

1. **Extraordinaria 2025.** Responda as dúas cuestións seguintes:

- a) Enuncie o teorema do valor medio do cálculo diferencial.
- b) (TEMA INTEGRAIS)

Solución:

a) Teorema do valor medio do cálculo diferencial: Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é continua en $[a, b]$ e derivable en (a, b) , entón existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

2. **Ordinaria 2024.** Responde aos seguintes apartados:

- a) Enuncie os teoremas de Rolle e de Bolzano
- b) (TEMA INTEGRAIS)

Solución:

a) Teorema de Rolle: Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é continua en $[a, b]$ e derivable en (a, b) e tal que $f(a) = f(b)$, entón existe algún $c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = 0$.

Teorema de Bolzano: Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é continua en $[a, b]$ e toma valores de distinto signo nos extremos do intervalo, é dicir, $f(a) \cdot f(b) < 0$, entón existe algún $c \in (a, b)$, tal que $f(c) = 0$.

3. **Extrordinaria 2023.** Responda os dous subapartados seguintes:

- a) Enuncie os teoremas de Rolle e do valor medio do cálculo diferencial.
- b) Explique se $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, está ou non nas hipóteses do teorema do valor medio do cálculo diferencial. En caso de que o estea, calcule un valor c para o cal se cumpra a tese dese teorema.

Solución:

a) Teorema de Rolle: Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é continua en $[a, b]$ e derivable en (a, b) e tal que $f(a) = f(b)$, entón existe algún $c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = 0$.

Teorema do valor medio do cálculo diferencial: Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é continua en $[a, b]$ e derivable en (a, b) , entón existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

b) A función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ é continua no intervalo $[0, 1]$ xa que se trata dun radical que vai ser sempre positivo.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

que é derivable no intervalo aberto $(0, 1)$.

Polo tanto estamos nas hipóteses do teorema do valor medio do cálculo diferencial. Polo que existirá $c \in (0, 1)$ tal que $f(1) - f(0) = f'(c)(1 - 0)$, é dicir,

$$0 - 1 = f'(c) \implies f'(c) = \frac{-c}{\sqrt{1-c^2}} = -1$$

$$\frac{-c}{\sqrt{1-c^2}} = -1 \implies c = \sqrt{1-c^2} \implies c^2 = 1-c^2 \implies 2c^2 = 1 \implies c = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

No intervalo $(0, 1)$ so está $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$, que como estabamos a resolver unha ecuación con radicais, comprobamos que efectivamente é solución da ecuación inicial:

$$\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}} = -1 \implies \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{1-\frac{2}{4}}} = -1 \implies \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = -1, \text{ que racionalizando o denominador temos que efectivamente é certo.}$$

Polo tanto o valor de c buscado é $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Ordinaria 2023. a) (TEMA LÍMITES E DERIVADAS).

b) Estude se a función $f(x) = x + \sin x$ ten extremos ou puntos de inflexión no intervalo $(0, 2\pi)$, diga onde están en caso de que existan e esboce a gráfica de $f(x)$ nese intervalo.

Solución:

b) Para calcular os extremos derivamos a función, posto que de ter extremos, estes cumprirán que $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 1 + \cos x$$

Neste caso $f'(x) = 0 \implies 1 + \cos x = 0 \implies \cos x = -1$, logo as solucións son $\{x \mid x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Das solucións no intervalo pedido está $x = \pi$.

Comprobamos se é extremo. En $(0, \pi)$, $f'(x) > 0$, e en $(\pi, 2\pi)$, $f'(x) > 0$. Logo a función crece aos dous lados de $x = \pi$, o que quere dicir que non é un extremo.

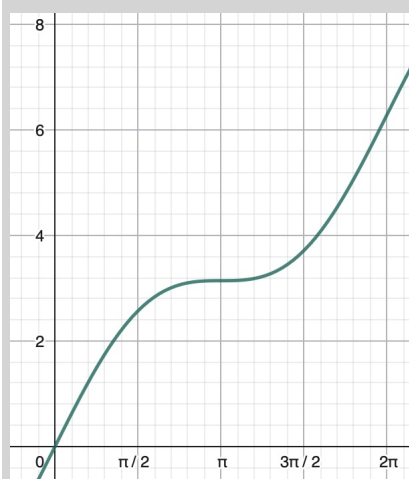
Vemos os puntos de inflexión. De existir, os puntos de inflexión cumprirán que $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = -\sin x$$

Neste caso $f''(x) = 0 \Rightarrow -\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$, logo as solucións son $\{x \mid x = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Das solucións no intervalo pedido está $x = \pi$.

É punto de inflexión? En $(0, \pi)$, $f''(x) < 0$, e en $(\pi, 2\pi)$, $f''(x) > 0$. Logo a función pasa de cóncava a convexa en $x = \pi$, o que quere dicir que é un punto de inflexión.

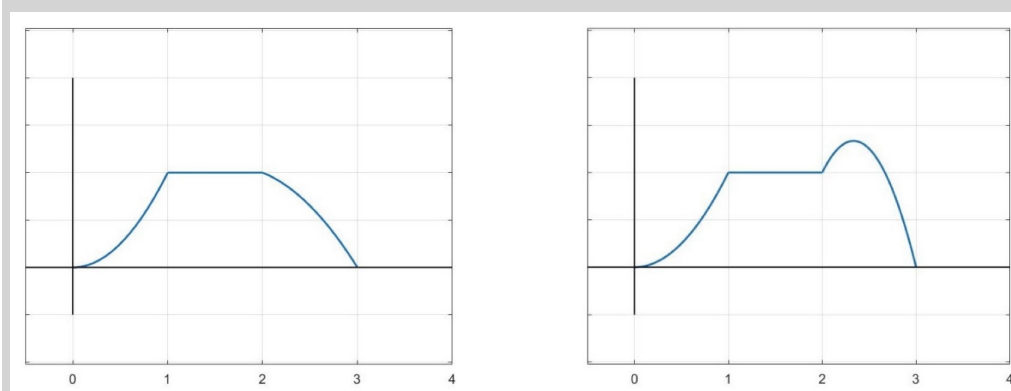


5. **Ordinaria 2022.** a) (TEMA LÍMITES E DERIVADAS)

b) Debuxa a gráfica dunha función f continua e non negativa no intervalo $[0, 3]$ tal que $f(0) = 0$, $f(3) = 0$, $f'' > 0$ no intervalo $(0, 1)$, $f'' < 0$ no intervalo $(2, 3)$ e f é constante no intervalo $(1, 2)$.

Solución:

b) Sabemos que a función é convexa en $(0, 1)$ e cóncava en $(2, 3)$. Atendendo as outras características que se indican algúns exemplos de solución son:



6. **Extraordinaria 2021.** a) (TEMA LÍMITES E DERIVADAS)

b) Obteña os valores a, b, c que fan que $f(x) = ax^3 + bx^2 - 3x + c$ cumpra $f(0) = 1$ e teña extremos relativos en $x = \pm 1$. Dicar logo se os extremos son

máximos ou mínimos.

Solución:

b) Se $f(0) = 1 \implies a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + c = 1 \implies c = 1$.

Por outro lado, se $f(1)$ e $f(-1)$ son extremos, cúmprese que $f'(1) = 0$ e $f'(-1) = 0$.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 3$, polo que:

■ $f'(1) = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 - 3 = 0 \implies 3a + 2b - 3 = 0$

■ $f'(-1) = 3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) - 3 = 0 \implies 3a - 2b - 3 = 0$

Resolvemos o sistema e temos que $a = 1, b = 0$

Os valores buscados son $a = 1, b = 0, c = 1$ e a función $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

7. **Extraordinaria 2021.** a) Enuncie o teorema de Rolle.

b) (TEMA INTEGRAIS)

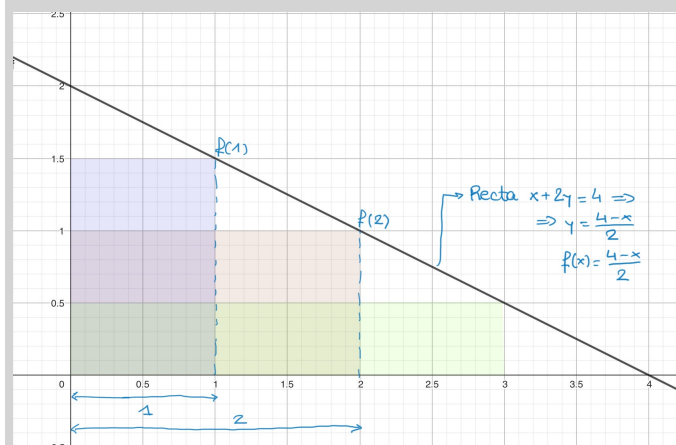
Solución:

a) Teorema de Rolle: Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é continua en $[a, b]$ e derivable en (a, b) e tal que $f(a) = f(b)$, entón existe algún $c \in (a, b)$, tal que $f'(c) = 0$.

8. **Ordinaria 2021** De entre tódolos rectángulos situados no primeiro cuadrante que teñen dous lados sobre os eixes de coordenadas e un vértice sobre a recta $x + 2y = 4$, determine os vértices do que ten maior área.

Solución:

Primeiro debuxamos a situación que temos, que son rectángulos con lados nos eixos e un vértice na recta indicada:



Chamamos x á base, a altura do rectángulo será $f(x)$, sendo a función a que define a recta na que está o vértice.

$$\text{A área do rectángulo ven dada por } A(x) = x \cdot f(x) = x \frac{4-x}{2} = \frac{4x-x^2}{2}$$

Temos a función área e queremos saber o seu máximo. Se ten máximo, nese punto cumprirase que $A'(x) = 0$.

$$A'(x) = \frac{1}{2}(4-2x) = 2-x$$

$$A'(x) = 0 \implies 2-x = 0 \implies x = 2$$

Comprobamos se é máximo ese punto: en $(-\infty, 2)$, $A'(x) > 0$, polo que a función crece, e en $(2, +\infty)$, $A'(x) < 0$, polo que a función decrece. É dicir, a esquerda do extremo crece e a dereita decrece, polo que o punto é máximo.

A base do rectángulo de maior área será 2, polo que a altura será $f(2) = 1$. E os vértices deste rectángulo son: $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 1)$.

9. **Ordinaria 2020** a) (TEMA LÍMITES E DERIVADAS).

b) Determine os intervalos de crecemento e decrecemento de $f(x) = x(\ln x - 1)$. Calcule, se existen, os máximos e os mínimos relativos da función f .

Solución:

b) Para analizar os intervalos e os extremos da función, calculamos a función derivada:

$$f'(x) = \ln x - 1 + x \frac{1}{x} = \ln x$$

Os extremos, de existir cumpren: $f'(x) = 0 \implies \ln x = 0 \implies x = 1$.

- En $(0, 1)$, $f'(x) < 0$, logo a función decrece
- En $(1, +\infty)$, $f'(x) > 0$, logo a función crece.

Polo tanto, $x = 1$ é un mínimo da función.