DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Ilustración de Paloma Valdivia Barría para el cuento "La extraordinaria Emmy Noether"

Matemáticas II

10 de outubro de 2025

IES CARLOS CASARES

Nome: ______________________________

1 1,5 ptos	2 1 ptos	3 1 ptos	Nota

(Se non hai indicacións, todos os apartados valen o mesmo)

1. Dada a función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+a}{2x-4} & \text{se } x \leq 0 \\ 10x^2 + x + b & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

a) Atopa a condición que teñen que cumprir os parámetros a e b para que a función $y = f(x)$ sexa continua.

b) Calcule $f'(x)$.

c) Atopa a condición que teñen que cumprir os parámetros a e b para que a función $y = f(x)$ sexa derivable.

(Baleares Ordinaria 2022)

2. Calcula os seguintes límites (non se pode usar L'Hôpital nos dous apartados):

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x + (1-x)^2 - 1}{\ln(\cos x)}$ (Extremadura Xuño 2017)

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{2x-1}}{1-x}$ (Castilla y León Extraordinaria 2020)

3. a) Considera as funcións$f$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 3 - x^2$ e $g(x) = -\dfrac{x^2}{4}$. Calcula a ecuación da recta tanxente á gráfica de f no punto de abscisa $x = 1$ e comproba que tamén é tanxente á gráfica de g. Determina o punto de tanxencia coa gráfica de g. (Andalucía Xuño 2018)

b) Enuncia o teorema de Bolzano. (Múltiples exames Galicia)

1. Dada a función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+a}{2x-4} & \text{se } x \leq 0 \\ 10x^2+x+b & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

a) Atopa a condición que teñen que cumprir os parámetros a e b para que a función $y = f(x)$ sexa continua.

b) Calcule $f'(x)$.

c) Atopa a condición que teñen que cumprir os parámetros a e b para que a función $y = f(x)$ sexa derivable.

(Baleares Ordinaria 2022)

a) A función é continua en $(-\infty, 0)$ porque é un cociente de polinomios e o denominador non se anula nese intervalo.

A función é continua en $(0, +\infty)$ porque é unha función polinómica.

Imos analizar que ocorre en $x=0$. Para que sexa continua en $x=0$ ten que cumplir que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2+a}{2x-4} = -\dfrac{a}{4} = f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 10x^2+x+b = b \end{array}\right\} \text{logo para que sexa continua: } -\dfrac{a}{4} = b \Rightarrow a = -4b$$

b) $$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x(2x-4)-(x^2+a)\cdot 2}{(2x-4)^2} & x<0 \\ 20x+1 & x>0 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{2x^2-8x-2a}{(2x-4)^2} & x<0 \\ 20x+1 & x>0 \end{cases}$$

c) A función é derivable en $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ por razóns análogas ás do apartado a).

Analizamos que pasa en $x=0$. Para que a función sexa derivable ten que verificar $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x^2-8x-2a}{(2x-4)^2} = \dfrac{-2a}{(-4)^2} = \dfrac{-2a}{16} = -\dfrac{a}{8} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x+1 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Para que sexa derivable} \\ -\dfrac{a}{8} = 1 \Rightarrow a = -8 \end{array}$$

Para que a función sexa derivable ten que ser continua, logo $a = -4b \Rightarrow$
$\Rightarrow -8 = -4b \Rightarrow b = 2$

Para que a función sexa derivable $a = -8$, $b = 2$.

2. Calcula os seguintes límites (non se pode usar L'Hôpital nos dous apartados):

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x + (1-x)^2 - 1}{\ln(\cos x)}$ (Extremadura Xuño 2017)

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{2x - 1}}{1 - x}$ (Castilla y León Extraordinaria 2020)

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 2x + (1-x)^2 - 1}{\ln(\cos x)} = \dfrac{0}{0}$ indeterminación

$\Vert \leftarrow$ L'Hôpital

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\cos 2x) \cdot 2 + 2(1-x)\cdot(-1)}{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\text{sen} x)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\cos 2x - 2(1-x)}{-\text{tg } x} = \dfrac{0}{0}$ indeterminac.

$\Vert \leftarrow$ L'Hôpital

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2(-\text{sen } 2x)\cdot 2 - 2\cdot(-1)}{1 + \text{tg}^2 x} = \dfrac{2}{1} = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{2x-1}}{1-x} = \dfrac{0}{0}$ indeterminación

$\Vert$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(\sqrt{x^2-x+1} - \sqrt{2x-1})(\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{2x-1})}{(1-x)(\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{2x-1})} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x + 1 - (2x-1)}{(1-x)(\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{2x-1})} =$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(1-x)(\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{2x-1})} = \dfrac{0}{0}$ indeterminación

$\Vert$

$= \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{-(x-1)(\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{2x-1})} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-2}{-(\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{2x-1})} = \dfrac{1-2}{-(\sqrt{1} + \sqrt{1})} = \dfrac{1}{2}$

3. a) Considera as funcións$f$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 3-x^2$ e $g(x) = -\dfrac{x^2}{4}$. Calcula a ecuación da recta tanxente á gráfica de f no punto de abscisa $x = 1$ e comproba que tamén é tanxente á gráfica de g. Determina o punto de tanxencia coa gráfica de g. (Andalucía Xuño 2018)

b) Enuncia o teorema de Bolzano. (Múltiples exames Galicia)

a) A ecuación da recta tanxente en $x=1$ é: $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

Como $f'(x) = -2x$, temos que a recta é: $y - 2 = (-2)(x-1)$

$$y = -2x + 2 + 2 = -2x + 4$$

Temos a recta que é tanxente a $f(x)$ en $x=1$. Esa mesma recta é tanxente a g, é queremos saber en que punto. Consideramos que ese punto é "a", logo a recta tanxente vai ser: $y - g(a) = g'(a)(x-a)$

$g'(x) = -\frac{2x}{4} = -\frac{x}{2}$

Recta tanxente: $y - \frac{a^2}{4} = -\frac{a}{2}(x-a) \Rightarrow y = -\frac{ax}{2} + \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = -\frac{a}{2}x + \frac{a^2}{4}$

Ten que coincidir coa recta que temos; logo:

$-\frac{a}{2} = -2 \Rightarrow a = 4$

$\frac{a^2}{4} = 4 \longrightarrow$ Se $a=4$ efectivamente se cumple

Logo o punto buscado é $a=4$.

b) TEOREMA DE BOLZANO: Sexa $f(x)$ unha función continua no intervalo $[a,b]$ que cumpre que $f(a) \cdot f(b) < 0$ (é dicir, o signo de $f(a)$ e diferente do signo de $f(b)$. Entón existe $c \in (a,b)$ que verifica que $f(c) = 0$.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Ilustración de Paloma Valdivia Barría para el cuento "La extraordinaria Emmy Noether"

Matemáticas II

30 de outubro de 2025

IES CARLOS CASARES

Nome: ____

1 1 ptos	2 1 ptos (0,75 + 0,25)	3 1,5 ptos (0,5 + 0,25 + 0,25 + 0,5)	Nota

(Se non hai indicacións, todos os apartados valen o mesmo)

1. Sexa $g(x) = x - \sin x$ con $x \in \mathbb{R}$

   a) Estudia os intervalos de crecemento e decrecemento de $g(x)$

   b) Obtén os máximos e mínimos absolutos de $g(x)$ no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

   (Aragón 2025)

2. Na empresa "MARKOAK" fabrican marcos para cadros. Nesta ocasión lles solicitaron marcos para 274 cadros rectangulares. Todos os cadros teñen as mesmas dimensións e unha superficie de 0,3 m^2. Para cada marco van emplear dous tipos de material: as partes horizontais serán dun material cuio coste é de 12 €/m y para as verticais utilizarán un material cuio coste é de 10 €/m. A empresa que realiza o pedido quere pagar o mínimo posible. Calcula:

   1. Cales deben ser as medidas dos cadros para pagar o mínimo posible?
   2. A canto ascenderá a factura?

   (País Vasco Ordinaria 2025)

3. a) Enuncia o teorema de Rolle. (Galicia múltiples anos)

   b) Considera a función $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$.

   I. Comproba que $f(2) = f(-2)$.

   II. Comproba que non existe $c \in [-2, 2]$ tal que $f'(c) = 0$.

   III. Hai unha contradición coa conclusión do teorema de Rolle?

   (Balears Ordinaria 2021)

1. Sexa $g(x) = x - \sin x$ con $x \in \mathbb{R}$

   a) Estudia os intervalos de crecemento e decrecemento de $g(x)$

   b) Obtén os máximos e mínimos absolutos de $g(x)$ no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

(Aragón 2025)

a) Para estudiar a monotonía da función, calculamos a súa derivada.

$g'(x) = 1 - \cos x$

Vemos que puntos poden ser extremos resolvendo $g'(x)=0$.

$g'(x)=0 \Rightarrow 1-\cos x = 0 \Rightarrow 1 = \cos x \Rightarrow x=0,\ x=2\pi,\ x=4\pi, \dots$

$\{x / x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}\}$

Os posibles extremos son as solucións da ecuación, analizamos o signo da función derivada a cada lado dos extremos:

$$\underset{\quad\quad\quad 2k\pi}{f'(x)>0 \,\big|\, f'(x)>0}$$

A función é crecente en todo o seu dominio.

OUTRA POSIBLE SOLUCIÓN:

Para analizar o crecemento da función, analizaremos o signo da función derivada.

$g'(x) = 1 - \cos x$

O $\cos x < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo $1 - \cos x > 0$ para todo x.

A función derivada vai ser sempre positiva, logo $f'(x)$ vai ser sempre crecente.

b) A función é sempre crecente, o intervalo é pechado, logo o mínimo será o extremo inferior do intervalo e o máximo o superior

(NOTA: Observa que se o intervalo fose aberto non poderíamos decir cal e o extremo porque non sabemos cal é o número máis pequeno que podemos tomar, ou o máis grande)

Punto mínimo: $x = \pi/2$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 1 = 0{,}57$

Punto máximo: $x = \pi$, $f(\pi) = \pi - \operatorname{sen} \pi = \pi - 0 = \pi$

2. Na empresa "MARKOAK" fabrican marcos para cadros. Nesta ocasión lles solicitaron marcos para 274 cadros rectangulares. Todos os cadros teñen as mesmas dimensións e unha superficie de 0,3 m^2. Para cada marco van emplear dous tipos de material: as partes horizontais serán dun material cuio coste é de 12 €/m y para as verticais utilizarán un material cuio coste é de 10 €/m. A empresa que realiza o pedido quere pagar o mínimo posible. Calcula:

   1. Cales deben ser as medidas dos cadros para pagar o mínimo posible?
   2. A canto ascenderá a factura?

(País Vasco Ordinaria 2025)

$\longrightarrow xy = 0{,}3 \Rightarrow y = \frac{0{,}3}{x}$

Compra 274, quero saber o gasto mínimo, con que calcular o valor mínimo para un só cadro basta e logo se multiplica polo número de cadros.

Prezo: $f(x,y) = 2\cdot 12x + 2\cdot 10y \longrightarrow f(x) = 24x + 20\frac{0{,}3}{x} = 24x + \frac{6}{x}$

Para saber o prezo mínimo, calculamos o mínimo da función:

$f'(x) = 24 - \frac{6}{x^2}$

Extremos $f'(x) = 0 \Rightarrow 24 - \frac{6}{x^2} = 0 \Rightarrow 24 = \frac{6}{x^2} \Rightarrow 24x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$$x = \pm\frac{1}{2}$$

No contexto a solución $x = -\frac{1}{2}$ non ten sentido, polo tanto a descartamos.

Vemos se $x = 1/2$ é mínimo.

$f'(x)<0$	$f'(x)>0$
decrece	crece

$1/2$ $\longrightarrow$ Logo $x = 1/2$ é un mínimo

$y = \frac{0{,}3}{x} \xrightarrow[x=0{,}5]{} y = \frac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$

Logo para que se pague o mínimo o lado que vale 12€/m ten que ser de 0,5 m, e o outro de 0,6 m.

b) Un cadro vale $24\cdot 0{,}5 + 20\cdot 0{,}6 = 12 + 12 = 24€$

Temos 274 cadros, logo: $274\cdot 24 = 6576€$

3. a) Enuncia o teorema de Rolle. (Galicia múltiples anos)

b) Considera a función $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$.

I. Comproba que $f(2) = f(-2)$.

II. Comproba que non existe $c \in [-2, 2]$ tal que $f'(c) = 0$.

III. Hai unha contradición coa conclusión do teorema de Rolle?

(Balears Ordinaria 2021)

a) TEOREMA DE ROLLE. Sexa $f(x)$ unha función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) e tal que $f(a) = f(b)$. Entón existe $c \in (a,b) \,/\, f'(c) = 0$.

b) I. $f(2) = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16}$

$f(-2) = \dfrac{1}{(-2)^4} = \dfrac{1}{16}$

Efectivamente, $f(2) = f(-2)$

II. $f'(x) = -\dfrac{4}{x^5}$ $\quad f'(x) = 0 \Rightarrow -\dfrac{4}{x^5} = 0 \Rightarrow -4 = 0$ Non pasa nunca, logo non existe $c \,/\, f'(c) = 0$.

III. Non contradice o teorema de Rolle porque para poder aplicar este teorema a función ten que ser continua no intervalo. Esta función non é continua en $[-2, 2]$ xa que $0 \in [-2,2]$ non pertenece ao dominio.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Ilustración de Paloma Valdivia Barria para el cuento "La extraordinaria Emmy Noether"

Matemáticas II

13 de novembro de 2025

IES CARLOS CASARES

Nome: ____________________

1 1 pto	2 1 pto	3 1 pto	Nota

(Se non hai indicacións, todos os apartados valen o mesmo)

1. Calcula as seguintes integrais:

   a) $\displaystyle\int (x^2-3)(4x+1)dx$

   b) $\displaystyle\int \frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$

2. Calcula as seguintes integrais:

   a) $\displaystyle\int \sin(2x+3)\cos(x-1)dx$

   b) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+6x+5}dx$

3. Calcula as seguintes integrais:

   a) $\displaystyle\int \frac{-5\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx$

   b) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}-b)^2}{\sqrt{x}}dx$

1. Calcula as seguintes integrais:

a) $\int (x^2-3)(4x+1)dx$

b) $\int \frac{e^x+e^{-x}}{2}dx$

a) $\int (x^2-3)(4x+1)dx = \int (4x^3+x^2-12x-3)dx = x^4+\frac{x^3}{3}-6x^2-3x+C$

b) $\int \frac{e^x+e^{-x}}{2}dx = \int \frac{e^x}{2}dx + \int \frac{e^{-x}}{2}dx = \frac{1}{2}\int e^x dx - \frac{1}{2}\int -e^{-x}dx = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} + C = \frac{e^x-e^{-x}}{2}+C$

2. Calcula as seguintes integrais:

a) $\int \sin(2x+3)\cos(x-1)dx$

b) $\int \frac{x+3}{x^2+6x+5}dx$

a) $\int \operatorname{sen}(2x+3)\cos(x-1)dx = \int \frac{\operatorname{sen}(3x+2)+\operatorname{sen}(x+4)}{2}dx =$

$= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(3x+2)dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(x+4)dx = -\frac{1}{6}\cos(3x+2) - \frac{1}{2}\cos(x+4) + C$

b) $\int \frac{x+3}{x^2+6x+5}dx$ $\quad \begin{cases} t = x^2+6x+5 \\ dt = (2x+6)dx \end{cases} \Rightarrow dt = 2(x+3)dx$

$\frac{dt}{2} = (x+3)dx$

$\int \frac{dt/2}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+6x+5| + C$

3. Calcula as seguintes integrais:

a) $\int \frac{-5\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}dx$

b) $\int \frac{(\sqrt{x}-b)^2}{\sqrt{x}}dx$

a) $t = 1+\operatorname{sen} x \Rightarrow dt = \cos x\, dx$

$\int \frac{-5}{\sqrt{t}}dt = -5\frac{t^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = -5\frac{\sqrt{t}}{1/2} + C =$

$= -10\sqrt{1+\operatorname{sen} x} + C$

b) $t = \sqrt{x} - b \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow 2dt = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$\int t^2 \cdot 2\cdot dt = 2\frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{3}(\sqrt{x}+b)^3 + C$