

FUNCIÓNS

1. Concepto de función

Unha relación entre dous conxuntos X e Y é un criterio que permite asociar elementos de X cos elementos de Y. Se nos centramos no conxunto dos números reais, $\mathbb{R}$, aparece o concepto de función. Unha función real de variable real, f , é unha relación entre dúas variables numéricas, x e y , de forma que a cada valor da variable, x , lle corresponde un único valor da variable, y . O podemos expresar da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & y = f(x) \end{array}$$

A variable x denomínase variable independente e a variable y e a variable dependente. As funcións as expresamos $y = f(x)$ onde $f(x)$ representa a fórmula que define a función. As funcións represéntase nuns eixes cordeados, onde os puntos (x,y) do gráfico son os valores das variables.

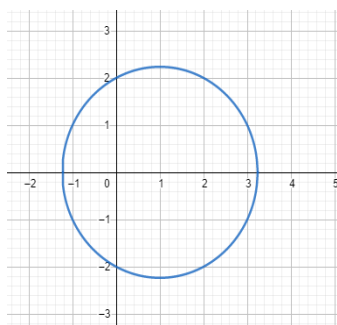


Ilustración 1: Exemplo gráfico dunha relación que non é función

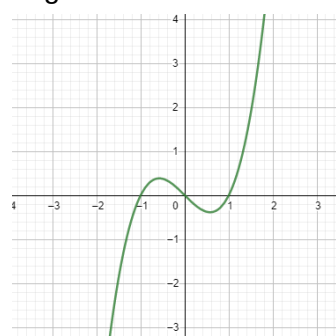


Ilustración 2: Exemplo gráfico dunha función

Exemplo 1

A regra: “a cada número real lle asocia a súa metade” é claramente una función. Así ao 4 lle corresponde 2 e soamente 2. Igualmente ao 6 lle corresponde 3, en xeral a x lle corresponde $x/2$. A función escríbese $f(x) = \frac{x}{2}$ ou $y = \frac{x}{2}$

Exemplo 2

A regra: “a cada número natural se lle asocia os seus divisores”, claramente non é unha función, xa que ao 12 se poden asociar o 6, pero tamén o 4 ou o 2, ou 3, todos son divisores de 12. Polo tanto esta relación non é unha función.

1.1 Formas de expresar unha función

As función pódense dar en diferentes formatos:

- Mediante un enunciado: se a función ven dada por un enunciado, onde se detalla a relación entre as variables, deberemos traducilo a unha gráfica ou se fose posible unha expresión.
- Mediante unha táboa de valores, onde se expresan os pares de valores.

- Mediante a súa gráfica: a expresión gráfica permítenos facernos unha idea moi clara de cómo é a función con un só golpe de ollo.
- Pola súa expresión analítica ou fórmula matemática: a expresión analítica sintetiza alxebricamente de forma perfecta a relación entre as dúas variables.

Exemplo

Enunciado: “Unha billa bota auga nun depósito de 200 litros de capacidade a razón de 2 litros por segundo. Ata que se enche o depósito, momento no que pechamos a billa.”

Expresión analítica: $V = f(t) = 2t$; t = “tempo no que a billa está aberta”; V = “volume de auga”

Táboa de valores:

Tempo (s)	0	5	40	100
Volume (l)	0	10	80	200

Gráfica:

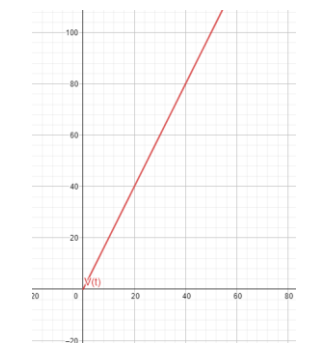


Ilustración 3: Función billa

2. Propiedades das funcións

A continuación estudaranse algunhas das propiedades máis importantes das funcións para logo poder coñecelas e representalas.

2.1 Dominio e imaxe dunha función

O dominio dunha función $f(x)$ é o conxunto de valores de x para os cales podemos calcular o correspondente y . O dominio dunha función f o denotamos por $Dom(f)$, e é un subconxunto de $\mathbb{R}$.

A imaxe ou recorrido dunha función é o conxunto de valores que toma a función, $f(x)$, e represéntase por $Im(f)$.

Na gráfica dunha función, o seu dominio é moi fácil de visualizar, bastará con localizar os valores de x para os cales existe a gráfica. A imaxe tamén é sinxela de calcular cando temos a gráfica da función.

Cando se estuda unha función, o primeiro que temos que facer é

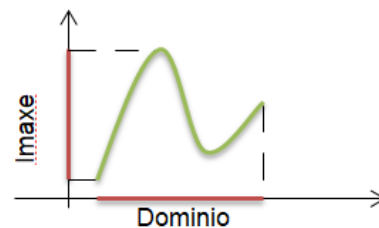


Ilustración 4: Dominio e imaxe

determinar o seu dominio. En xeral o dominio dunha función pártese de que é toda a recta real salvo algunhas restricións:

- O contexto real do que se extraia a función. Con frecuencia, a x non pode tomar valores negativos ou fraccionarios, no caso de falar de lonxitudes, esta deberá ser positiva, non pode venderse medio computador,...
- Por vontade da propia función.
- A imposibilidade de facer algunha operación. Neste caso temos as seguintes situacións:
 - Funcións con denominadores: o denominador non pode valer cero, deberemos excluír os valores que anulan o denominador do dominio de definición.
 - Funcións con raíces de índice par: o radical non poderá ser negativo, deberemos excluír do dominio de definición estes valores. Importante: as raíces cadradas teñen dúas solucións, para que a expresión defina unha función soamente lle corresponderá un valor.
 - Funcións con logaritmos: o valor do argumento deberá ser positivo, non existen logaritmos de números negativos o nulos, así que se deberán eliminar do dominio.

Exemplo

Calcula o dominio das seguintes funcións:

a) $f(x) = \sqrt{x+4}$ b) $f(x) = \log(x-2)$ c) $f(x) = \frac{3}{x-2}$ d) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

e) $y = x^3 - x^2, x \in [0,8]$ f) A función que determina a área dun cadrado de lado variable.

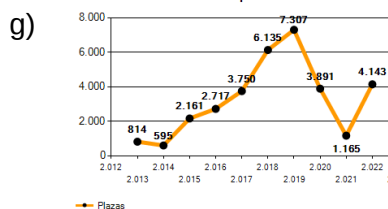


Ilustración 5: Oposicións xunta

- a) Función con raíces de índice par o radicando ten que ser maior ou igual a cero:
 $x + 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq -4 \Rightarrow \text{Dom}(f) = [-4, \infty)$
- b) Función logarítmica o argumento maior que cero:
 $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow \text{Dom}(f) = (2, \infty)$
- c) Función con denominadores debemos excluír as raíces do denominador:
 $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$
- d) Función polinómica sen ningunha restricións das mencionadas: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- e) Función polinómica, onde o dominio ven restrinxido:
 $\text{Dom} = [0,8]$, tal como xa di o enunciado
- f) A función será $a(x)=x^2$, $\text{Dom}(a) = (0, \infty) = \mathbb{R}^+$, as lonxitudes deberán ser positivas para ter sentido.
- g) Neste caso a gráfica representa a evolución da oferta de prazas da Xunta, o dominio ven expresado en anos dende o 2013 ata o 2022.

2.2 Cortes cos eixes

O cálculo dos puntos de cortes dunha función con eixes, aportan unha unha serie de puntos que nos facilitan a súa representación.

- Puntos de corte co eixe OX: O eixe OX coincide coa recta $y = 0$, como consecuencia para calcular este puntos será suficiente igual a expresión analítica da función a cero $f(x) = 0$. Este puntos son da forma $(x, 0)$.
- Punto de corte co eixe OY: O eixe OY coincide coa recta $x = 0$, como consecuencia para calcular este punto será suficiente substituír o valor da x por cero na expresión analítica, $f(0)$. Este punto será da forma $(0, y)$.

Exemplo

Dada a funcións $f(x) = x^2 + x - 6$ calcula os puntos de corte cos eixes.

- Corte co eixe OX: $x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ e } x = -3 \Rightarrow$ cortes $(2,0)$ e $(-3,0)$
- Corte co eixe OY: $f(0) = -6 \Rightarrow$ corte $(0,-6)$

A representación desta función é unha parábola que recordaremos con maior precisión na unidade seguinte.

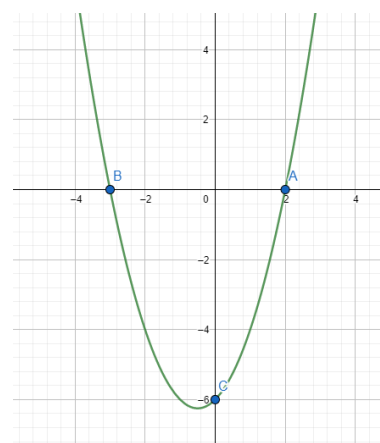


Ilustración 6: Cortes cos eixes

2.3 Simetrías

Dada unha función f de variable real dicimos que é:

- Simétrica respecto do eixe Y, se para calquera punto x do dominio da función verifícase $f(-x) = f(x)$. Estas funcións denomínanse Funcións Pares. Se temos a súa representación gráfica, as funcións pares coinciden se o dobralas polo eixe Y coinciden.
- Simétrica respecto da orixe de coordenadas, se para calquera punto x do dominio verifícase que $f(-x) = -f(x)$. Estas funcións denomínanse Funcións Impares. Gráficamente son simétricas respecto ao orixe nde coordenadas.

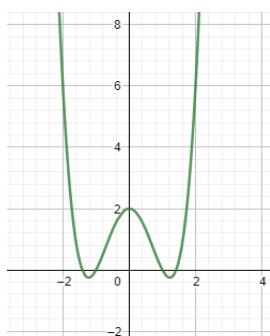


Ilustración 7: Función par

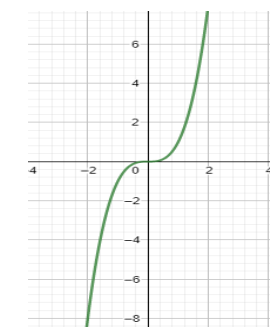


Ilustración 8: Función impar

Exemplo

Estuda a simetría das seguintes funcións:

a) $f(x) = \frac{3}{x}$ b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ c) $h(x) = 2x + 1$ d) $i(x) = -x^2 + 4$

a) Calculamos $f(x)$ e $f(-x)$

$$f(-x) = -\frac{3}{x} \Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow f \text{ é impar simétrica respecto a orixe}$$

b) Calculamos $g(x)$ e $g(-x)$

$$g(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow g(x) = g(-x) \Rightarrow g \text{ é par}$$

simétrica respecto o eixe Y

c) Calculamos $h(x)$ e $h(-x)$

$$h(-x) = -2x + 1 \Rightarrow h(-x) \neq -h(x) \Rightarrow \text{Non é simétrica}$$

d) Calculamos $i(x)$ e $i(-x)$

$$i(-x) = -(-x)^2 + 4 = -x^2 + 4 = i(x) \Rightarrow \text{simétrica respecto o eixe Y, é par}$$

2.4. Crecemento e decrecemento. Máximos e mínimos

Ao representar unha función observamos que o seu comportamento é diferente ao longo do dominio, podemos visualizar que a funcións ascende, diminúe e ás veces mantense. Vexamos estes conceptos matematicamente.

Unha función é **crecente** nun intervalo se cando a variable x crece o valor da función, y , tamén crece ou o que é o mesmos se: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Unha función é **decrecente** nun intervalo se cando a variable x crece o valor da función, y , neses puntos decrece, isto é: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Unha función é constante nun intervalo si $f(x_1) = f(x_2)$ para calquera valor de x en dicho intervalo.

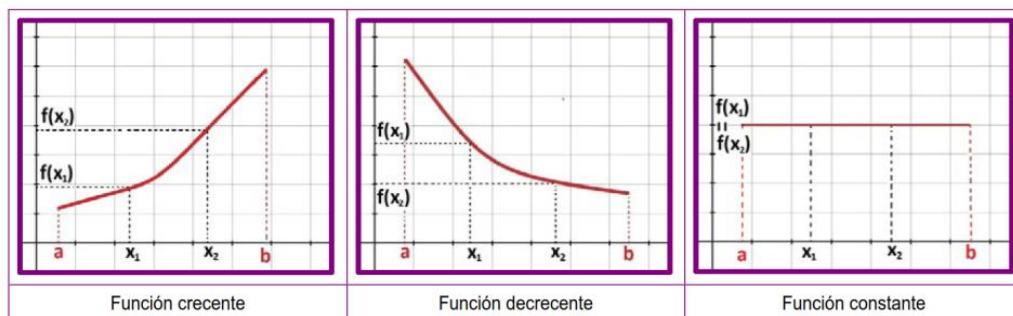


Ilustración 9: Monotonía dunha función

Unha función ten un **máximo** en $x=a$ cando nese punto pasa de crecente a decrecente, e unha función ten un **mínimo** en $x=a$ cando nese punto pasa de decrecente a crecente. Os máximos e mínimos poden ser relativos cando son nun entorno e absolutos cando o son en todo o dominio da función.

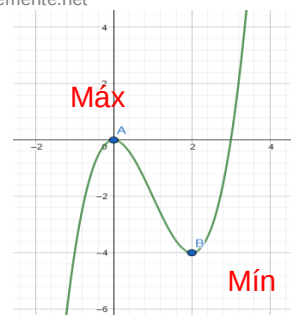


Ilustración 10: Máximo e mínimo

2.5 Periodicidade

Na natureza existen fenómenos que se repiten en intervalos, coma é o caso das mareas, os péndulos e resortes, o son,.. Ás funcións que describen este tipo de fenómenos se lles chaman periódicas.

Unha función é periódica cando o seu valor se repite cada vez que a variable independente percorre certo intervalo, a este intervalo se

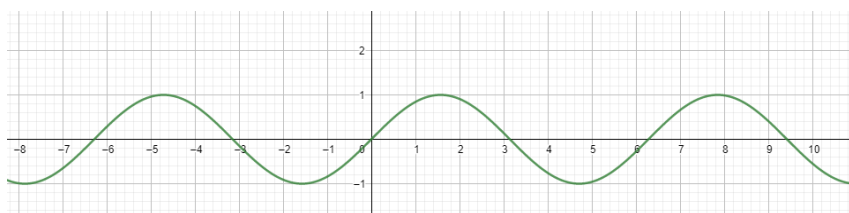


Ilustración 11: Función seno

lle chama período, o designamos coa letra T entón $f(x + T) = f(x) = f(x + 2T) = \dots$

As funcións periódicas máis importantes son as funcións trigonométricas que son as que se definen a partires das razóns trigonométricas, máis adiante estudaranse con máis detalle agora vexamos a idea gráfica das funcións periódicas.

2.6 Asíntotas

As asíntotas dunha función son rectas as cales a gráfica da funcións tende a *pegarse* pero nunca se tocan. Existen diferentes tipos de asíntotas o seu cálculo e estudo verase en profundidade na unidade de límites. Vexamos simplemente a idea gráfica. Se debuxamos a función $f(x) = \frac{x^2+2}{x-1}$ obtemos a gráfica verde se debuxamos tamén a recta $x=1$, observamos que se aproximan moito pero nunca se corta, podemos dicir que $x=1$ é unha asíntota da función.

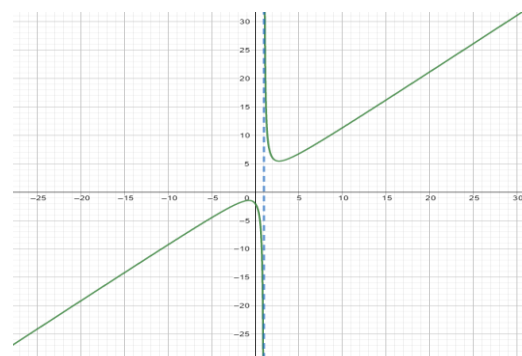


Ilustración 12: Asíntota

2.7 Continuidade

Unha función é continua graficamente se se pode debuxar sen levantar o lapis do papel. O concepto matemático é máis complicado e traballárase en unidades posteriores. A ilustración 10 é unha función continua, mentres que a ilustración 11 non é continua en $x=1$.

3. Operacións coas funcións

O conxunto de operacións que podemos realizar coas funcións, así como as regras que permiten efectuar as devanditas operacións, reciben o nome de álgebra de funcións. As funcións, sempre que compartan o dominio, as podemos sumar, restar, multiplicalas e dividilas, e cando o dominio dunha conteña a imaxe da outra, compoñelas.

3.1 Operacións de funcións

A suma ou resta de funcións f e g é outra función que simbolizaremos por $f \pm g$, tal que para calquera valor, x , que pertence aos dominios de ambas funcións verifícase:

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

O produto de funcións f e g é outra función, $f \cdot g$, tal que para calquera valor, x , que pertenza aos dominios de ambas funcións verifícase:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

O cociente de funcións f e g é outra función, f/g , tal que para calquera valor, x , que pertenza aos dominios de ambas funcións verifícase:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ con } g(x) \neq 0$$

Exemplos

Dadas as funcións $f(x) = x^2 - 2x$ e $g(x) = \frac{3}{x}$, realiza as seguintes operacións:

a) $(f + g)(x)$ b) $(f \cdot g)(x)$ c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

a) $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 2x + \frac{3}{x} = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x}$

b) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 2x) \left(\frac{3}{x}\right) = \frac{3x^2 - 6x}{x} = 3x - 6$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 2x}{\frac{3}{x}} = \frac{x^3 - 2x^2}{3}$

3.2 Composición de funciones

A composición de funcións consiste en aplicar a unha mesma variable dúas ou máis funcións de maneira sucesiva. Cando sobre $f(x)$ actúa outra función g , podemos falar de composición, é frecuente a notación $(g \circ f)(x)$ e lese “ f composta con g ”. Esquemáticamente:

$$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow g(f(x))$$

Noméase en primeiro lugar a función da dereita porque é a primeira que actúa sobre x . Esta función $(g \circ f)(x)$ estará definida cando $f(x)$ estea no dominio de g . Pódese observar que pola

definición a composición non é conmutativa é dicir, $g \circ f$ non ten porque ser igual a $f \circ g$, incluso poderá pasar que unha delas non exista.

Exemplo

Calcula a composición das seguintes funcións $f(x) = \text{sen } x$ e $g(x) = e^x$

a) Calculamos $f \circ g$

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow g(x) \longrightarrow f(g(x))$$

$$x \longrightarrow e^x \longrightarrow \text{sen } e^x$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^x) = \text{sen } e^x$$

b) Calculamos $g \circ f$

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow g(f(x))$$

$$x \longrightarrow \text{sen } x \longrightarrow e^{\text{sen } x}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\text{sen } x) = e^{\text{sen } x}$$

Observamos que a composición non é conmutativa.

3.3 Función inversa

Denótase función inversa ou recíproca da función f , á función que representaremos por f^{-1} e que verifica: $f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$

Como consecuencia desta relación verifícase que: $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ e $(f \circ f^{-1})(x) = x$

Isto quere dicir que f^{-1} é a súa vez a función inversa de f . Gráficamente, poderemos comprobar que as gráficas das funcións inversas son simétricas respecto a recta bisectriz do primeiro e terceiro cuadrante, $y = x$.

Debemos ter claro que unha cousa é a función inversa de $f(x)$ e outra cousa é a inversa da función $f(x)$. Para calcular a inversa de calquera función debemos seguir unha serie de pasos que os veremos no seguinte exemplo e tamén observaremos a diferenza entre inversa e funcións inversas.

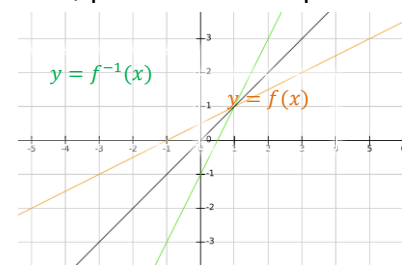


Ilustración 13: Funcións inversas

Exemplo

Calcula a función inversa das seguintes funcións e a súas inversas:

a) $f(x) = 3x + 2$ b) $g(x) = e^x$

a) Cálculo da función inversa de $f(x) = 3x + 2$, é o mesmo escribir $y = 3x + 2$

- Cabiamos a x pola $y \Rightarrow x = 3y + 2$
- Despexamos a $y \Rightarrow y = \frac{x-2}{3}$
- Escribimos a fórmula $\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$

Cálculo da inversa de $f(x) = 3x + 2$; $h(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{3x+2}$

b) Cálculo da función inversa de $g(x) = e^x$, é o mesmo escribir $y = e^x$

- Cabiamos a x pola $y \Rightarrow x = e^y$
- Despexamos a $y \Rightarrow y = \ln x$
- Escribimos a fórmula $\Rightarrow f^{-1}(x) = \ln x$

Cálculo da inversa de $g(x) = e^x$; $h(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{e^x}$

Comprobemos para o apartado a) $f(x) = 3x + 2$; $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$ que una é inversa da outra:

$(f^{-1} \circ f)(x) = x$ e $(f \circ f^{-1})(x) = x$

$x \rightarrow f(x) = 3x + 2 \rightarrow f^{-1}(3x + 2) = \frac{(3x + 2) - 2}{3} = x$

$x \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3} \rightarrow f\left(\frac{x-2}{3}\right) = 3\left(\frac{x-2}{3}\right) + 2 = x$

4. Uso de ferramentas dixitais

A maioría dos gráficos que se poden ver nesta unidade está realizados co programa GeoGebra. É un programa sinxelo de manexar, simplemente basta con teclear a expresión da función e pulsar ENTER.



Vexamos algún exemplo.

Representemos $f(x) = x^2 - 2x \Rightarrow$

Tecleemos x^2-2x e demos ENTER.

Se desexamos cambiar cores, escala, trazo,... debermos ir a propiedades:

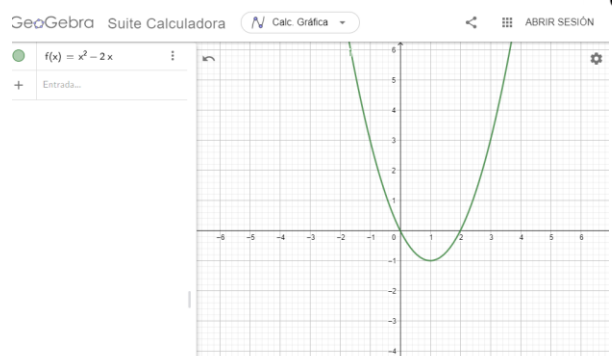


Ilustración 14: GeoGebra

Propiedades

Existen máis programas informáticos como Mathway o FooPlot, cos cales tamén podemos representar funcións son moi sinxelos de manexar pero máis difíciles de facer modificacións nas gráficas e con algunhas restricións.

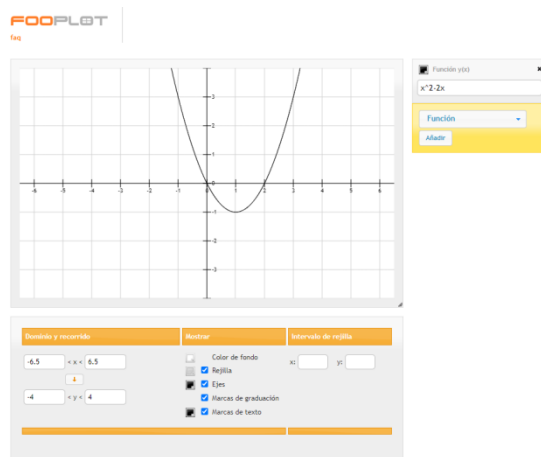


Ilustración 15: FooPlot

Como nas outras unidades recordar que as ferramentas dixitais son útiles e nos axudan, pero sempre e cando teñamos claros os conceptos son recomendables a súa utilización.

Licenzas das ilustracións

Ilustración	Recurso
<i>Ilustración 1: Exemplo gráfico dunha relación que non é función</i>	Autoría: Propia
<i>Ilustración 2: Exemplo gráfico dunha función</i>	Autoría: Propia
<i>Ilustración 3: Función billa</i>	Autoría: Propia
<i>Ilustración 4: Dominio e imaxe</i>	Autoría: Propia
<i>Ilustración 5: Oposicións xunta</i>	Autoría: INE Licenza: Dominio público Procedencia: https://www.buscaoposiciones.com/ultconv/graficos/SerieHistoricaPlazasConvocadasOposicionesXuntaDeGalicia.png
<i>Ilustración 6: Cortes cos eixes</i>	Autoría: Propia
<i>Ilustración 7: Función par</i>	Autoría: propia
<i>Ilustración 8: Función impar</i>	Autoría: Propia
<i>Ilustración 9: Monotonía dunha función</i>	Procedencia: Unidades didácticas educación secundaria para persoas adultas. http://www.edu.xunta.gal/portal/sites/web/files/act_modulo_4_unidad_3_cas.pdf
<i>Ilustración 10: Máximos e mínimos</i>	Autoría: Propia
<i>Ilustración 11: Función seno</i>	Autoría: Propia
<i>Ilustración 12: Asíntota</i>	Autoría: Propia
<i>Ilustración 13: Funcións inversas</i>	Autoría: Propia
<i>Ilustración 14: GeoGebra</i>	Autoría: Propia
<i>Ilustración 15: FooPlot</i>	Autoría: Propia