

# FUNCIÓNS EXPONENCIAIS, LOGARÍTMICAS E A ANACOS

## 1. Funcións exponenciais

Unha función exponencial é aquela na que a variable  $x$  aparece nun expoñente. Son exemplos de funcións exponenciais:  $f(x) = 3^x$   $f(x) = 1 + 2^x$   $f(x) = 10^{x+1} - 3$ .

Polo tanto a función xeral sería  $f(x) = a^{g(x)}$  onde a función está definida sempre que a función  $g(x)$  o estea.

Un caso particular de función exponencial é a función exponencial natural,  $f(x) = e^x$ , importante polas súas numerosas aplicacións.

### 1.1 Función exponencial $f(x) = a^x$ ; con $a > 0$ e $a \neq 1$

As funcións exponenciais máis sinxelas son da forma  $f(x) = a^x$  sendo  $a > 0$  e  $a \neq 1$ .

As características xerais das funcións exponenciais son:

- Están definidas para calquera valor real da variable  $x$ . Polo tanto o dominio é todo  $\mathbb{R}$ .
- A variable  $y$ , toma valores positivos para calquera valor de  $x$ . Polo tanto a  $Im f = (0, \infty)$
- Son continuas e sempre pasan polo punto  $(1, a)$  e  $(0, 1)$ , cortando ao eixe OY no punto  $y = 1$
- O eixe OX, isto é a recta  $y=0$  é unha asíntota horizontal cara  $-\infty$  se  $a > 1$  e cara  $+\infty$  se  $0 < a < 1$
- Son crecentes se a base  $a > 1$ , e decrecentes se a base  $0 < a < 1$ .
- Son sempre convexas( $\cup$ ), cóncavas para arriba.

#### Exemplo

Representa a seguinte función  $f(x) = 2^x$

1º Dominio todo  $\mathbb{R}$

2º  $Im f = (0, \infty)$

3º Pasa polos puntos  $(1, 2)$  e  $(0, 1)$

4º Asíntota horizontal no eixe X, recta  $y=0$

5º A base  $a = 2 > 1$  é unha función crecente

6º Táboa de valores:

|   |     |     |   |
|---|-----|-----|---|
| x | -2  | -1  | 1 |
| y | 1/4 | 1/2 | 2 |

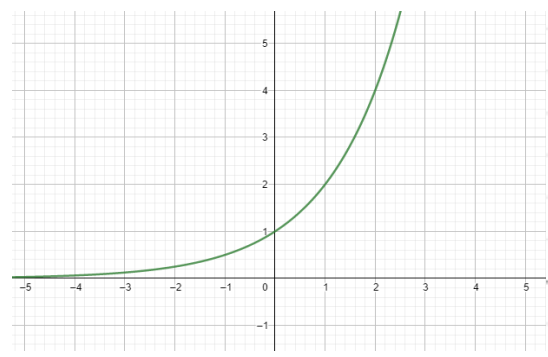


Ilustración 1: Exponencial

Para traballar ben coas funcións exponenciais é preciso coñecer e manexar as propiedades das potencias para poder calcular as imaxes dos valores que toma a variable  $x$ . Igual que o resto das funcións unha ferramenta importante para representar estas funcións é o GeoGebra, simplemente tendo activada a posibilidade de Calc.Gráfica poderase facer todas as gráficas seguintes:

GeoGebra Suite Calculadora  Calc. Gráfica

Ilustración 2: Imaxe GeoGebra

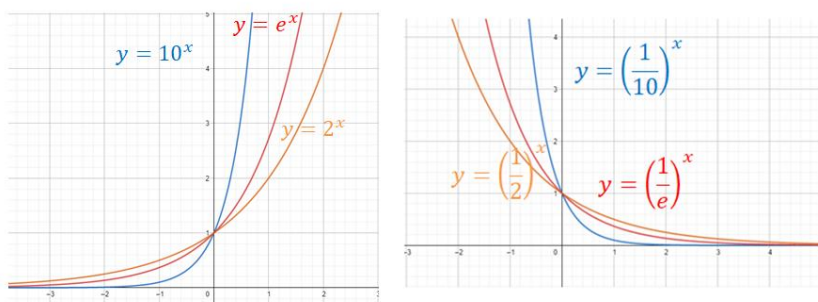


Ilustración 3: Exemplos de funcións exponenciais

Nas imaxes anteriores podemos ver as funcións exponenciais máis utilizadas. As gráficas das funcións da dereita son exemplos de funcións con base  $0 < a < 1$ , todas decrecentes. As gráficas da esquerda sons exemplos de funcións con base  $a > 1$ , todas crecentes. A característica en común é que todas cortan ao eixe OY no punto  $y=1$ .

## 1.2 Exemplos de funcións relacionadas coa exponencial

Na vida real este tipo de funcións exponenciais están presentes en moitas situacións de crecemento animal, económico,...mencionamos algunhas delas:

- A función  $C(t) = C_0 (1 + r)^t$  da o capital acumulado ao cabo de  $t$  anos a un rédito anual  $r$ , para una capital inicial  $C_0$ . Esta fórmula traballouse na unidade de matemática financeira e podemos ver que representa unha función exponencial.
- A desintegración de sustancias radiativas tamén se axusta a funcións exponenciais da forma  $R(t) = R_0 e^{kt}$ , con  $k < 0$ .

## 2. Funciones logarítmicas

Unha función logarítmica é aquela na que a variable  $x$ , atópase afectada por un logaritmo. Son exemplos de funcións logarítmicas  $f(x) = \log(x^2 - 2)$ ,  $f(x) = \log(x + 1)$ .

Polo tanto a función xeral sería  $f(x) = \log_a^{g(x)}$  onde a función está definida sempre que a función  $g(x)$  o estea.

Un caso particular de función logarítmica é a función logaritmo neperiano,  $f(x) = \ln x$ , onde a base é o número  $e$ .

## 2.1 Función logarítmica $f(x) = \log_a^x$ con $a > 0$ e $a \neq 1$

Para estudar estas funcións, imos calcular a inversa da función logaritmo  $f(x) = \log_a^x$ , onde  $a > 0$  e  $a \neq 1$ .

1. Intercambiamos as variable y e x:  $x = \log_a^y$
2. Aplicamos a definición de logaritmos para despxar y e obtemos:  $y = a^x$

Obtemos que a función inversa dos logaritmos son as funcións exponenciais, polo tanto para estudar as súas características basta intercambiar o papel das variable x e y.

- O dominio de definición da función logaritmo é a imaxe da función exponencial, é dicir son os números reais positivos  $(0, \infty)$ .
- A imaxe da función logaritmo é o dominio da función exponencial  $Im f = \mathbb{R}$
- Son continuas e sempre pasan polos puntos  $(1,0)$  e  $(a,1)$ .
- O eixe OY, isto é a recta  $x=0$  é unha asíntota vertical.
- Son crecentes se  $a > 1$  e decrecentes se  $0 < a < 1$ .
- Son cóncavas para abaixo(n) se  $a > 1$  e cóncavas para arriba se  $0 < a < 1$ .

### Exemplo

Representa a seguinte función  $f(x) = \log_2 x$

1º Dominio  $(0, \infty)$

2º  $Im f = \mathbb{R}$

3º Pasa polos puntos  $(1,0)$  e  $(2,1)$

4º Asíntota vertical no eixe Y

5º  $a=2 > 1$  é unha función crecente

6º Táboa de valores:

|   |   |   |     |
|---|---|---|-----|
| x | 4 | 8 | 1/2 |
| y | 2 | 3 | -1  |

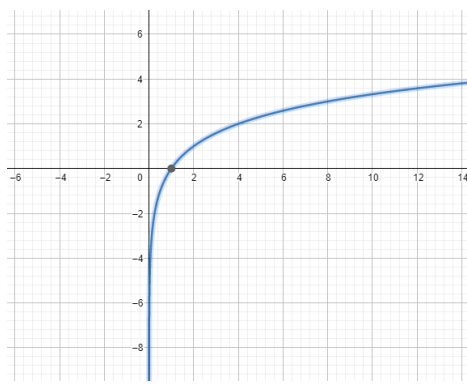


Ilustración 4: Función Logaritmo

Lembra: Dúas funcións  $f$  e  $g$  son inversas cando se cumpre que:  $g(f(x)) = x$  e  $f(g(x)) = x$ . Neste caso  $\log_a^{a^x} = x$  e  $a^{\log_a^x} = x$ .

Na seguinte imaxe temos as gráficas das funcións logarítmicas máis usadas.

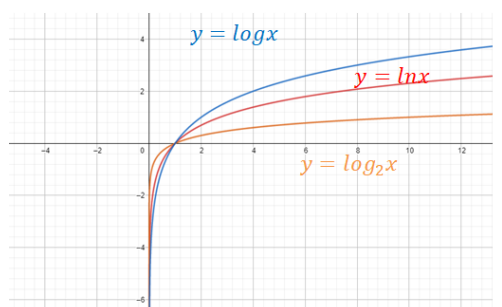


Ilustración 5: Exemplos de funcións Logarítmicas

## 2.2 Exemplos de funcións logarítmicas

En psicoloxía ten moita importancia o estudo das percepcións. A percepción depende, é unha función, dos estímulos físicos. Por exemplo, podemos falar da iluminación,  $I$ , que pode ser medida fisicamente e a percepción,  $S$ , que aprecia un individuo. A relación entre as dúas variables vén dada polo que se chama a Lei psicolóxica onde temos:  $S(I) = C \log I$ , con  $C$  constante. Para valores pequeno de  $I$  o individuo aprecia pequenos cambios pero se o valor de  $I$  aumenta os cambios aumentan.

## 3. Funcións definidas a anacos

Unha función definida a anacos é unha función que ven dada por expresións diferentes en distintos intervalos de su dominio. O dominio dunha función definida a anacos está formado pola unión dos intervalos nos que está definida, exceptuando os valores de cada intervalo nos que a expresión correspondente non teña sentido.

### Exemplo 1

Calcula o dominio e representa a seguinte función  $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Neste caso o dominio será todo  $\mathbb{R}$ , xa que a función está definida por dúas función polinómicas, e estas están definidas para todos os números reais.

1º Estudamos as funcións definidas en cada un dos tramos

No primeiro intervalo  $(-\infty, 0] \Rightarrow f(x) = x - 2$ , é unha recta necesito mínimo dous puntos. No caso destas función sempre se debe calcular a imaxe dos puntos onde cambia a definición, neste caso o a imaxe do valor  $x=0$ . Polo tanto  $f(0) = x - 2 = -2 \Rightarrow (0, -2)$ . Calculamos unha táboa de valores para puntos onde o anaco da función está definida, isto é os valores menores que 0.

|   |    |    |    |
|---|----|----|----|
| x | -4 | -2 | -1 |
| y | -6 | -5 | -3 |

No segundo intervalo  $(0, \infty) \Rightarrow f(x) = x^2$ , é unha parábola,  $a=1 \Rightarrow$  cóncava para arriba necesito o vértice  $(0,0)$  e o valor do extremo que neste caso coinciden, tamén coincide cos puntos de corte cos eixes, así que temos que construír unha táboa de valores para os puntos onde estea definida a parábola, para os valores máis grandes que 0.

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 |
| y | 1 | 4 | 9 |

2º Representamos cada parte:

No seu dominio de definición, cada anaco vai debuxada nunha

cor e podemos observar que ao final da recta de cor azul temos un punto xa que a gráfica tomaría ese valor, para o valor da variable  $x=0$ .

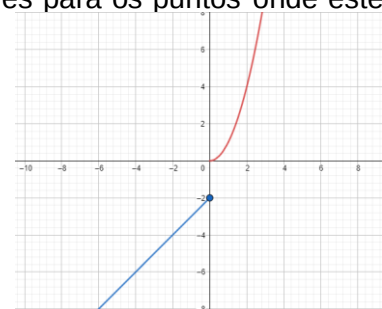


Ilustración 6: Función anacos

**Exemplo 2**

Calcula o dominio da seguinte función a anacos e fai a súa representación gráfica:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2} & \text{si } x < 0 \\ x+2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Podemos observar que no primeiro anaco temos un denominador polo tanto a función non existe se o denominador toma o valor cero, isto é,  $x+2=0 \Rightarrow x=-2$  este valor é un numero menor que cero así que teremos que eliminalo do dominio. Para o intervalo de  $[0,1)$  non temos función.

$$\text{Dom } f = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup [1, \infty)$$

1º Estudamos cada unha das funcións nos tramos correspondentes:

A primeira función é unha función racional,  $f_1(x) = \frac{1}{x+2}$  recordemos os pasos para representar unha función deste tipo.

a) Dominio, igualamos o denominador a cero  $x+2=0 \Rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2\}$ , descontinua en  $x=-2$

b) Asíntotas  $x=-2$  e  $y=0$

c) Táboa de valores

|   |      |    |     |
|---|------|----|-----|
| x | -4   | -1 | 0   |
| y | -1/2 | 1  | 1/2 |

A segunda é unha recta  $f_2(x) = x+2$  continua, definida para todos os números reais, debemos ter unha táboa de valores, e un destes puntos debe ser onde cambia de definición,  $x=1$ .

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| x | 1 | 2 | 3 |
| y | 3 | 4 | 5 |

2º Representamos cada parte, no seu dominio de definición, cada anaco vai debuxada nunha cor, e podemos observar que ao final da recta de cor vermella temos un punto xa que a gráfica tomaría ese valor, para o valor da variable  $x=1$

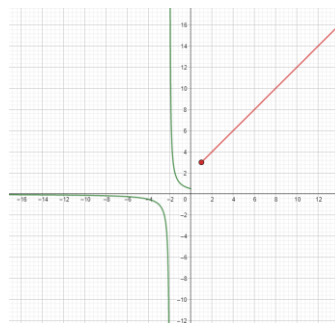


Ilustración 7: Función a anacos 2

### 3.1 Función valor absoluto

A función valor absoluto é unha función que asocia a cada número real o seu valor absoluto  $f(x) = |x|$ . A función valor absoluto a podemos entender como unha función a anacos da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

A expresión xeral, do valor absoluto dunha función defínese así:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Para representar graficamente o valor absoluto dunha función debemos cambiar de signo los anacos en los que la función é negativa.

#### **Exemplo**

Representa  $f(x) = |2x - 4|$

1ª Forma:

Representamos a recta,  $f(x) = 2x - 4$ , construiremos unha táboa

de valores:

|   |    |   |   |
|---|----|---|---|
| x | 0  | 2 | 4 |
| y | -4 | 0 | 4 |

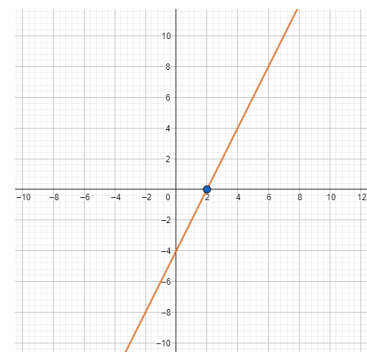


Ilustración 8: Recta

A parte da recta que queda por debaixo do eixe X por simetría o pasamos para o segundo cuadrante, o que é o mesmo todos os puntos con imaxe negativa, pasan a positivo.

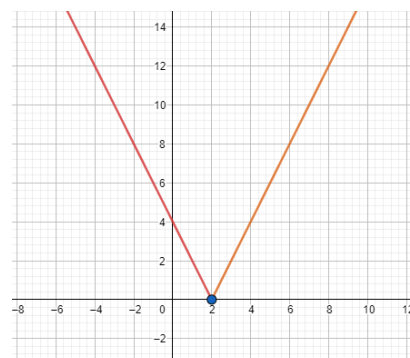


Ilustración 9: Valor absoluto

2ª Forma:

$f(x) = |2x - 4| \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$  estudamos o signo en cada intervalo e obtemos a seguinte función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{se } x \geq 2 \\ -2x + 4 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

Entón temos que representar unha función a anacos formada por dúas rectas e obtemos a mesma gráfica.

## 3.2 Función parte enteira

Chámase función parte enteira dun número  $x$ , ao maior número enteiro menor ou igual a  $x$ . A partires disto, definimos a función parte enteira de  $x$ ,  $Ent(x)$ , que fai corresponder a cada número a súa parte enteira. Trátase entón dunha función a anacos como poderemos ver na súa representación:

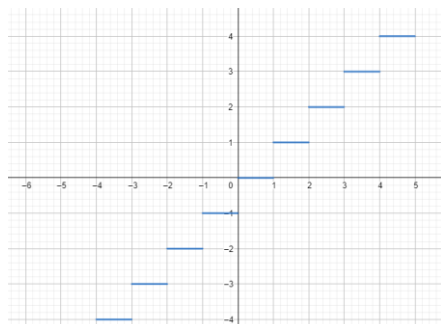


Ilustración 10: Función parte enteira

## 4. Uso de ferramentas dixitais

Todos os gráficos desta unidade están realizados co programa GeoGebra. Como xa mencionamos na unidade de funcións é un programa sinxelo de manexar, neste caso imos ver como se representarían as funcións a anacos, para as cales úsase un comando especial.

Se temos que representar a función  $f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$  deberemos usar o comando Función, no introducir a función directamente, xa que desta forma non podemos introducir o intervalo de definición. O procedemento sería o que observamos na imaxe:

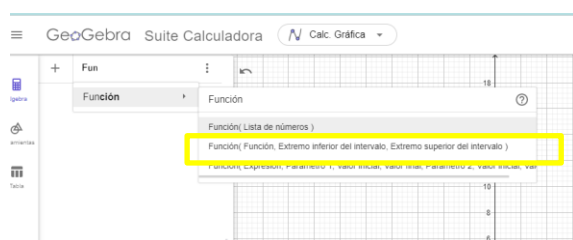


Ilustración 11: Geogebra

Unha vez na opción sinalada escribiremos a función e os intervalos:  $Función(x - 2, -\infty, 0)$

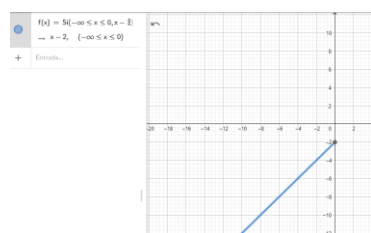


Ilustración 12: Geogebra 2

Así sucesivamente cos demais anacos de funcións. Tamén se pode facer co comando **Si(condición,entón)**

*Licenzas das ilustracións*

| Ilustración                                      | Recurso         |
|--------------------------------------------------|-----------------|
| Ilustración 1. Exponencial                       | Autoría: Propia |
| Ilustración 2: Imaxe GeogGebra                   | Autoría: Propia |
| Ilustración 3. Exemplos de funcións exponenciais | Autoría: Propia |
| Ilustración 4: Función Logaritmo                 | Autoría: Propia |
| Ilustración 5: Exemplos funcións logarítmicas    | Autoría: Propia |
| Ilustración 6: Función a anacos                  | Autoría: Propia |
| Ilustración 7: función a anacos 2                | Autoría: Propia |
| Ilustración 8: Recta                             | Autoría: Propia |
| Ilustración 9: Valor absoluto                    | Autoría: Propia |
| Ilustración 10: Parte enteira                    | Autoría: Propia |
| Ilustración 11: GeoGebra                         | Autoría: Propia |
| Ilustración 12: GeoGebra2                        | Autoría: Propia |