

LÍMITES E CONTINUIDADE DUNHA FUNCIÓN

Exercicios autoavaliables

1. Estuda os límites laterais da función $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, utilizando para iso as táboas de valores á esquerda e á dereita de 3.

2. Sexa a función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Debuxa a gráfica e calcula os límites da función nos puntos $x=0$ e $x=1$.

3. Calcula os seguintes límites nun punto indicado:

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + x - 6}$ b) $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{x+3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 3x}$ d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(x-2)^2}$

4. Calcula os seguintes límites no infinito:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x^2-3}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2-1}{2x} - \frac{x^2-x+3}{x} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5-4x^3}{2x^3+3x-1}$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2+2x} - x$

5. Debuxa a seguinte función e estuda a súa continuidade

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{se } x > -1 \\ |x+3| & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

6. Calcula as asíntotas e a posición da curva respecto a elas

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$$

7. Estuda a descontinuidade das seguintes funcións:

a) $f(x) = \begin{cases} 5-x^2 & \text{se } x \neq 3 \\ 2 & \text{se } x = 3 \end{cases}$ b) $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$

8. Calcula o valor de K para que a función seguinte sexa continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + kx - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2^x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$



9. Os ingresos diarios dun fabricante de calzado deportivo tras o lanzamento dun novo modelo de zapatillas ven dado pola función: $f(x) = \frac{750x+3500}{x}$.

Onde x representa o número de días transcorridos dende o lanzamento do novo modelo e os ingresos, $f(x)$, exprésanse en miles euros. Calcula:

- a) Os ingresos transcorridos 50 días e transcorrido un ano.
- b) Aumentarán os ingreso indefinidamente co paso do tempo?

10. Calcula o valor de a e b para que a seguinte función sexa continua en todos os números reais:

$$f(x) = \begin{cases} -ax - 3 & \text{se } x \leq -1 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{se } -1 < x < 4 \\ bx - 11 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

Solucións

1. Estuda os límites laterais da función $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, utilizando para iso as táboas de valores á esquerda e á dereita de 3.

Límites laterais da función $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ en $x=3$. Facemos dúas táboas de valores, pola esquerda do 3 e pola dereita do 3.

Valores de $x \rightarrow 3^-$	2,8	2,9	2,99	2,9999
$f(x)$	5,8	5,9	5,99	5,9999

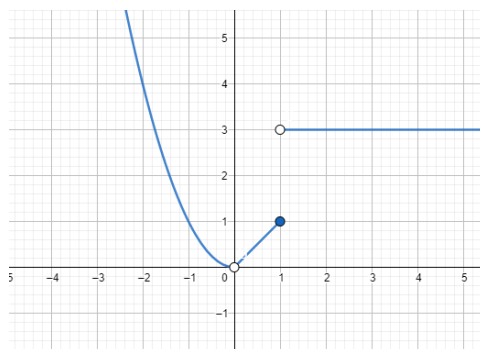
Valores de $x \rightarrow 3^+$	3,2	3,1	3,01	3,0001
$f(x)$	6,2	6,1	6,01	6,0001

Observamos que os límites laterais $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6 = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ polo tanto o límite da función tamén será 6.

2. Sexa a función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Debuxa a gráfica e calcula os límites da función nos puntos $x=0$ e $x=1$.

Temos que debuxar unha función a anacos, neste caso son un anaco de parábola, unha función de proporcionalidade, isto é unha recta e unha función constante, paralela ao eixo X. Podemos observar que no punto $x=0$ a función non está definida, nese punto teremos un oco.



Calculamos os límites:

En $x=0$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$; os límites laterais existen e coincide o límite no punto $x=0$ vale:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

En $x=1$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ Límites laterais existen pero non coinciden. Polo tanto o límite non existe.



É importante destacar que non importa que a función estea ou non definida no punto para calcular o límite, porque simplemente preocupa o número ao que a gráfica se aproxima, chegue ou non chegue.

3. Calcula os seguintes límites nun punto indicado:

$$a) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + x - 6} \quad b) \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{x + 3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 3x} \quad d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)^2}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + x - 6} = \frac{0}{0} \text{ IND} \Rightarrow \text{teremos que simplificar a expresión } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x+1)}{(x+3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+1}{x-2} = 2/5$$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{x + 3} =$ Neste punto só existe pola dereita pola esquerda non está definida a función xa que é unha función con raíces de índice par.

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \sqrt{x + 3} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 3x} = \frac{0}{0} \text{ IND} \Rightarrow \text{teremos que simplificar a fracción} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-3)}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)^2} = \frac{0}{0} \text{ IND} \Rightarrow \text{teremos que simplificar a fracción} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{x - 2} = \frac{4}{0} = \infty$$

4. Calcula os seguintes límites no infinito:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 1}{2x^2 - 3} \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{2x} - \frac{x^2 - x + 3}{x} \right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - 4x^3}{2x^3 + 3x - 1} \quad d) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x$$

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x^2-3} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} \Rightarrow \text{Aplicamos a regra, tendo en conta os expoñentes} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x^2-3} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{2x} - \frac{x^2 - x + 3}{x} \right) = \infty - \infty \text{ IND} \Rightarrow \text{realizamos as operacións}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1 - 2x^2 + 2x - 6}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 7}{2x} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - 4x^3}{2x^3 + 3x - 1} = \frac{\infty}{\infty} = -2 \Rightarrow \text{teñen o mesmo grado, se miramos a regra cociente de coeficientes principais.}$$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2x} - x = \infty - \infty$ IND por ter raíces multiplicamos e dividimos polo conxugado

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - x)(\sqrt{x^2 + 2x} + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x} = 1$$

5. Debuxa a seguinte función e estuda a súa continuidade

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{se } x > -1 \\ |x + 3| & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

En primeiro lugar descompoñemos a función valor absoluto:

$$|x + 3| = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x + 3 \geq 0 \\ -x - 3 & \text{se } x + 3 < 0 \end{cases} \quad |x + 3| = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x \geq -3 \\ -x - 3 & \text{se } x < -3 \end{cases}$$

A función quedáanos:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 3 & \text{se } x < -3 \\ x + 3 & \text{se } -3 \leq x \leq -1 \\ -x^2 + 4 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

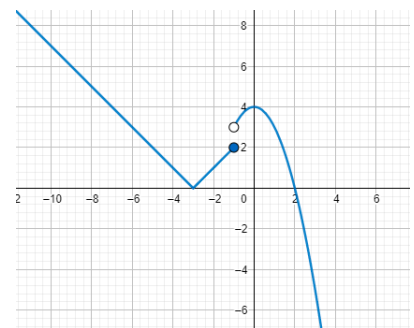
A gráfica está formada por dous anacos de rectas e outro anaco de parábola, para facer o debuxo nas rectas dous valores e na parábola calculamos o vértice (0,4) e logo calculamos a imaxe dos puntos onde cambia a definición da función.

Observamos que a función é continua en todos os números reais salvo no -1, onde pola gráfica podemos dicir que temos unha descontinuidades de salto finito, verifiquémolo alxebricamente.

$$f(-1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} x + 3 = 2 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} -x^2 + 4 = 3$$

Polo tanto non coinciden os límites laterais, pero existen e son finitos.



6. Calcula as asíntotas e a posición da curva respecto a elas:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

Asíntota Vertical:

Ten unha asíntota vertical $x = -1$ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \infty$ para o estudo da posición estudamos os límites laterais :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = -\infty \text{ A gráfica aproxímase a asíntota polo } -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \infty \text{ A gráfica aproxímase a asíntota polo } +\infty$$

Asíntota horizontal:

Non ten unha asíntota horizontal xa que o límite non é un número real.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x + 1} = \infty$$

Asíntota oblicua:

Calculamos $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+1}{x+1}}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - 1x \right) = -1$$

Polo tanto a asíntota é $y = x - 1$

$$\text{Estudar a súa posición facemos: } \frac{x^2+1}{x+1} - (x-1) = \frac{x^2+1-(x^2-1)}{x+1} = \frac{2}{x+1}$$

Estudamos os signo cando $x \rightarrow \infty$ danos positivo $\Rightarrow f(x)$, a gráfica vai por enriba da asíntota oblicua.

Estudamos o signo cando $x \rightarrow -\infty$ danos negativo $\Rightarrow f(x)$, a gráfica vai por debaixo da asíntota oblicua.

7. Estuda a descontinuidade das seguintes funcións:

$$a) f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & \text{se } x \neq 3 \\ 2 & \text{se } x = 3 \end{cases} \quad b) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

$$a) f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & \text{se } x \neq 3 \\ 2 & \text{se } x = 3 \end{cases}$$

Temos que estudar a descontinuidade no punto $x=3$, xa que é unha función a anacos, formada por unha anaco de parábola, función continua e un anaco de recta, función continua.

$$1^\circ \text{ Existe } f(3) = 2$$

$$2^\circ \text{ Existe } \lim_{x \rightarrow 3} 5 - x^2 = -4$$

3º Non coinciden

A descontinuidade é evitable.

$$b) f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

Temos que estudar a descontinuidade no punto $x=2$, xa que a función nese punto non está definida.

$$1^\circ f(2) = \text{non existe}$$

$$2^\circ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \frac{0}{0} \text{ IND } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 3$$

3º Non coinciden

A descontinuidade é evitable.

8. Calcula o valor de K para que a función seguinte sexa continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + kx - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2^x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

É unha función a anacos, formada por funcións continuas, polo tanto o problema estará no punto $x=1$ onde cambia a definición. Estudemos a continuidade no punto $x=1$

1º $f(1)=k$

2º $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ temos que calcular os límites laterais

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + kx - 1 = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 2^x = 2$$

Para que exista o límite deberán coincidir os límites laterais, polo tanto $k=2$

Así a función é continua, coinciden o límite e a imaxe.

9. Os ingresos diarios dun fabricante de calzado deportivo tras o lanzamento dun novo modelo de zapatillas ven dado pola función: $f(x) = \frac{750x+3500}{x}$.

Onde x representa o número de días transcorridos dende o lanzamento do novo modelo e os ingresos, $f(x)$, exprésanse en miles euros. Calcula:

- Os ingresos transcorridos 50 días e transcorrido un ano.
- Aumentarán os ingreso indefinidamente co paso do tempo?

a) Transcorridos 50 días dende o lanzamento $f(50) = 820$. Os ingresos diarios 50 días despois do lanzamento serán 820000€.

Transcorrido un ano $f(365) = 759,589$. Os ingresos despois dun ano serán aproximadamente de 759589€.

b) Calculemos o límite no infinito da función:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{750x + 3500}{x} = 750$$

O que quere dicir é que no transcurso do tempo, os ingresos tenderán a estabilizarse a 750000€

10. Calcula o valor de a e b para que a seguinte función sexa continua en todos os números reais:

$$f(x) = \begin{cases} -ax - 3 & \text{se } x \leq -1 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{se } -1 < x < 4 \\ bx - 11 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

En cada un dos anacos a función ven dada por unha función polinómica, polo tanto, continua. Bastará con estudar a continuidade nos cambios de definición.

- Estudemos a función no punto $x=-1$
1º Debe existir a función nese punto $f(-1) = a - 3$



2º Debe existir o límite nese punto:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} -ax - 3 = a - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 - 2x - 3 = 0$$

Para que exista o límite deberán coincidir os límites laterais: $-a - 3 = 0$; $a = 3$

- Estudemos a función en $x=4$

1º Debe existir a función nese punto $f(4) = 4b - 11$

2º Debe existir o límite nese punto:

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} x^2 - 2x - 3 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} bx - 11 = 4b - 11$$

Para que exista o límite deberán coincidir os límites laterais: $5 = 4b - 11$; $b = 4$

Para que a función sexa continua o valor de a será 3 e o de b será 4.