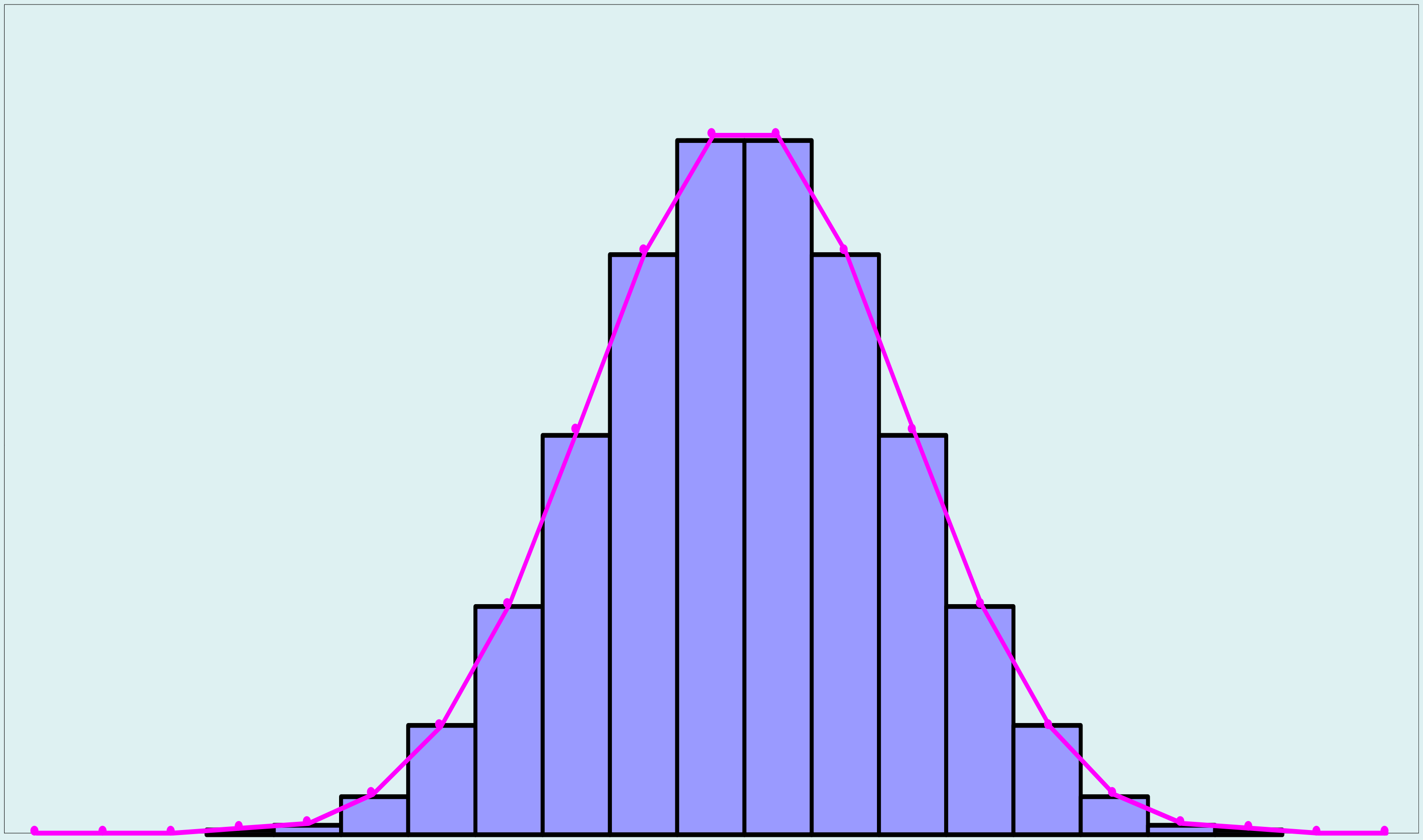
Distribucións de variables continuas (I)

Para unha variable aleatoria continua X, sobre una poboación moi grande, con unha mostra de tamaño n construímos o histograma en escala de densidade. Nestos histogramas:

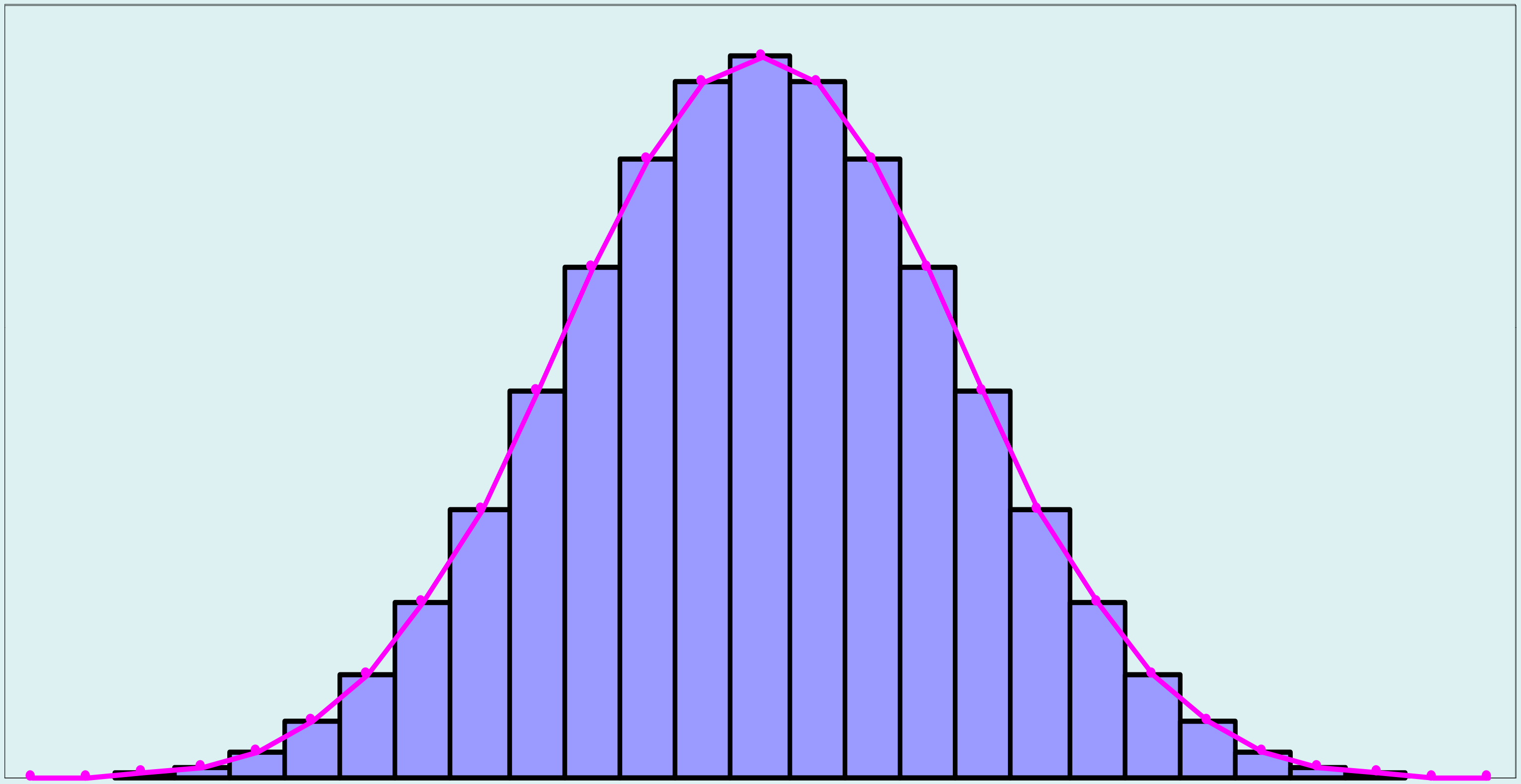
- Os intervalos de clase son de igual amplitude.
- A superficie encerrada por cada rectángulo é igual á frecuencia relativa correspondente ao intervalo.
- Por tanto a suma das áreas de todos os rectángulos és 1.

Ao facer que n (tamaño da mostra) medre, e a amplitude dos intervalos diminua observamos que a curva aproximase a unha curva f que se denomina función de densidade da variable X. Observemos unha simulación de dito proceso:

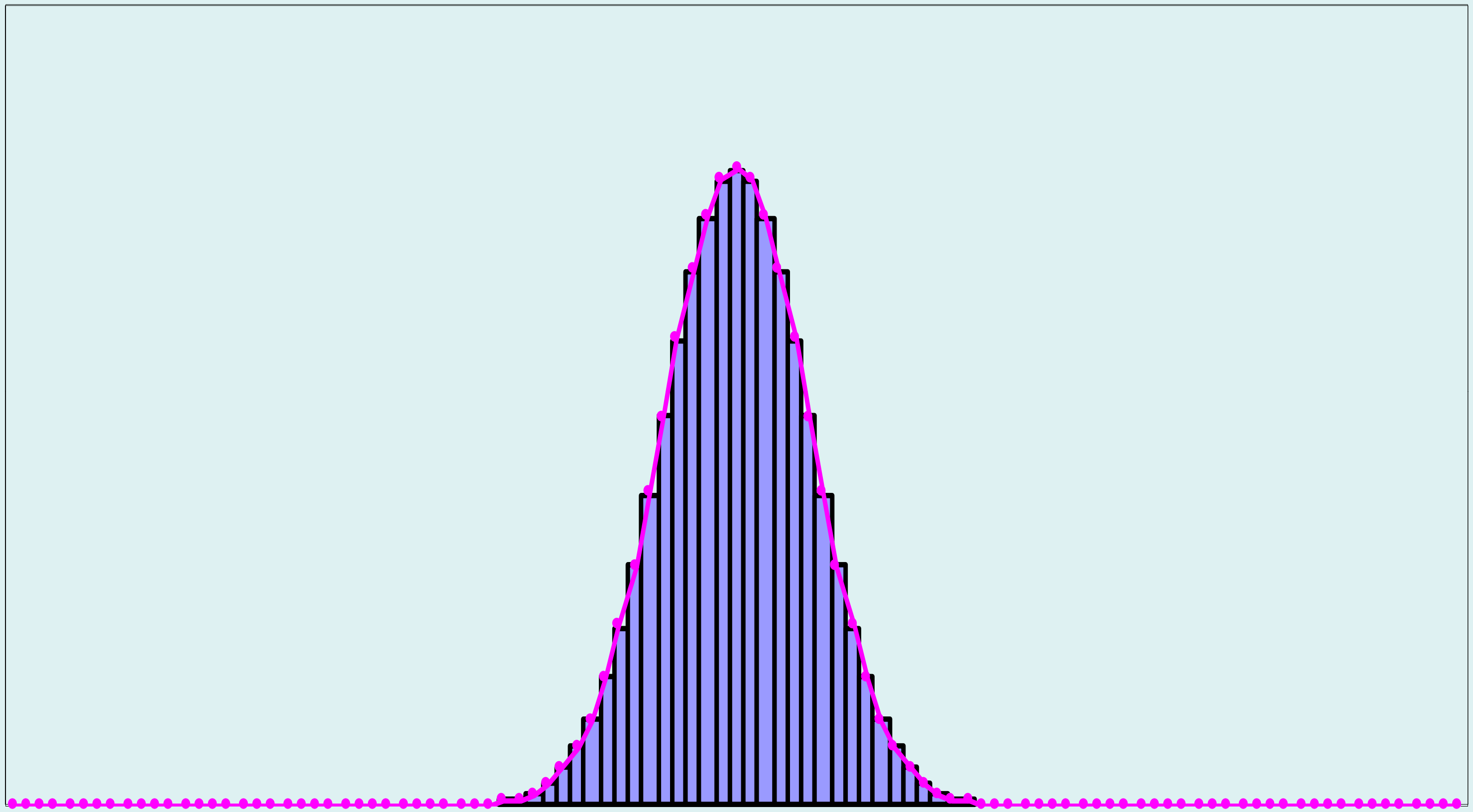
n = 100



n = 1500



n = 3000

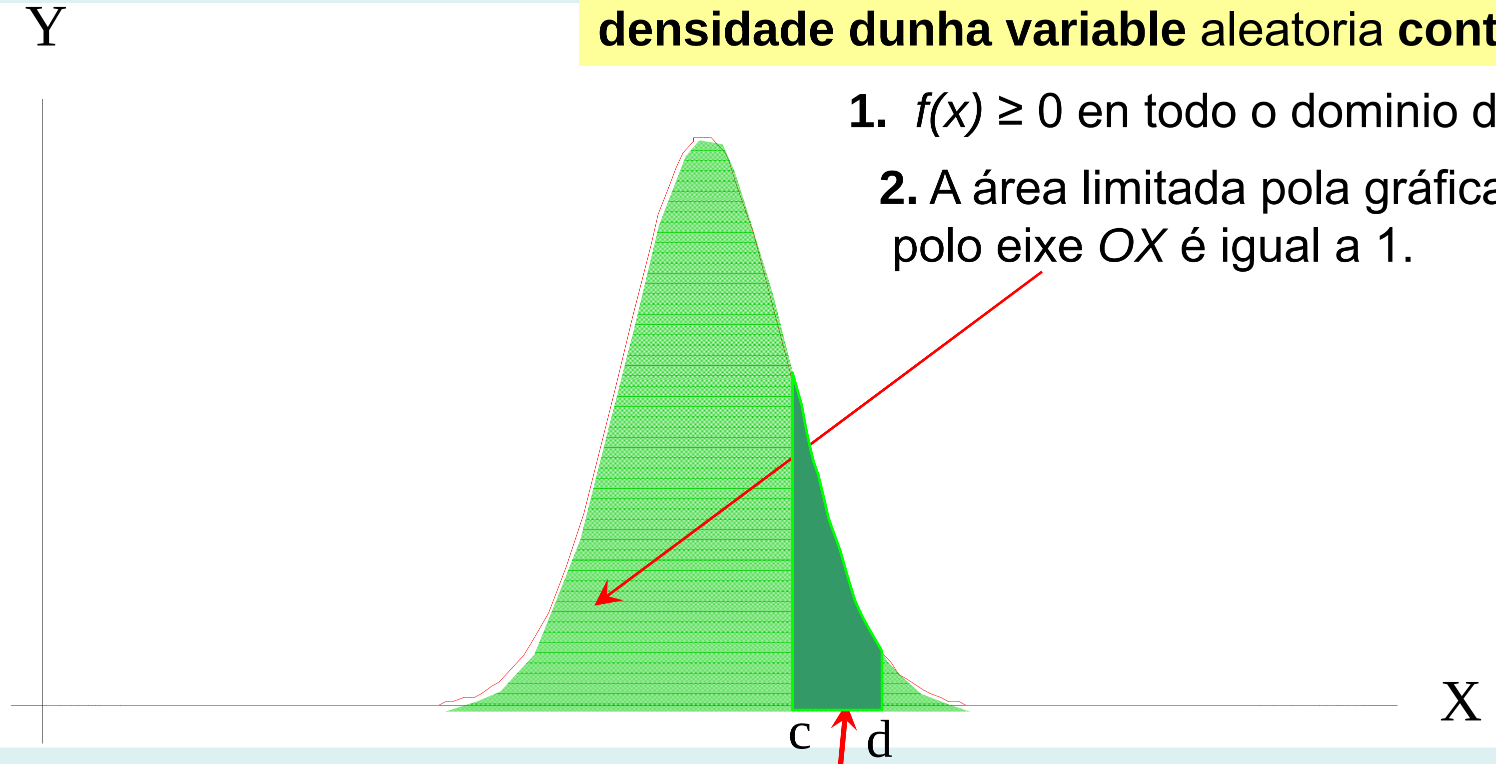


Función de densidade

Unha función $f(x)$ é admisible como **función de densidade dunha variable** aleatoria **continua** se:

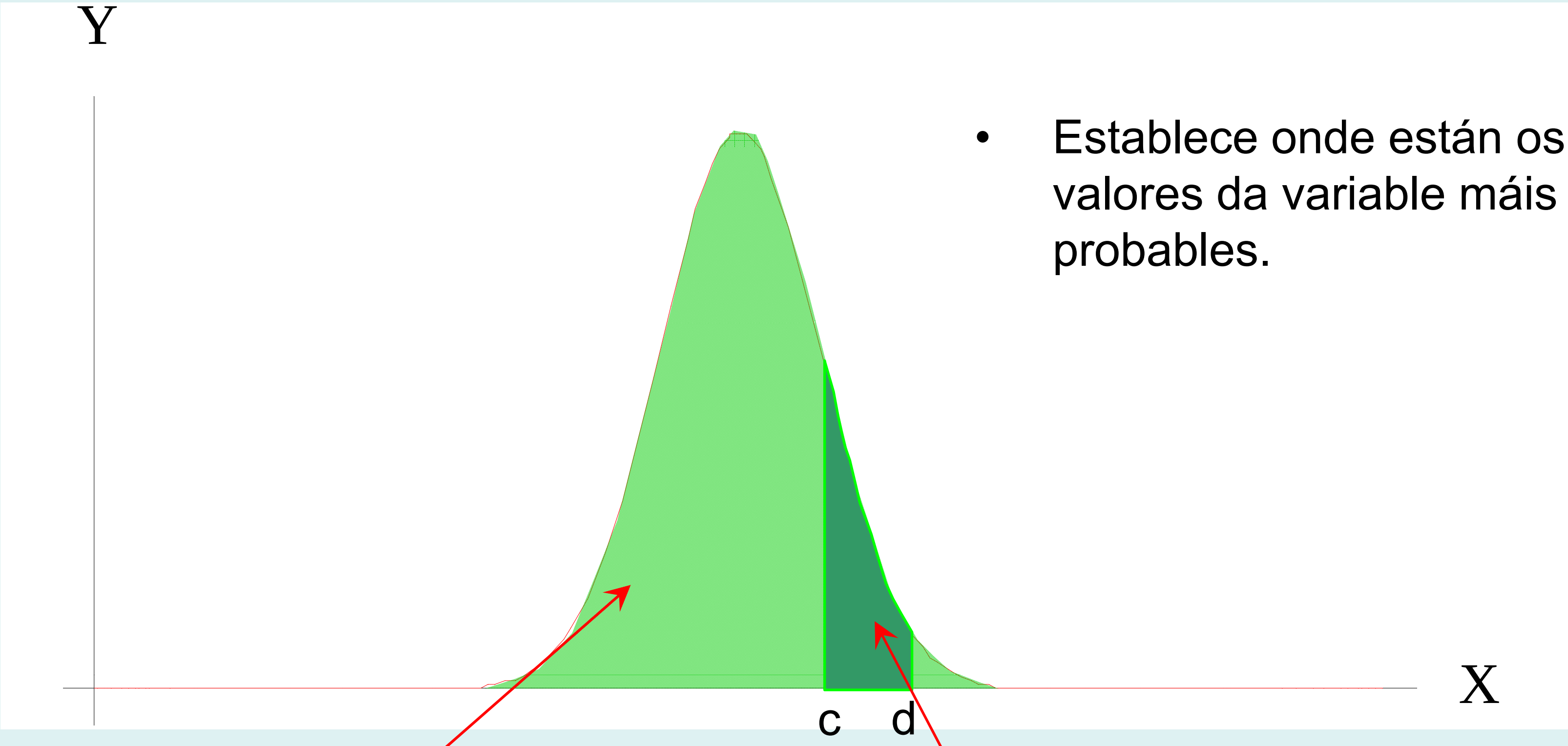
1. $f(x) \geq 0$ en todo o dominio de definición.

2. A área limitada pola gráfica de $f(x)$ e polo eixe *OX* é igual a 1.



$$P(c < X < d) = P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)dx$$

A función de densidade



- Establece onde están os valores da variable máis probables.

- Está sempre por encima do eixe OX.
- A área encerrada baixo a función de densidade é 1.

$$p(c < X < d) = p(c \le X \le d) = \int_c^d f(x)\,dx$$

Media e varianza dunha variable aleatoria continua

Variable estadística	Variable aleatoria discreta	Variable aleatoria continua
$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i h_i$	$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$	$\mu = \int_a^b x \cdot f(x)\, dx$
$s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 h_i$	$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i$	$\sigma^2 = \int_a^b (x - \mu)^2 \cdot f(x) \cdot dx$

Variable aleatoria de la distribución normal $N(\mu, \sigma)$

Unha variable aleatoria continua *X* **segue unha distribución normal de media μ e desviación típica σ**, e designase por ***N*(μ, σ)** si se cumplen as seguintes condicións.

1.ª A variable pode tomar calquer valor real, é dicir, $x \in (-\infty, +\infty)$.

2.ª A función de densidade, que é a expresión en términos de ecuación matemática da función de Gauss, é:

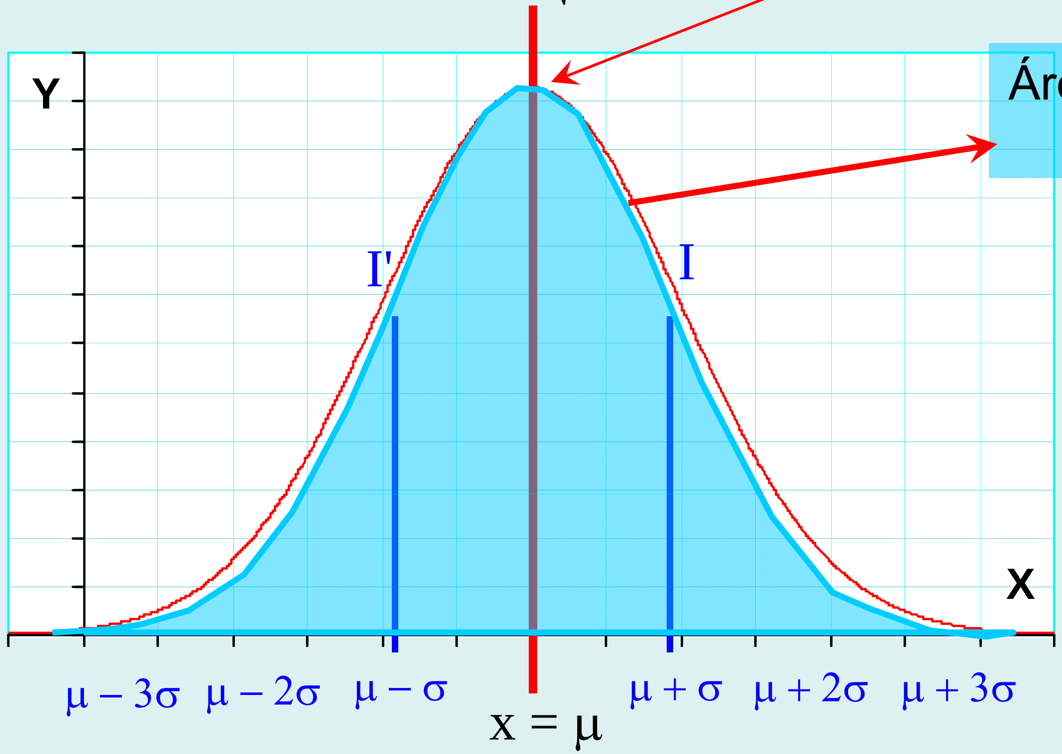
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Función de densidade da N(μ, σ)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$\left(\mu, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$$

Área baixo a curva: 1 unidade



Campo de existencia = (– ∞, + ∞)

Crecente

Decrecente

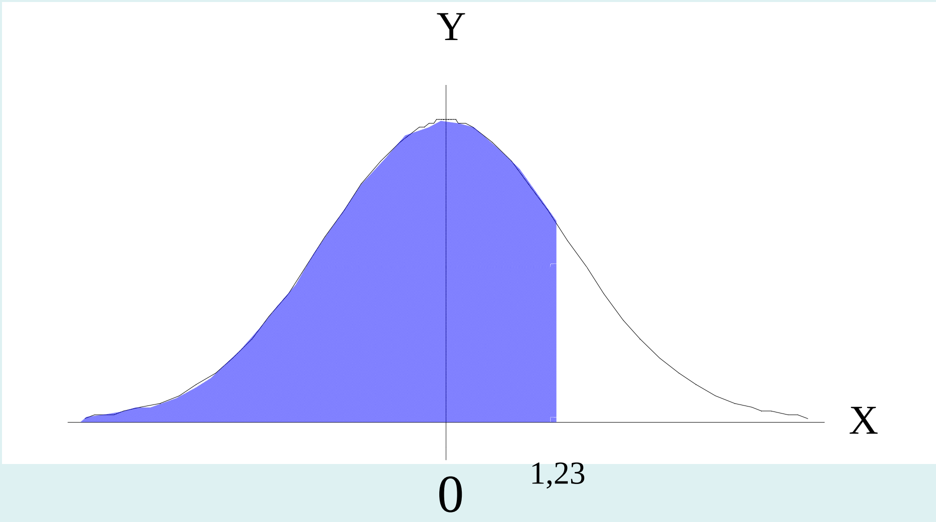
Táboas da normal N(0, 1)

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177

Manexo de táboas (I)

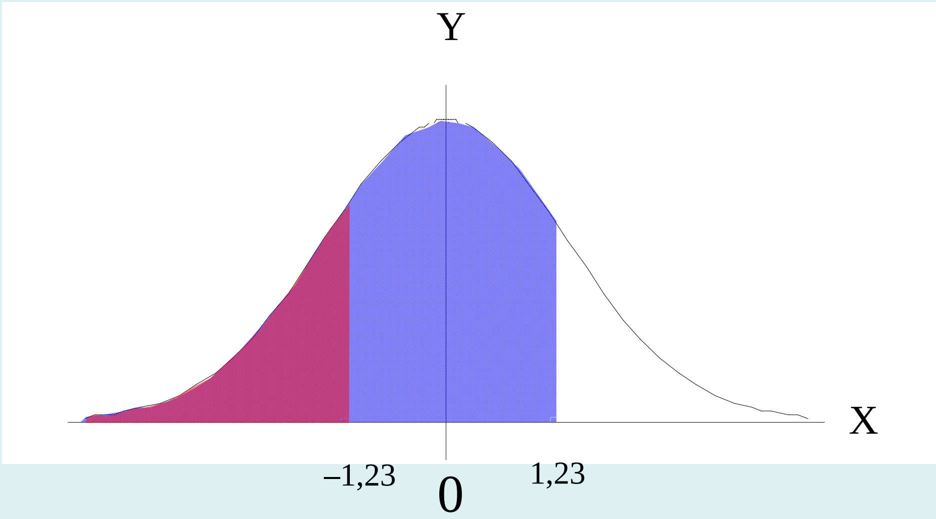
x	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	[illegible]
1,2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\boxed{0,8907}$
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082



$$p(Z \leq 1{,}23) = 0{,}8907$$

Manexo de táboas (II)

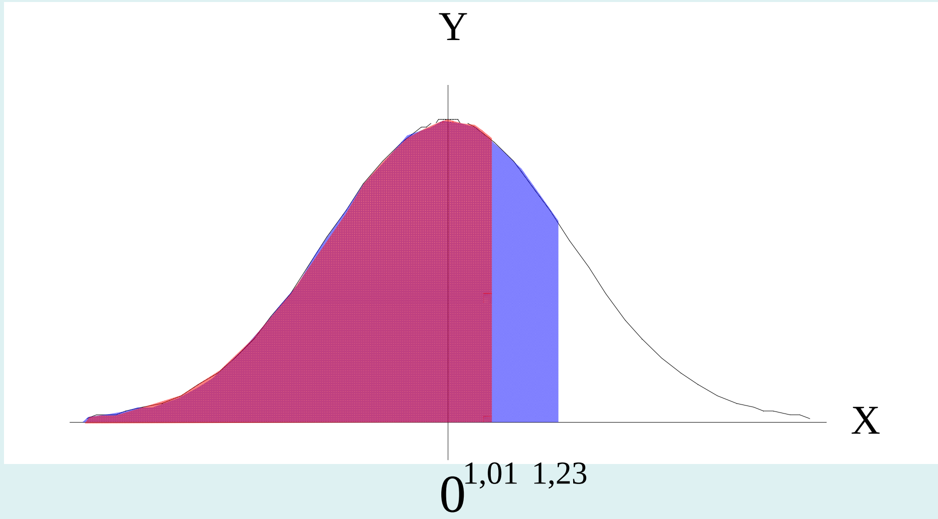
x	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	$\boxed{0,8907}$
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082



$$p(Z \le -1{,}23) = 1 - p(Z \le 1{,}23) = 1 - 0{,}8907 = 0{,}1093$$

Manexo de táboas (III)

x	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	[illegible]	0,8438	0,8461	0,8485
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708
1,2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,8907
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082

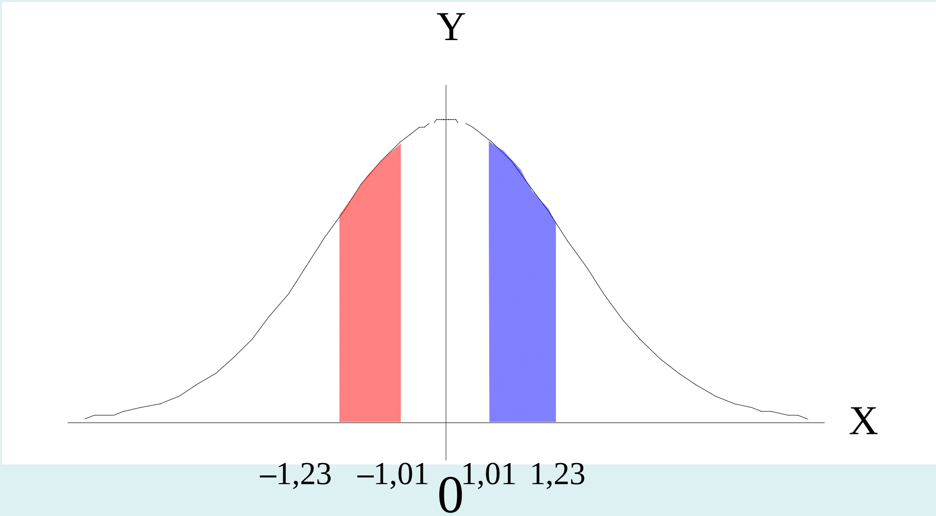


$$p(1{,}01 \leq Z \leq 1{,}23) = p(Z \leq 1{,}23) - p(Z \leq 1{,}01) =$$

$$= 0{,}8907 - 0{,}8438 = 0{,}1469$$

Manexo de táboas (IV)

x	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	[illegible]	$\boxed{0{,}8438}$	0,8461	0,8485
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708
1,2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\boxed{0{,}8907}$
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082

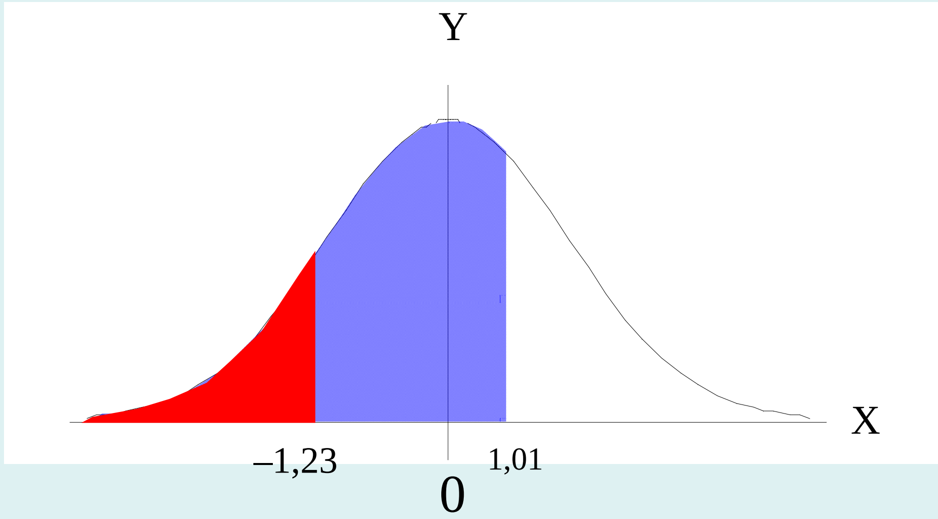


$$p(-1{,}23 \leq Z \leq -1{,}01) = p(1{,}01 \leq Z \leq 1{,}23) =$$

$$= p(Z \leq 1{,}23) - p(Z \leq 1{,}01) = 0{,}8907 - 0{,}8438 = 0{,}1469$$

Manexo de táboas (V)

x	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	[illegible]	0,8438	0,8461	0,8485
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082



$$p(-1{,}23 \le Z \le 1{,}01) = p(Z \le 1{,}01) - p(Z \le -1{,}23) =$$

$$= p(Z \le 1{,}01) - (1 - p(Z \le 1{,}23)) = 0{,}8907 - 1 + 0{,}8438 = 0{,}7345$$

Intervalo que corresponde a unha probabilidade fixada

x	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664
0,5	[illegible]	[illegible]	0,6985	0,7019
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673
0,8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,7967
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082

- Qué valor de z corresponde a $p(Z \leq z) = 0,6985$?
- Observamos que $z = 0,52$

- Qué valor de z corresponde a $p(Z \leq z) = 0,2033$?
- Observamos que $p(Z \leq -z) = 1 - 0,2033 = 0,7967$.
- Entonces $-z = 0,83$ y por tanto $z = -0,83$

Algunhas probabilidades baixo a N(μ, s)