

LÍMITES E CONTINUIDADE DUNHA FUNCIÓN

Exercicios autoavaliables

1. Calcula os seguintes límites nun punto indicado:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{x^2 - 9}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x - 1}{x + 2}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 6} - 3}{x - 3}$

2. Calcula os seguintes límites no infinito:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 3}{4x - 5}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{2x + 1} - \frac{x^3}{x^2 + 1} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - x^3}{x^3 - 1}$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 3}$

3. Estuda a continuidade e determina os tipos de descontinuidade da seguinte función, e fai a súa representación:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x + 3} & \text{se } x \leq 0 \\ -x^2 + 14 & \text{se } 0 < x \leq 3 \\ \sqrt{x^2 + 16} & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

4. Calcula as asíntotas e a posición da curva respecto a elas:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 3}$$

5. Estuda a descontinuidade das seguintes funcións

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \leq 1 \\ 3x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x \leq -1 \\ \frac{x - 2}{x^2 - 4} & \text{se } x > -1 \end{cases}$

6. Calcula o valor de K para que a función seguinte sexa continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{se } x < 2 \\ kx + 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$



Solucións

1. Calcula os seguintes límites nun punto indicado:

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} \quad b) \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{x^2 - 9}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x - 1}{x + 2} \quad d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 6} - 3}{x - 3}$$

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{0}{0}$ IND factorizamos os polinomios, para reducir a expresión:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} x - 1 = -2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{(-3)^2 - 9} = 0$$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x - 1}{x + 2} = \pm\infty$, calculamos os límites laterais

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2x - 1}{x + 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{2x - 1}{x + 2} = +\infty$$

Polo tanto o límite non existe, xa que os límites laterais non coinciden

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \frac{0}{0}$ IND factorizamos os polinomios e simplificamos a expresión:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} = 2/3$$

e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 6} - 3}{x - 3} = \frac{0}{0}$ IND multiplicamos e dividimos polo conxugado:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x + 6} - 3)(\sqrt{x + 6} + 3)}{(x - 3)(\sqrt{x + 6} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 6 - 9}{(x - 3)(\sqrt{x + 6} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{(x - 3)(\sqrt{x + 6} + 3)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(\sqrt{x + 6} + 3)} = 1/6$$

2. Calcula os seguintes límites no infinito:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 3}{4x - 5}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{2x + 1} - \frac{x^3}{x^2 + 1} \right)$
c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - x^3}{x^3 - 1}$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 3}$

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 3}{4x - 5} = \infty$, aplicando a regra dos grados dos polinomios.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{2x + 1} - \frac{x^3}{x^2 + 1} \right) = \infty - \infty$ IND operamos $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + 2x^2 - 2x^4 - x^3}{(2x + 1)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^3 + 2x^2}{2x^3 + x^2 + 2x + 1} =$
 $= -1/2$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - x^3}{x^3 - 1} = -1$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 3} = \infty - \infty$ IND multiplicamos e dividimos polo conxugado

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 3})(\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 3})}{(\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 3})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{(\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 - 3})} = 0$

3. Estuda a continuidade e determina os tipos de descontinuidade da seguinte función, e fai a súa representación:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & \text{se } x \leq 0 \\ -x^2 + 14 & \text{se } 0 < x \leq 3 \\ \sqrt{x^2 + 16} & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

1º Estudaremos a continuidade das distintas funcións no intervalo no que están definidas.

- Se $x \leq 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x+3}$ é unha función racional non definida para $x = -3$. A función ten unha asíntota vertical neste punto $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x+3} = \infty$, polo tanto ten unha descontinuidade de salto infinito no punto -3.
- Se $0 < x \leq 3 \Rightarrow f(x) = -x^2 + 14$ é unha función polinómica polo tanto continua.
- Se $x > 3 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$ é unha función de índice par, non estará definida cando o radicando sexa negativo, pero $x^2 + 16$ sempre é positivo.

2º Estudaremos a continuidade nos puntos onde cambia a definición.

En $x=0 \Rightarrow$

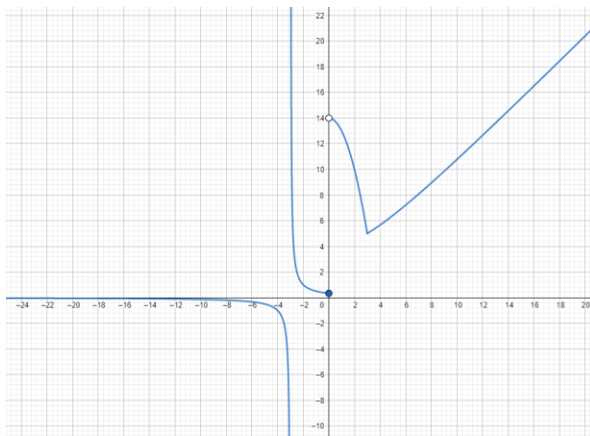
- Existe $f(0) = \frac{1}{3}$
- Existe o límite: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3}$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} -x^2 + 14 = 14$, non existe os límites laterais non coinciden.
- Polo tanto descontinuidade de salto finito porque existe a imaxe, existen os límites laterais pero non coinciden.



En $x=3 \Rightarrow$

- Existe $f(3) = 5$
- Existe o límite: $\lim_{x \rightarrow 3^-} -x^2 + 14 = 5 \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x^2 + 16} = 5$
- Existe o límite e coincide coa imaxe polo tanto a función é continua no punto $x=3$

Representala é un anaco de hipérbole, será preciso calcular as súas asíntotas, outro de parábola, será preciso calcular o vértice e por último unha rama de parábola.



4. Calcula as asíntotas e a posición da curva respecto a elas:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 3}$$

Asíntota Vertical:

Ten unha asíntota vertical $x=3$ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+1}{x-3} = \infty$ para o estudo da posición estudamos os límites laterais :

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 1}{x - 3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 1}{x - 3} = \infty$$

Asíntota horizontal:

Non ten unha asíntota horizontal xa que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x - 3} = \infty$$

Asíntota oblicua:

Calculamos $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+1}{x-3}}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x-3} - 1x \right) = 3$$

Polo tanto a asíntota é $y = x + 3$

Para estudar a posición da asíntota e a curva estudamos o signo de $f(x)$ -asíntota $= \frac{10}{x-3}$

Estudamos os signo cando $x \rightarrow \infty$ danos positivo a gráfica vai por enriba da asíntota oblicua.
Estudamos o signo cando $x \rightarrow -\infty$ danos negativo a gráfica vai por debaixo da asíntota oblicua.

5. Estuda a descontinuidade das seguintes funcións

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{se } x \leq 1 \\ 3x - 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x \leq -1 \\ \frac{x-2}{x^2-4} & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

a) Temos que estudar a descontinuidade no punto $x=1$, xa que é unha función a anacos, formada por unha anaco de parábola, función continua e un anaco de recta, función continua.

$$1^\circ f(1) = -1$$

2º $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ estudaremos os límites laterais

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - 2x = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} 3x - 1 = 2$$

Non existe o límite polo tanto descontinuidade de salto finita.

b) Temos que estudar a continuidade das diferentes funcións: una anaco dunha función polinómica é continua, e o outro é unha función racional, problemas no denominador, anúlase no $x=2$ e $x=-2$. Tamén estudaremos a descontinuidade nos puntos onde cambia a definición $x=-1$.

En $x=2$

- A imaxe $f(2) = \nexists$
- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{0}{0}$ IND simplificamos $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x+2} = 1/4$
- Existe o límite pero non coincide ca imaxe, descontinuidade evitable no punto $x=2$

En $x=-1$

- $f(-1) = 2$
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} x + 3 = 2 \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-2}{x^2-4} = 1$
- Non existe o límite pero si os laterais e son finitos, descontinuidade de salto finito

6. Calcula o valor de K para que a función seguinte sexa continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{se } x < 2 \\ kx + 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

É unha función a anacos, formada por funcións continuas, polo tanto o problema está no punto $x=1$ onde cambia a definición. Estudaremos a continuidade no punto $x=1$

$$1^\circ \text{ A imaxe } f(2) = 2k+1$$

2º O límite $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ teremos que calcular os límites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 9 = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} kx + 1 = 2k + 1$$

Como deberán coincidir os límites laterais $2k + 1 = -5 \Rightarrow k = -3$

Así a función é continua, coinciden o límite e a imaxe a o valor de $k=-3$