25 \leq x < 35] = P[24{,}5 \leq x' \leq 34{,}5] = P\left[\frac{24{,}5-16{,}67}{3{,}33} \leq z \leq \frac{34{,}5-16{,}67}{3{,}33}\right] = P[2{,}35 \leq z \leq 5{,}35] =$$

$$= 1 - 0{,}9906 = 0{,}0094$$

Las probabilidades de sacar un notable o un sobresaliente son prácticamente nulas.

Veámoslo con el notable:

$$P[35 \leq x < 45] = P[34{,}5 \leq x' \leq 44{,}5] = P\left[\frac{34{,}5-16{,}67}{3{,}33} \leq z \leq \frac{44{,}5-16{,}67}{3{,}33}\right] = P[5{,}35 \leq z \leq 8{,}36] =$$

$$= P[z \leq 8{,}36] - P[z \leq 5{,}35] \approx 1 - 1 = 0$$

9.

Se trata de una experiencia dicotómica en la que la probabilidad de ser defectuoso es $p = \frac{10}{100} = 0{,}1$.

El número de tornillos defectuosos sigue una distribución $B(300;\ 0{,}1)$.

Como $n \cdot p = 300 \cdot 0{,}1 = 30 > 5$ podemos aproximar de forma muy precisa con la normal de media $\mu = 30$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{50 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 2{,}12$.

$x = B(300;\ 0{,}1) \approx x' = N(30;\ 2{,}12)$.

a) $9\% \cdot 300 = 27$

$$P[x > 27] = P[x' \geq 27{,}5] = P\left[z \geq \frac{27{,}5 - 30}{2{,}12}\right] = P[z \geq -1{,}18] = P[z \leq 1{,}18] = 0{,}881$$

b) $P[20 < x < 30] = P[20{,}5 \leq x' \leq 29{,}5] = P\left[\frac{20{,}5 - 30}{2{,}12} \leq z \leq \frac{29{,}5 - 30}{2{,}12}\right] = P[-4{,}48 \leq z \leq -0{,}24] =$

$$= P[z \leq 0{,}24] - P[z \leq 4{,}48] = 1 - 0{,}5948 = 0{,}4052$$

10.

a) El número de 0 extraídos sigue una distribución $B\left(3, \frac{1}{10}\right)$.

$$P[x = 1] = \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 0{,}243$$

b) El número de 0 extraídos sigue una distribución $B\left(100, \frac{1}{10}\right)$.

Como $n \cdot p = 100 \cdot 0{,}1 = 10 > 5$ podemos aproximar de forma muy precisa con la normal de media $\mu = 10$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 3$.

$$x = B\left(100, \frac{1}{10}\right) \approx x' = N(10,\ 3)$$

$$P[x > 12] = P[x' \geq 12{,}5] = P\left[z \geq \frac{12{,}5 - 10}{3}\right] = P[z \geq 0{,}83] = 1 - P[z < 0{,}83] =$$

$$= 1 - 0{,}7967 = 0{,}2033$$

11.

$$\left.\begin{aligned} \frac{84 - \mu}{\sigma} &= 1{,}75 \\ \frac{78 - \mu}{\sigma} &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \mu = 70,\ \sigma = 8$$

12.

Calculamos primero los parámetros μ y σ:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{172-\mu}{\sigma}=1,4 \\ \\ \dfrac{167-\mu}{\sigma}=0,4\end{array}\right\} \rightarrow \mu=165,\ \sigma=5$$

a) $\dfrac{x-165}{5}=-1 \rightarrow x=160$ cm es la altura real de Estefanía.

b) $\dfrac{165-165}{5}=0$ es la tipificación de la altura de Azucena.