

LÍMITES E CONTINUIDADE DUNHA FUNCIÓN

1. Límite dunha función nun punto

1.1 Idea de Límite

Sexa $y = f(x)$ unha función real. Imos ver que quere dicir expresións como x tende a a , que se escribe $x \rightarrow a$, significa que x toma valores próximos a a menores e maiores que a , pero pretos, tan próximo como desexemos. Por exemplo, $x \rightarrow 2$, significa que toma valores como: $x = 1,9$; $x = 1,99$; $x = 1,999$; ... neste caso aproximámonos ao 2 pola esquerda, e denótase como $x \rightarrow 2^-$, pero tamén podería tomar valores como $x = 2,1$; $x = 2,01$; $x = 2,001$; ... neste caso aproximámonos ao 2 pola dereita e denótase como $x \rightarrow 2^+$.

Dicir que $f(x)$ tende a l , o que se escribe como $f(x) \rightarrow l$, significa que a función $f(x)$ toma valores próximos menores e maiores que l , pero próximos.

Por exemplo, se consideramos a función $f(x) = x^2 + 1$ e quixéramos calcular o límite da función no punto 1, a idea intuitiva será calcular dúas táboas cos valores que toma a función cando nos aproximamos a 1 por a esquerda e a 1 pola dereita e obtemos:

Valores de $x \rightarrow 1^-$	0,999	0,9999	0,99999	0,999999
$f(x)$	1,998001	1,99980001	1,99998	1,999998

Valores de $x \rightarrow 1^+$	1,001	1,0001	1,00001	1,000001
$f(x)$	2,002001	2,000040002	2,000002	2,0000002

Das dúas táboas observase que ao aproximarnos a 1, por ambos lados, o valor da función aproxímase a 2, logo dirase que o valor da función preto do punto 1 é 2. Isto denótase como $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1) = 2$. A vista dos resultados definimos:

O límite da función $f(x)$ cando x tende a a é l , se a medida que x se aproxima a a , $f(x)$ se aproxima a l . Iso escríbese, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

Para que exista o límite dunha función nun punto han de existir o que se chaman, límites laterais e deberán coincidir:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l \end{cases}$$

Da situación anterior podemos deducir que o límite nese punto coincide coa imaxe da función en dito punto, o que pasará sempre que a función sexa continua nese punto. Recordamos que as funcións estudadas na unidade anterior son continuas no seu dominio. Entón, teremos problemas no cálculo de límites nos puntos onde a función non estea definida e tamén nas funcións definidas a anacos as que poden presentar problemas cos límites laterais, mentres que no resto poderemos

calcular o límite nun punto, directamente sen máis que substituír o punto na función, coma no caso anterior.

Exemplo 1

Calcula os límites no punto 1 das seguintes funcións con representación gráfica:

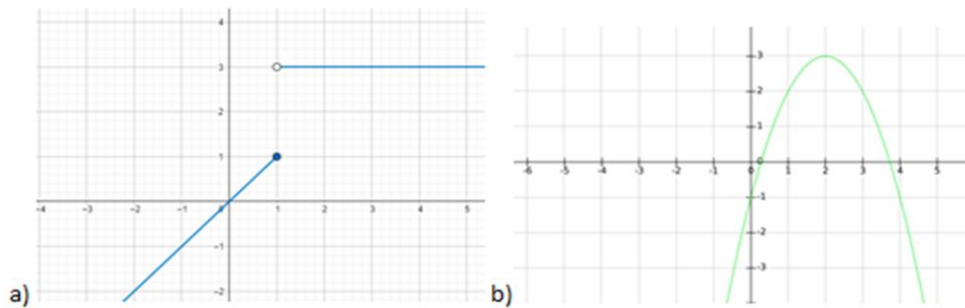


Ilustración 1: Exemplos gráficos de límites

- a) Calculamos os límites laterais no punto 1, sen máis que mirar a gráfica, aproximámonos ao punto 1 pola esquerda, as imaxes destes puntos aproxímanse a 1, se nos aproximamos ao punto 1 pola dereita, as imaxes aproxímanse a 3:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$$

polo tanto non existe o límite no punto $x=1$, xa que os límites laterais non coinciden.

- b) Neste caso ao aproximarnos pola dereita e pola esquerda obtemos o mesmo valor das imaxes deste valores:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

Exemplo 2

Consideremos a función $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 1 \\ 5 - 3x & \text{se } x > 1 \end{cases}$. Calculemos o límite no punto $x=1$.

Para calcular o límite en $x=1$, debemos calcular o límite segundo nos aproximemos pola dereita ou pola esquerda nunha función diferente, sen máis que substituír o valor de x na función correspóndete, xa que son dúas funcións continuas:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 2) = 3 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (5 - 3x) = 2$$

Polo tanto o $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ non existe, os límites laterais non coinciden.

1.2 Cálculo de límites sinxelos nun punto

En xeral para calcular o límite nun punto chegará con substituír o valor da x na expresión polo valor que desexemos. Pero as veces atoparémonos co que chamamos indeterminacións, cando aparece unha indeterminación ao calcular un límite, terase que facer diferentes operacións, ata que esta desapareza. Hai sete indeterminacións, que son as seguintes:

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty \cdot 0, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

Non serán indeterminacións:

$$\infty + \infty = \infty, \quad \infty \cdot \infty = \infty, \quad \frac{0}{k} = 0, \quad \frac{\infty}{0} = \infty, \quad \frac{k}{0} = \infty, \quad \infty^\infty = \infty, \quad \frac{k}{\infty} = 0$$

As regras prácticas a hora de calcular os límites nun punto serán:

Límites de funcións polinómicas: están definidas en todo $\mathbb{R}$, son funcións continuas, para calcular o límite nun punto calcularemos o valor numérico nese punto.

$$\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

Límites de funcións racionais: están definidas en todo $\mathbb{R}$ salvo nos puntos que anulan o denominador, neste puntos para calcular o límite atoparemos dúas situacións:

- Límite nunha raíz do numerador e do denominador, neste caso obteremos unha indeterminación, que poderase evitar, simplificando a expresión. Para elo deberemos factorizar a fracción alxébrica e simplificala.
- Límite nunha raíz só do denominador, neste caso o límite é $+\infty$ ou $-\infty$, e polo xeral será distinto pola dereita e pola esquerda do punto, polo que deberase calcular os límites laterais e observar os resultados.

Límites de funcións irracionais: Cando o índice é par soamente están definidas nos valores para os cales o radicando é positivo, polo tanto ao calcular o límite nun extremo do dominio soamente ten sentido un límite lateral. Cando o que temos son límites con operacións de radicais é moi útil multiplicar e dividir pola súa expresión conxugada, no caso que o límite sexa indeterminado.

Vexamos diferentes exemplos para comprender o procedemento:

Exemplos

Calcula os seguintes límites, recordar primeiro substituímos e segundo o resultados aplicamos o recollido neste apartado:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1) = 1^3 - 1 = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{x^2-2x} \right) = \frac{0}{0}$ IND desaparece a indeterminación simplificando, descompoñemos o denominador:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{x-2}}{x(\cancel{x-2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = 1/2$$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{e^x} = \frac{\cos 0}{e^0} = 1$

- d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-5}{x-3} = \frac{1}{0} = ?$ entón, o límite non existe, non se pode dividir entre cero. Pasamos analizar os límites laterais, temos que estudar o signo da expresión, para valores próximo a 3 pola esquerda e próximo a 3 pola dereita:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-5}{x-3} = \left(\frac{+}{-} \right) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-5}{x-3} = \left(\frac{+}{+} \right) = +\infty$$

A vista dos resultados obtidos podemos concluír que o límite non existe, xa que non coinciden os límites laterais.

- e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} = \frac{0}{0} = IND$ Neste caso non se pode aplicar Ruffini para factorizalo. O que funciona nestas situacións, por ter radicais, é multiplicar e dividir a fracción pola expresión conxugada do denominador, recordar que o conxugado dunha expresión sumando é a mesma pero restando e viceversa.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7})^2 - 9} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(\sqrt{x+7}+3)}{\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+7}+3) = 3+3 = 6$$

- f) Límite de $f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se } x \leq -1 \\ \frac{x-2}{x^2-4} & \text{se } x > -1 \end{cases}$ no punto $x = -1$

Por ser unha función a anacos e ter que calcular o límite no punto de cambio de definición, temos que calcular os límites laterais nas funcións indicadas:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+3) = 2 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-2}{x^2-4} = 1$$

Non coinciden polo tanto non existe o límite $\nexists \lim_{x \rightarrow -1} f(x)!!$

2. Límites no infinito

2.1 Idea de Límite no infinito

O concepto de $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ é o mesmo que o límite nun punto é o valor ao que tenderá a función nun caso cando x crece indefinidamente e noutro cando x decrece indefinidamente. Graficamente este concepto é moi sinxelo de entender e calcular, temos que observar soamente a gráfica, como veremos no seguinte exemplo.

Exemplo

Dada a seguinte gráfica calcula os límites infinitos:

Mirando a gráfica podemos observar:

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ a gráfica cando aumenta a x a coordenada y tamén o fai indefinidamente.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ a gráfica cando x diminúe a y aproximase cada vez máis a cero.

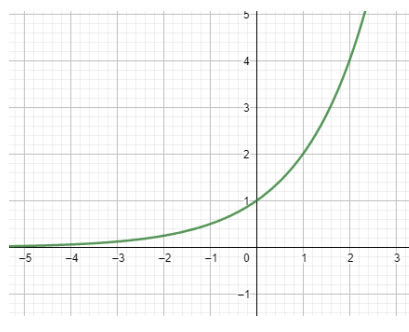


Ilustración 2: Límites no infinito

2.2 Cálculo de límites no infinito

As regras prácticas a hora de calcular os límites no infinito serán:

Límites de funcións polinómicas: O límite dun polinomio será $\pm\infty$ dependendo do signo do termo de maior grao, xa que o resto dos termos son moi pequenos e os podemos desprezar.

Límite de cociente de polinomios: Este límite sempre nos da unha indeterminación ∞/∞ e aplicárase a seguinte regra:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{se } n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{se } n = m \\ \pm\infty & \text{se } n > m; +\infty \text{ se } \frac{a_n}{b_m} > 0 \text{ e } -\infty \text{ se } \frac{a_n}{b_m} < 0 \end{cases}$$

Sendo n e m o grao dos polinomios. No caso de $n > m$ o signo do infinito dependerá dos signos dos coeficientes principais, se son os dous positivos ou negativos o resultado será positivo, se teñen distinto signo será negativo. Este mesmo procedemento pódese aplicar incluso cando non son polinomios o numerador e o denominador. Por exemplo $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4+3x+2x}}{3x^2-5x+1}$, neste caso teñen o mesmo grao o numerador e o denominador.

Límites de funcións irracionais: Cando o índice é par, pode que algún dos límites no infinito ou os dous non existan por non estar definida para valores moi grandes ou moi pequenos.

Límites de operacións coas funcións: neste casos previamente deberemos realizar as operacións indicadas, para evitar a indeterminación. Cando temos radicais, é moi útil multiplicar e dividir pola súa expresión conxugada.

Para o cálculo do límite cando $x \rightarrow -\infty$ se fose necesario pódese facer a transformación $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(-x)$.

Vexamos as diferentes situacións con exemplos.

Exemplos

Calcula os seguintes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} 2x^2 - 1 \quad b) \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^3 - 2x + 1 \quad c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2}{x + 1} \quad d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2}{x^2 + 1}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \quad f) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 - x} \quad g) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} - \sqrt{x} \quad h) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \frac{x^2}{x+2} \right)$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 3x} + 2x}{3x^2 - 5x + 1} \quad j) \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3 + 2x^2)$$

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - 1) = \infty^2 = \infty, \text{ función polinómica de grado e coeficiente principal positivo}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 - 2x + 1) = -(-\infty)^3 = -(-\infty) = \infty, \text{ función polinómica de grado tres e coeficiente principal negativo.}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2}{x + 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND aplicamos a regra, grado do numerador maior } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2}{x + 1} = \infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND}$$

$$\text{aplicamos a regra, grado do demoninador igual que o numerador } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2}{x^2 + 1} = 2$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND aplicamos a regra } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ grado do denominador maior.}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 - x} = \nexists \text{ non está definida para valores maiores ca 1}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} - \sqrt{x} = \infty - \infty = \text{IND multiplicamos e dividimos polo conxugado}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x})}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - x}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - \frac{x^2}{x+2} \right) = \infty - \infty \text{ operamos realizamos m.c.m } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x+2} = 2$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 3x} + 2x}{3x^2 - 5x + 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ aplicamos tamén o criterio de cociente entre polinomios, a expresión polinómica do numerador ten grado dous e o denominador tamén, como teñen o mesmo grado cociente de coeficientes.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 3x} + 2x}{3x^2 - 5x + 1} = 1/3$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \infty} (-x^3 + 2x^2) = (-\infty)^3 = -\infty$$

Función polinómica de grado tres de coeficiente principal negativo.

3. Continuidade

Unha función é continua cando a súa gráfica pódese debuxar sen levantar o lapis do papel, isto é, podemos debuxar nun só trazo. Unha función é descontinua nun punto se a gráfica da función se “rompe” en dito punto. A estas posibles “roturas” que poderá ter unha gráfica é o que chamaremos descontinuidades.

Se utilizamos a ilustración 1, para ver este novo concepto graficamente, podemos observar que:

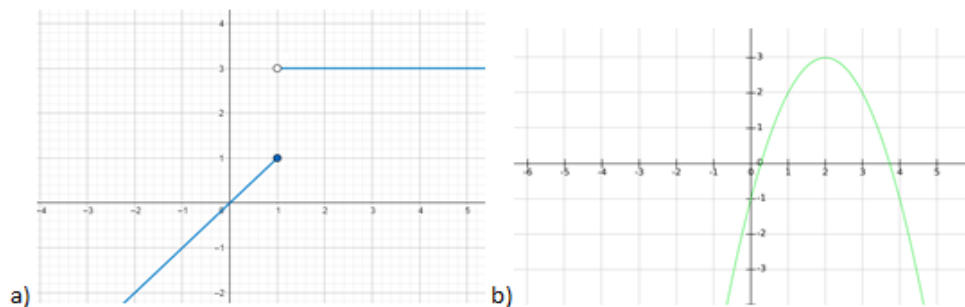


Ilustración 3: Exemplos gráficos de límites

Na función a) temos unha rotura no punto $x=1$, polo tanto a función non é continua se non que é descontinua nese punto. Pero a gráfica da función b) representa unha función continua en todos os puntos, xa que non “rompe” en ningún punto.

Tendo presente que na gráfica a) o límite da función no punto $x=1$ non existía, podemos sospeitar que a idea de límite vai a estar relacionada co de continuidade.

3.1 Continuidade dunha función nun punto

Sexa unha función f definida nun entorno de $x = a$, dicimos que a función $f(x)$ é continua no punto $x = a$ se verifica que :

- Existe $f(a)$
- Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ o que implica, que existen e coinciden os límites laterais.
- E ademais $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

Se non se cumpre algunha das condicións anteriores dicimos que a función presenta unha descontinuidade nese punto. Unha función é continua nun intervalo se é continua en todos os puntos.

Continuidade das funcións elementais:

- As funcións polinómicas son continuas en todo o seu dominio, $\mathbb{R}$.
- As funcións racionais non son continuas nos puntos que anulan o denominador.
- As funcións exponenciais son continuas en todo o seu dominio, $\mathbb{R}$.
- As funcións con radicais de índice impar son continuas en todo $\mathbb{R}$, as de índice par non existen para valores que fagan o radicando negativo, pero son continuas no seu dominio.
- As logarítmicas non son continuas nos puntos que fan o logaritmo cero ou negativo.

Exemplo

Estuda a continuidade da seguinte función nos puntos que corresponda:

$$f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{se } x \leq 2 \\ -3x + 10 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Neste exemplo temos unha función a anacos formada por dúas funcións continuas, unha exponencial e outra polinómica, polo que soamente deberase estudar a continuidade no punto $x=2$, onde poderá ter algún problema, xa que por separado as funcións son continuas.

1. Calculamos a imaxe $f(2) = 2^2 = 4$

2. Calculamos o límite, deberemos calcular os límite laterais: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (-3x + 10) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} 2^x = 4$$

Polo tanto o $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

3. Como a imaxe e o límite coinciden $f(x)$ é continua no punto $x=2$ e polo tanto en todo $\mathbb{R}$

De feito se intentamos facer a súa gráfica podemos observar a continuidade en todo $\mathbb{R}$

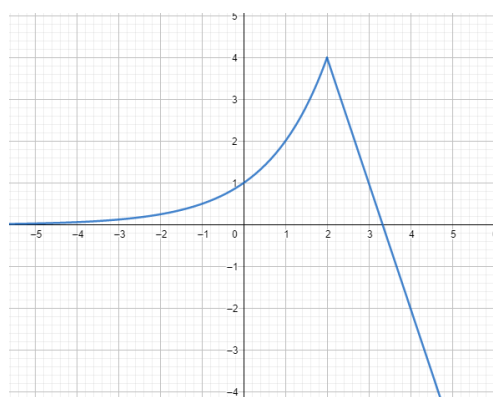


Ilustración 4: Continuidade

3.2 Tipos de discontinuidades

Existen tres tipos de discontinuidades:

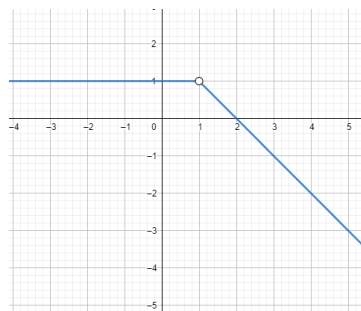
- **Descontinuidade evitable:** Unha discontinuidade en $x = a$ dise evitable, se existe e é finito o límite da función en a , pero ocorre unha destas dúas condicións:
 - O límite non coinciden coa imaxe $f(a) \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
 - A función non está definida nese punto.
- **Descontinuidade de salto finito:** Unha discontinuidade en $x = a$ é de salto finito se existen os límites laterais pero non coinciden, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, pero son finitos. Chámase lonxitude do salto a diferenza entre os dous límites.

- **Descontinuidade de salto infinito:** Unha descontinuidade en $x=a$ é de salto infinito cando un ou os dous límites laterais son infinitos; $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$

Exemplo gráfico dunha descontinuidade evitable

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 1 \\ -x + 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

A gráfica desta función a anacos que ademais non está definida para o punto $x=1$, se a representamos temos:

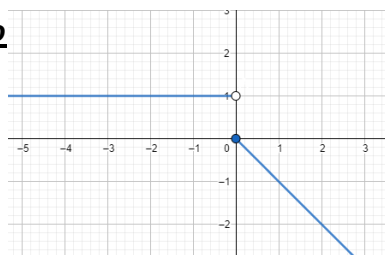
*Ilustración 5: Descontinuidade evitable*

Observamos a función “rompe” no punto $x=1$, neste caso o límite existe e vale 1, pero a función non está definida no punto 1. Temos $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ pero $\nexists f(1)$. Isto fai que a función sexa descontinua nese punto, e dise evitable xa que se pode evitar simplemente redefinindo a función.

Exemplo gráfico dunha descontinuidade de salto finito

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ -x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

A gráfica desta función a anacos é a seguinte:

*Ilustración 6: Descontinuidade de salto*

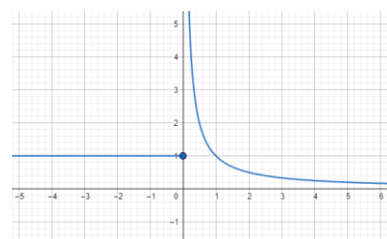
Observamos que neste caso para debuxala temos que levantar a man no punto $x=0$, estudamos nese punto a imaxe e o límite. Os límites laterais existe:

$\lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$. Non coinciden así que non existe o límite. Isto fai que a función sexa descontinua no cero e presente unha descontinuidade de salto. Chámase lonxitude do salto a diferenza entre os límites laterais, que neste caso, é 1.

Exemplo gráfico dunha descontinuidade de salto infinito

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

A gráfica desta función é a seguinte:

*Ilustración 7: Descontinuidade de salto infinito*

Neste caso o punto onde “rompe” é no punto $x=0$, e estudamos os límites laterais e a súa imaxe: $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x = \infty$. Polo tanto o límite non existe. Neste caso tamén hai un salto, pero de lonxitude infinita, por iso o nome da descontinuidade.

Nos dous últimos exemplos non é relevante que exista ou non a función no punto.

Para estudar a continuidade dunha función non é preciso ter a gráfica, vexamos un exemplo de estudo de continuidade sen o debuxo.

Exemplo

Estuda a continuidade desta función e clasifica os puntos de descontinuidade:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x \leq -1 \\ \frac{x-2}{x^2-4} & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

A función pode presentar puntos de descontinuidade nos puntos de cambio de definición, por ser unha función a anacos e nos puntos que anulan o denominador da función racional, polo tanto estes puntos son $x = -1$ e $x = \pm 2$, nos demais puntos é continua.

Estudamos a continuidade en $x=-2$

Existe $f(-2) = 1$

Calculamos o límite: $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x + 3) = 1$

Coinciden polo tanto continua en $x = -2$

Estudamos a continuidade en $x=-1$

Existe $f(1) = 2$

Calculamos o límite neste caso deberemos calcular os límites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x + 3) = 2 ; \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-2}{x^2-4} = 1$$

Como $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, os límites laterais existen pero non coinciden, descontinuidade de salto finito.

Estudamos a continuidade en $x=2$

Neste caso $f(2)$ non existe

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{0}{0} \text{ IND } \text{ descompoñemos } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)} = 1/4$$

Como $\nexists f(2)$ pero si $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ descontinuidade evitable.

4. Asíntotas

Xa vimos na unidade de funcións o concepto de asíntota “recta ao cal a función se aproxima indefinidamente sen chegar a tocarse”. As asíntotas son moi útiles para debuxar unha gráfica con precisión. Existen diferentes tipos de asíntotas: horizontais, verticais e oblicuas, vexamos como se calculan.

Asíntotas Horizontais

Unha función ten unha asíntota horizontal en $y = k, k \in \mathbb{R}$, cando un dos límites no infinito ou no menos infinito ou os dous tenden a k . Isto é $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$

Exemplo

Calcula a asíntota horizontal de $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2-3x}$

Calculamos o $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{x^2-3x} = 2$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-3x} = 2$; ambos límites toman o valor dous xa que teñen o mesmo grado numerador e denominador, polo tanto o resultado é o cociente dos coeficientes principais.

Temos unha asíntota en $y = 2$

Asíntotas Verticais

As asíntotas verticais prodúcense nos puntos nos que hai descontinuidade de salto infinito. É dicir, para que unha función teña unha asíntota vertical en $x = a$, é preciso, que polo menos un dos seus límites laterais sexa infinito ou o $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$. Neste curso para o estudo das asíntotas centrámonos nas función polinómicas e racionais, as polinómicas non teñen asíntotas e as racionais poden telas ou non. Para comprobar se existen asíntotas verticais nas funcións racionais, calcularemos os límites naqueles puntos que anulen o denominador.

Exemplo

Calcula as asíntotas verticais da función $f(x) = \frac{1-x}{x-2}$

Determinamos as raíces do denominador, son os posibles puntos onde a función poderá ter unha asíntota vertical, e logo comprobamos se o límite da función nese punto da $+\infty$ ou $-\infty$. Igualamos o denominador a cero: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1-x}{x-2} = \frac{-1}{0} = ? +\infty$ ou $-\infty$, precisamos estudar os límites laterais para concretar e nos dará a posición da gráfica con respecto a asíntota.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1-x}{x-2} = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-x}{x-2} = -\infty$$

Temos unha asíntota vertical en $x=2$ a posición da gráfica será:

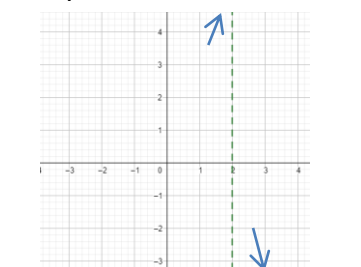


Ilustración 8: Asíntota vertical

Asíntotas Oblicuas

Unha asíntota oblicua é unha recta da forma $y = mx + n$, con $m \neq 0$, para calcular determinar a asíntota temos que calcular os valores de n e m: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = n$

Exemplo

Calcula a asíntota oblicua de $f(x) = \frac{2x^2-1}{x+1}$

Debemos calcular os valores de m e n:

Calculamos $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2-1}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-1}{x^2+x} = 2 \Rightarrow m = 2$ (mesmo grado)

Calculamos $n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2-1}{x+1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x-1}{x+1} = -2$ (mesmo grado)

Polo tanto temos unha asíntota oblicua en $y = 2x - 2$

Observación: Se unha función ten asíntota horizontal non ten oblicua e viceversa.

O estudo da posición da gráfica respecto as súas asíntotas pode ser moi útil a hora de facer a súa representación. No caso das asíntotas verticais isto faise co estudo dos límites laterais, e no caso das asíntotas horizontais e oblicuas faise co estudo do signo de $(f(x) - \text{ecuación da asíntota})$ cando $x \rightarrow \infty$ e $x \rightarrow -\infty$.

5. Recursos informáticos

Todos os gráficos desta unidade están realizados co programa GeoGebra. Como xa mencionamos en unidades anteriores é un programa sinxelo de manexar, onde podemos representar calquera tipo defuncións. Ademais de calcular límites de funcións sen máis que usar os comandos Límite que podemos atopar na calculadora do programa, teremos que introducir a función e o punto onde queremos calcular o límite.

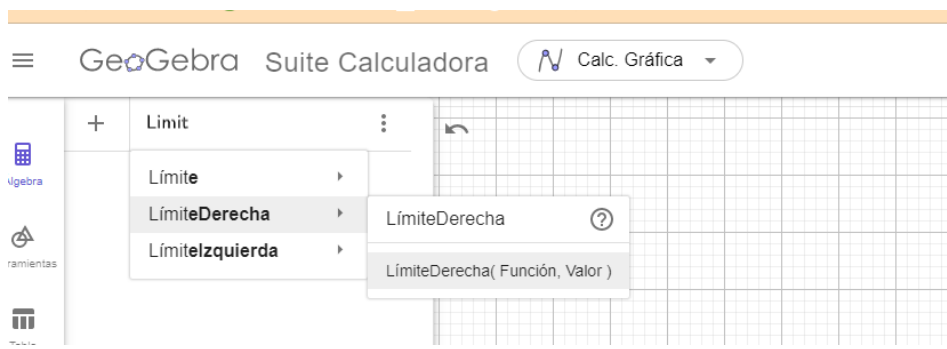


Ilustración 9: Programa GeoGebra

Licenzas das ilustracións

Ilustración	Recurso
Ilustración 1. Exemplo gráficos de límites	Autoría: Propia
Ilustración 2. Limite no infinito.	Autoría: Propia
Ilustración 3. Exemplo gráficos de límites	Autoría: Propia
Ilustración 4: Continuidade	Autoría: Propia
Ilustración 5: Descontinuidade evitable	Autoría: Propia
Ilustración 6: Descontinuidade de salto	Autoría: Propia
Ilustración 7: Descontinuidade de salto infinito	Autoría: Propia
Ilustración 8: Asíntota vertical	Autoría: Propia
Ilustración 9: Programa Geogebra	Autoría: Propia