

FUNCIÓNS ALXÉBRICAS

Exercicios autoavaliables

1. O prezo dun billete de tren de proximidades depende dos quilómetros percorridos segundo a función: $P(x) = mx + n$, onde x son os quilómetros percorridos e $P(x)$ é o prezo en €. Se por 40km páganse 6€ e por 70km páganse 9€, determina a función $P(x)$ e calcula canto se pagará por percorrer 100km.

2. O beneficio en millóns de euros que obtén unha empresa ao finalizar o ano veñen determinados polo prezo por unidade que produce.

Se as vende a 1€ obtén 1 millón de euros, se as vende a 2€ obtén 6 millóns de euros e se as vende a 5€ obtén 9 millóns de euros.

a) Obtén a fórmula das parábola que pasa polos tres puntos.

b) Calcula o beneficio se vende cada unidade a 3€.

c) Representa a parábola e calcula o prezo por unidade para que o beneficio sexa máximo.

3. Clasifica as seguintes funcións, menciona as súas características e represéntaas.

a) $y = -x$ b) $y = -2x + 1$ c) $y = -x^2 - 2x + 1$ d) $y = \frac{-3}{x}$ e) $y = \frac{3x+7}{x+2}$ f) $y = \sqrt{x}$

4. Representa as seguintes funcións:

a) $f(x) = x^2 - 9$ b) $f(x) = x^2 - 6x$ c) $f(x) = -3x + 2$ d) $f(x) = \frac{2}{x}$ e) $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ f) $f(x) = \frac{2}{x-1}$

5. Calcula a función de interpolación lineal que se axusta aos puntos (2,3) e (8,6). Calcula o valor que tomaría para $x=4$.

6. Se os custos dunha empresa veñen determinados pola función $f(x) = x^2 - 6x + 40$, onde x representa a cantidade producida dun determinado artigo, con $x \geq 0$ e $f(x)$ en euros.

a) Cal sería o custo de non producirse nada dese artigo? Se o custo fora 80€, cantas serían as unidades producidas?

b) Diminúe o custo algunha vez? Cal é o custo mínimo por articulo? Cantos artigos se producen con ese custo mínimo?

c) Representa a función e xustifica as repostas anteriores, a partires da gráfica.

7. Un avión consume 83912 litros de combustible nun traxecto Madrid- Caracas (7001km) e 13143 litros de Madrid- París (1054Km). Estimar o consumo nun traxecto Madrid- Moscú, 3044km

8. Os datos da oferta e a demanda para un determinado produto nunha empresa veñen dados nas seguintes táboas:

Prezo	Unidades ofertadas pola empresa
5€	10 unidades
15€	50 unidades

Prezo	Expectativa de venda en unidades de produto
5€	40 unidades
15€	20 unidades

- Calcula as expresións das funcións lineais oferta e demanda.
- Calcula o prezo de equilibrio.
- Cal é o prezo mínimo para que a empresa oferte o produto?
- Cal é o prezo máximo para que o produto non teña consumidores?

9. Calcula a función oferta lineal para un determinado articulo se a un prezo de 20€ oferta 50 unidades e a un prezo de 25€ ofertaría 70 unidades. Se a función de demanda é $f_d(x) = 210 - \frac{1}{20}x^2$, onde x ven dado en euros, determina o prezo e a cantidade de equilibrio.

10. Un canón lanza un disparo cuxa traxectoria ven dada por $f(x) = -3x^2 + 18x$ con x en centos de metros. Calcula a altura máxima e o alcance do disparo.

11. Se nun resorte colgamos unha pesa de 40gramos, este estírase ata 12mm. E se colgamos unha pesa de 60 g, estírase ata 20mm.

- Cal sería a súa lonxitude se colgamos unha pesa de 55g?
- Cal sería a súa lonxitude se colgamos unha pesa de 100g?
- E se fose de 5kg?

Solucións

1. O prezo dun billete de tren de proximidades depende dos quilómetros percorridos segundo a función: $P(x) = mx + n$, onde x son os quilómetros percorridos e $P(x)$ é o prezo en €. Se por 40km páganse 6€ e por 70km páganse 9€, determina a función $P(x)$ e calcula canto se pagará por percorrer 100km.

A función é lineal e temos que pasa por (40,6) e (70,9) para calcular a ecuación da recta temos que calcular m , pendente e a n . Temos dúas posibilidades por un sistema ou calcular a pendente pola fórmula $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ e logo para calcular a n a facemos pasar a ecuación por un dos puntos.

$$m = \frac{9-6}{70-40} = 0,1;$$

$$P(x) = 0,1x + n; \quad 6 = 0,1 \cdot 40 + n; \quad n = 2; \quad P(x) = 0,1x + 2$$

Dada a función xa podemos calcular o seu valor para calquera km; Canto pagaremos por percorrer 100Km; $P(100) = 0,1 \cdot 100 + 2 = 12€$

2. O beneficio en millóns de euros que obtén unha empresa ao finalizar o ano veñen determinados polo prezo por unidade que produce.

Se as vende a 1€ obtén 1 millón de euros, se as vende a 2€ obtén 6 millóns de euros e se as vende a 5€ obtén 9 millóns de euros.

a) Obtén a fórmula das parábola que pasa polos tres puntos.

b) Calcula o beneficio se vende cada unidade a 3€.

c) Representa a parábola e calcula o prezo por unidade para que o beneficio sexa máximo.

Temos que calcular a parábola que pasa polos tres puntos (1,1) (2,6) e (5,9) entón quedanos o seguinte sistema que resolveremos por Gauss:

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 6 \\ 25a + 5b + c = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 1 \\ 3a + b = 5 \\ 24a + 4b = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + c = 1 \\ 3a + b = 5 \\ 12a = -12 \end{array} \right\}$$

Resolvemos $a = -1$ $b = 8$ e $c = -6$

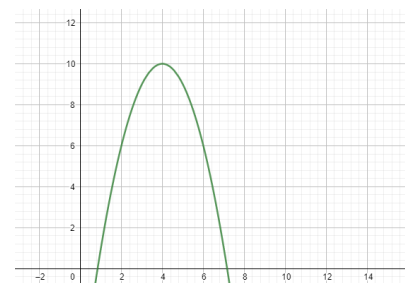
a) $f(x) = -x^2 + 8x - 6$

b) Beneficio para $x=3€$: 9 millóns de euros

c) Beneficio é máximo no vértice, deberemos calcular a coordenada $v_x = \frac{-8}{-2} = 4$, $v_y = 10$. O prezo deberá ser de 4€ para obter un beneficio de 10 millóns.

Para representala seguimos os pasos:

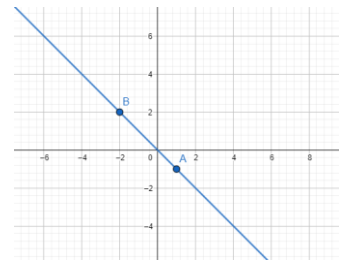
1. $a < 0$ ramas cara abaixo
2. Vértice (4,10)
3. Corte cos eixes: OX: $-x^2 + 8x - 6 = 0$; $x = 1, x = 7$: (1,0)(7,0) OY (0,-6)
4. Táboa de valores se é preciso.



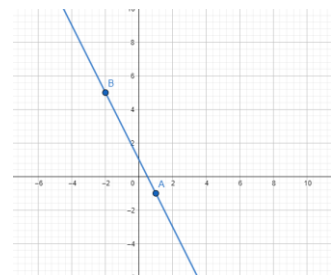
3. Clasificas as seguintes funcións, menciona as súas características e represéntaaas.

a) $y = -x$ b) $y = -2x + 1$ c) $y = -x^2 - 2x + 1$ d) $y = \frac{-3}{x}$ e) $y = \frac{3x+7}{x+2}$ f) $y = \sqrt{x}$

a) $y = -x$ Función polinómica de 1º grao, recta afín. Pasa pola orixe de coordenadas, a súa pendente é -1 polo tanto decrecente. Calculamos un par de valores para facer a súa representación.



b) $y = -2x + 1$ Función polinómica de 1º grao, recta lineal. Non pasa pola orixe de coordenadas, a súa pendente é -2 polo tanto decrecente. Calculamos un par de valores para facer a súa representación.



c) $y = -x^2 - 2x + 1$ Función polinómica de 2º grao, parábola.

1º Estudamos o signo de a , neste caso $a = -1 < 0$ polo tanto ramas cara abaixo.

2º Calculamos o vértice, a coordenada x ven dada por: $v_x = \frac{-b}{2a}$ e logo calculamos o valor da y . Neste caso $v_x = -1$ polo tanto $v_y = 2 \Rightarrow$

vértice $(-1, 2)$

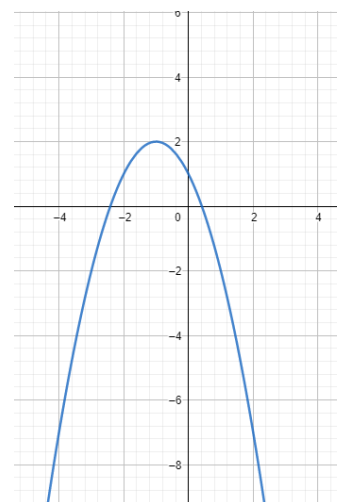
3º Cortes cos eixes:

Corte co eixe OY: $f(0) = 1 \Rightarrow (0, 1)$

Corte co eixe OX resolvemos a ecuación de 2º grao: $-x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_{cortes} (-1 + \sqrt{2}, 0)$ e $(-1 - \sqrt{2}, 0)$

4º Construimos unha táboa de valores:

x	0	1	2
y	1	-2	-8



d) $f(x) = \frac{-3}{x}$ Función racional é unha hipérbole equilátera.

1º $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$, descontinua en $x=0$

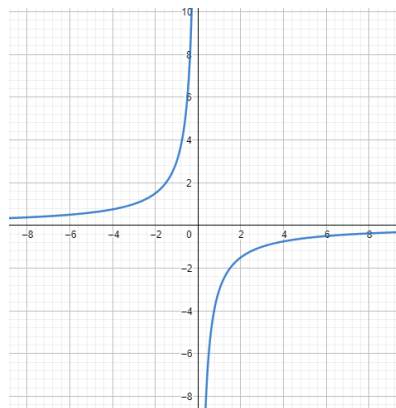
2º Asíntotas $x=0$ e $y=0$

3º Como $K = -3 < 0$ atóparase no 2º e 4º cuadrante, é crecente e temos que construír unha táboa de valores (é simétrica respecto ao orixe)



4º Táboa de valores

x	1/3	1	3
y	-9	-3	-1



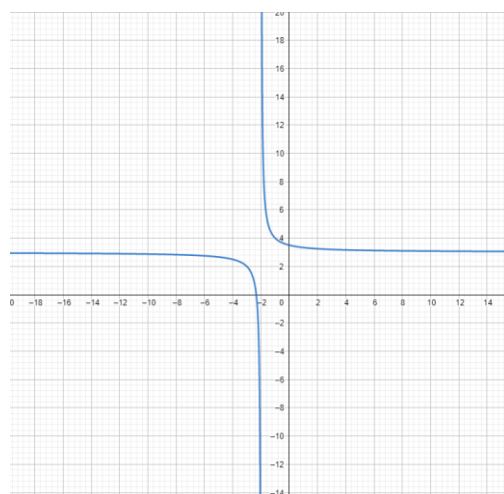
e) $y = \frac{3x+7}{x+2}$ Función racional

1º Dominio, igualamos o denominador a cero $x + 2 = 0 \Rightarrow$
Dom $f = \mathbb{R} - \{-2\}$, descontinua en $x = -2$

2º Asíntotas $x = -2$ e $y = 3$

3º Táboa de valores

x	-1	0	1
y	4	7/2	10/3

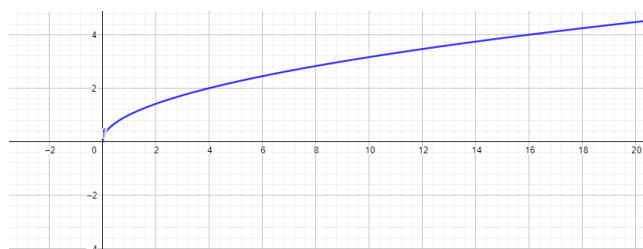


f) $y = \sqrt{x}$ Función irracional

1º Dominio: $\Rightarrow$ Dom $f = (0, \infty)$

2º Táboa de valores

x	1/4	0	1	4
y	1/2	0	1	2



4. Representa as seguintes funcións:

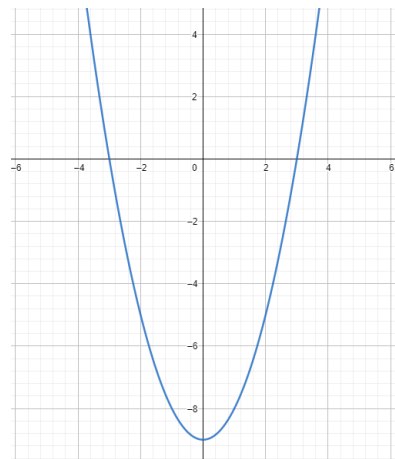
a) $f(x) = x^2 - 9$ b) $f(x) = x^2 - 6x$ c) $f(x) = -3x + 2$ d) $f(x) = \frac{2}{x}$ e) $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$ f) $f(x) = \frac{2}{x-1}$

a) $f(x) = x^2 - 9$. Función polinómica de 2º grao, parábola.

1º Estudamos o signo de a , neste caso $a = 1 > 0$ polo tanto ramas cara arriba



2º Calculamos o vértice, a coordenada x ven dada por: $v_x = \frac{-b}{2a}$ e logo calculamos o valor da y . Neste caso $v_x = 0$ polo tanto $v_y = -9 \Rightarrow$ vértice $(0, -9)$



3º Cortes cos eixes:

Corte co eixe OY: $f(0) = -9 \Rightarrow (0, -9)$

Corte co eixe OX resolvemos a ecuación de 2º grao: $x^2 - 9 = 0$

$\Rightarrow$ cortes $(3, 0)$ e $(-3, 0)$

4º Construimos unha táboa de valores:

x	0	1	2
y	-9	-8	-5

b) $f(x) = x^2 - 6x$. Función polinómica de 2º grao, parábola.

1º Estudamos o signo de a , neste caso $a = 1 > 0$ polo tanto ramas cara arriba

2º Calculamos o vértice, a coordenada x ven dada por: $v_x = \frac{-b}{2a}$ e logo calculamos o valor da y . Neste caso $v_x = 3$ polo tanto $v_y = -9 \Rightarrow$ vértice $(3, -9)$

3º Cortes cos eixes:

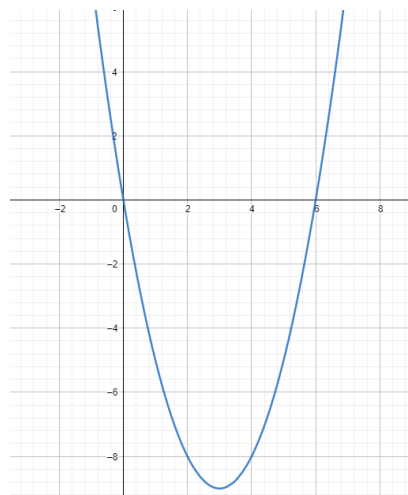
Corte co eixe OY: $f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0)$

Corte co eixe OX resolvemos a ecuación de 2º grao: $x^2 - 6x = 0 \Rightarrow$

cortes $(0, 0)$ e $(6, 0)$

4º Construimos unha táboa de valores:

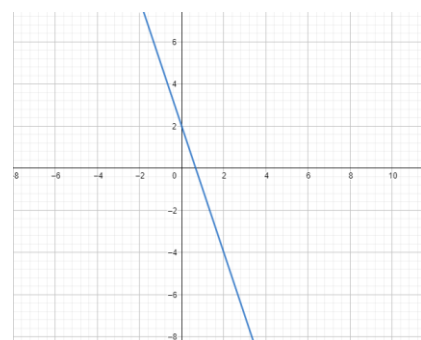
x	0	1	2
y	0	-5	-8



c) $f(x) = -3x + 2$. Función polinómica de 1º grao, recta lineal. Non pasa pola orixe de coordenadas, a súa pendente é -3 polo tanto decrecente.

Calculamos un par de valores para facer a súa representación.

x	0	1	2
y	2	-1	-4





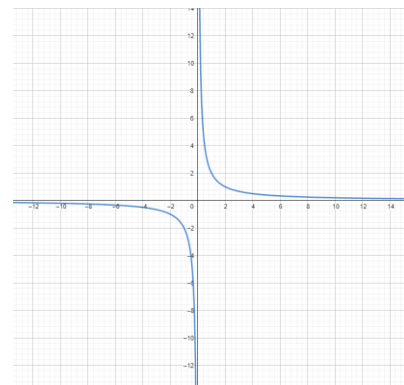
d) $f(x) = \frac{2}{x}$ Función racional é unha hipérbole equilátera.

1º Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$, descontinua en $x=0$

2º Asíntotas $x=0$ e $y=0$

3º Como $K = 2 > 0$ atóparase no 1º e 3º cuadrante, é decrecente e temos que construír unha táboa de valores (é simétrica respecto ao orixe)

x	-1	1/2	1
y	-2	4	2



e) $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$

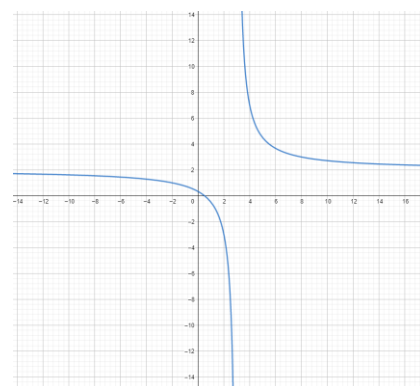
1º Dominio, igualamos o denominador a cero $x - 3 = 0 \Rightarrow$

Dom $f = \mathbb{R} - \{3\}$, descontinua en $x = 3$

2º Asíntotas $x=3$ e $y=2$

3º Táboa de valores

x	2	4	5
y	-3	7	9/2



f) $f(x) = \frac{2}{x-1}$

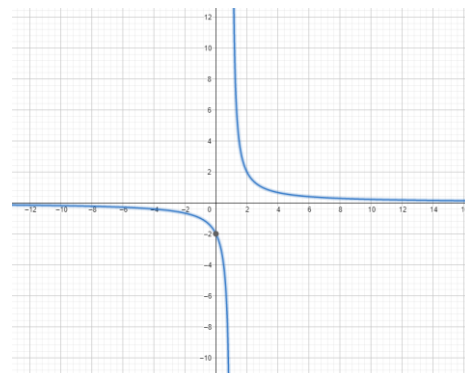
1º Dominio, igualamos o denominador a cero $x - 1 = 0 \Rightarrow$

Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$, descontinua en $x = 1$

2º Asíntotas $x=1$ e $y=0$

3º Táboa de valores

x	0	1/2	5
y	-2	4	1/2



5. Calcula a función de interpolación lineal que se axusta aos puntos (2,3) e (8,6). Calcula o valor que tomaría para $x=4$.

A función de interpolación que se axusta a estes valores calcúlase como: $f(x) = ax + b$ facemos pasar a recta polos dous puntos $\begin{cases} 3 = 2a + b \\ 6 = 8a + b \end{cases} \Rightarrow$ resolvemos $a=1/2$ e $b=2$

$f(x) = \frac{1}{2}x + 2 \Rightarrow$ para $x=4$ obtemos $y=4$

6. Se os custos dunha empresa veñen determinados pola función $f(x) = x^2 - 6x + 40$, onde x representa a cantidade producida dun determinado artigo, con $x \geq 0$ e $f(x)$ en euros.

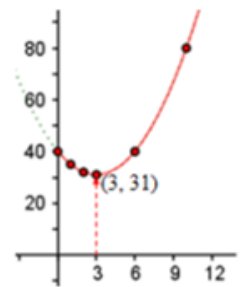
- Cal sería o custo de non producirse nada dese artigo? Se o custo fora 80€, cantas serías as unidades producidas?
- Diminúe o custo algunha vez? Cal é o custo mínimo por artigo? Cantos artigos se producen con ese custo mínimo?
- Representa a función e xustifica as repostas anteriores, a partires da gráfica.

a) Se non se produce nada de ese artigo, $x=0$ os custo sería $f(0) = 40$. Se o custo fose 80€ ; $f(x) = 80 \Rightarrow x^2 - 6x + 40 = 80 \Rightarrow x = 10$ e $x = -4$;

Deberá producirse 10 unidades o valor negativo o descartamos non ten sentido.

b) Como o coeficiente de $a=1$ positivo a súa gráfica ten ramas cara arriba, Polo tanto o vértice será un mínimo. $v_x = 3$; $v_y = 31$ €. A esquerda de $x=3$ a funcións decrece e o custo diminúe.

c) A representación é unha parábola, xa temos varios puntos para poder debuxala.



7. Un avión consume 83912 litros de combustible nun traxecto Madrid- Caracas (7001km) e 13143 litros de Madrid- París (1054Km). Estimar o consumo nun traxecto Madrid- Moscú de 3044km

Supoñemos que o consumo depende de maneira lineal dos quilómetros recorridos. Polo tanto calculamos a recta que pasas polos puntos que nos dan:

$$m = \frac{83912 - 13143}{7001 - 1054} = 11,9$$

$$f(x) - 13143 = 11,9(x - 1054) \Rightarrow F(x) = 11,9x + 600,4$$

$$\text{Para } x=3004 \Rightarrow f(x) = 36824 \text{ litros}$$

8. Os datos da oferta e a demanda para un determinado produto nunha empresa veñen dados nas seguintes táboas:

Prezo	Unidades ofertadas pola empresa
5€	10 unidades
15€	50 unidades

Prezo	Expectativa de venda en unidades de produto
5€	40 unidades
15€	20 unidades

- Calcula as expresións das funcións lineais oferta e demanda.
- Calcula o prezo de equilibrio.
- Cal é o prezo mínimo para que a empresa oferte o produto?
- Cal é o prezo máximo para que o produto non teña consumidores?

a) A función oferta pasa polos puntos (5,10) e (15,50). Ten pendente $m=4$ e a ordenada no orixe $n=-10$, polo tanto $f_o(x) = 4x - 10$.

A función demanda pasa polos puntos (5,10) e (15,20) ten pendente $m=-2$ e ordenada na orixe $n=50$, polo tanto $f_d(x) = -2x + 50$

- b) Para calcular o prezo de equilibrio resólvese a seguinte ecuación: $4x - 10 = -2x + 50$ e resulta $x=10$. É dicir que se o prezo do produto é de 10€, a empresa produce 30 unidades e véndese 30 unidades.
- c) O prezo mínimo para que a empresa oferte o produto é de 2,5€. Xa que $4x - 10 = 0 \Rightarrow x = 2,5$
- d) O prezo máximo para que o produto non teña consumidores é de 25€. Xa que $-2x + 50 = 0 \Rightarrow f_o(x) = 4x = 25$

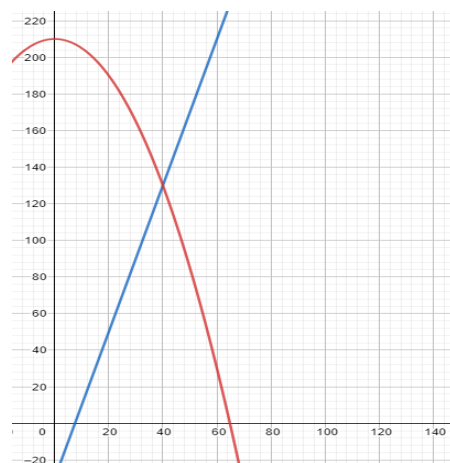
9. Calcula a función oferta lineal para un determinado artigo se a un prezo de 20€ oferta 50 unidades e a un prezo de 25€ ofertaría 70 unidades. Se a función de demanda é $f_d(x) = 210 - \frac{1}{20}x^2$, onde x ven dado en euros, determina o prezo e a cantidade de equilibrio.

Función oferta $f_o(x) = mx + n$, onde temos que pasa por (20,50) e (25,70) calculamos m e n por a ecuación recta pendente ou sistema e obtemos $m=4$ e $n=-30$: $f_o(x) = 4x - 30$.

Para calcular o punto de equilibrio debemos igualar a función oferta e a función demanda:

$$4x - 30 = 210 - \frac{1}{20}x^2 \text{ obtemos } x=40 \text{ e } x=-120.$$

O prezo de equilibrio será 40€, a solución negativa non ten sentido económico. A este prezo as cantidades de oferta e demanda son de 130 unidades.



10. Un canón lanza un disparo cuxa traxectoria ven dada por $f(x) = -3x^2 + 18x$ con x en centos de metros. Calcula a altura máxima e o alcance do disparo.

A altura máxima é a ordenada y do vértice $v_x = \frac{-18}{-6} = 3 \Rightarrow v_y = 27$

O alcance do disparo é o punto no que a función corta ao eixo X , polo tanto temos que resolver a ecuación: $-3x^2 + 18x = 0 \Rightarrow x = 0$ e $x = 6$. Loxicamente o $x=0$ correspóndese co punto onde se atopa o canon, polo que o alcance será $x=6$.

Así, tendo en conta a escala das variables x e y a altura máxima que alcanza é de 2700m e o alcance será de 600m.

11. Se nun resorte colgamos unha pesa de 40gramos, este estírase ata 12mm. E se colgamos unha pesa de 60 g, estírase ata 20mm.

- a) Cal sería a súa lonxitude se colgamos unha pesa de 55g?
- b) Cal sería a súa lonxitude se colgamos unha pesa de 100g?
- c) E se fose de 5kg?



Supoñemos que polo menos no intervalo entre 40 e 60 a lonxitude do resorte dependen de maneira lineal do peso. Polo tanto podemos aproximar a lonxitude por interpolación lineal. Calculamos a recta:

$$m = \frac{20 - 12}{60 - 40} = \frac{2}{5}$$

$$f(x) - 12 = \frac{2}{5}(x - 40) \Rightarrow f(x) = \frac{2}{5}(x - 40) + 12$$

- a) Para $x=55g \Rightarrow f(x) = 18mm$
- b) Para $x=100g \Rightarrow f(x) = 36mm$
- c) Para $x=5kg=5000g \Rightarrow f(x) = 1996mm$