

PROBABILIDADE

Exercicios autoavaliables

1. Calcula o número de posibilidades de elixir tres modelos de teléfono de entre 7 modelos diferentes.
2. Calcula as posibilidades de colocar 6 plantas en 6 macetas.
3. Nun hospital, o 35% dos enfermos padecen a enfermidade A, o 20% a enfermidade B, e o 10% as dúas enfermidades. Se eliximos un paciente ao azar:
 - a) Calcula a probabilidade de que non este enfermo.
 - b) Se padece a enfermidade B, cal é a probabilidade de que non padeza A?
4. Elíxese ao azar un dos 100 primeiros números naturais. Calcula a probabilidade de que sexa un cadrado perfecto sabendo que é múltiplo de 5.
5. Extraemos dúas cartas dunha baralla española. Cal é a probabilidade de que algunha delas sexa un as?
6. Un experimento consiste en extraer catro cartas con substitución, dunha baralla. Calcula a probabilidade de que a primeira sexa de ouro, a segunda de copas, a terceira un rei e a cuarta un cabalo.
7. Consideramos o experimento que consiste en coller ao azar tres froitas dun froiteiro e comelas. No froiteiro temos 4 laranxas, 2 mazás e 6 plátanos. Calcula a probabilidade de tomar primeiro unha laranxa, segundo un plátano e por último unha mazá.
8. Dunha bolsa na que hai 7 bólas brancas, 5 azuis e 3 verdes elíxense dúas bólas
 - a) Cal é a probabilidade de que as dúas sexan brancas?
 - b) Cal é a probabilidade de que polo menos unha sexa branca?
9. Para comprobala eficacia dunha vacina contra a gripe, faise un estudo cunha mostra de 700 persoas obtendo os resultados que aparecen na táboa.
 - a) Cal é a probabilidade de collela gripe?
 - b) Cal é a probabilidade de estar vacunado?
 - c) Cal é a probabilidade de collela gripe ou estar vacunado?
 - d) Cal é a probabilidade de collela gripe e estar vacunado?
 - e) Cal é a probabilidade de collela gripe estando vacunado?

	Collen a gripe	Non collen a gripe
Vacinados	135	365
Sen Vacinar	84	116

10. Nun dado trucado, as probabilidades de obter cada un dos números 1, 2, 3, 4 e 5 nun lanzamento son $P(1) = \frac{1}{25}$, $P(2) = \frac{1}{20}$, $P(3) = \frac{1}{15}$, $P(4) = \frac{1}{10}$, $P(5) = \frac{1}{5}$

- a) Cal é a probabilidade de obter un 6 nun lanzamento?
- b) Calcula a probabilidade de obter un 4 ou un 5 nun lanzamento.
- c) Calcula a probabilidade de A: obter número impar o B: obter un 4 ou un 5.
- d) Cal é a probabilidade de que se facemos catro lanzamentos consecutivos as tres primeiras veces obteñamos un 6 e a cuarta obteñamos un 5? E de obter al menos un 5?

11. Nunha clase de 10 alumnos distribúense 3 premios. Pescuda de cantos modos pode facerse se:

- a) Os premios son iguais.
- b) Os premios son diferentes.

12. Sexan A e B dous sucesos dun experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,4$, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,5$ e $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,7$. Calcula a $P(B)$

Solucións

1. Calcula o número de posibilidades de elixir tres modelos de teléfono de entre 7 modelos diferentes.

Non se collen todos os elementos, a orden NON importa e NON se poden repetir tratase entón de combinacións de 7 elementos tomados de 3 en 3:

$$C_{7,3} = \binom{7}{3} = 35$$

2. Calcula as posibilidades de colocar 6 plantas en 6 macetas.

Como interveñen todos os elementos e non se repiten tratase de permutacións de 6 elementos:
 $P_6 = 6! = 720$

3. Nun hospital, o 35% dos enfermos padecen a enfermidade A, o 20% a enfermidade B, e o 10% as dúas enfermidades. Se eliximos un paciente ao azar:

- Calcula a probabilidade de que non este enfermo.
- Se padece a enfermidade B, cal é a probabilidade de que non padeza A?

Definimos os seguintes sucesos e as súas probabilidades:

$A =$ "padecer a enfermidade A"

$B =$ "padecer a enfermidade B"

$A \cap B =$ "padecer ámbalas dúas enfermidades"

$P(A) = 0,35$ $P(B) = 0,2$ $P(A \cap B) = 0,1$

Organizamos os datos nunha táboa ou calculamos as probabilidades pedidas, neste caso construímos unha táboa

	B	$\bar{B}$	
A	10	25	35
$\bar{A}$	10	55	65
Total	20	80	100

a) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{55}{100} = 0,55$

b) $P(\bar{A}/B) = 10/20 = 0,5$

4. Elíxese ao azar un dos 100 primeiros números naturais. Calcula a probabilidade de que sexa un cadrado perfecto sabendo que é múltiplo de 5.

Determinamos os seguintes sucesos:

$A =$ "elixir un cadrado perfecto"

$B =$ "elixir un múltiplo de 5"

Sabemos que o suceso B verifícase, polo tanto temos que calcular a probabilidade condicionada $P(A/B)$

O conxunto $A = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$ e $A \cap B = \{25, 100\}$

Calculamos:

$$P(A) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$



$$P(A \cap B) = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} = 0,02$$

Co que se ten que aplicando a definición de probabilidade condicionada:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1/5 = 0,2$$

5. Extraemos dúas cartas dunha baralla española. Cal é a probabilidade de que algunha delas sexa un as?

Nesta situación o máis sinxelo e facelo usando o suceso contrario que non saia ningún as:

$$\begin{aligned} P(\text{algún as}) &= 1 - P(\text{nun ningún as}) = 1 - P(\text{non as a } 1^{\text{a}}) \cdot P(\text{non as a } 2^{\text{a}}/\text{non as a } 1^{\text{a}}) = \\ &= 1 - \frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} = \frac{5}{26} = 0,19 \end{aligned}$$

6. Un experimento consiste en extraer catro cartas con substitución, dunha baralla. Calcula a probabilidade de que a primeira sexa de ouro, a segunda de copas, a terceira un rei e a cuarta un cabalo.

Temos que calcular a probabilidade da intersección de catro sucesos, como hai substitución o que ocorra en cada extracción non afecta a o resto, así que son sucesos independentes:

$$P(1^{\text{a}}\text{ouro} \cap 2^{\text{a}}\text{copas} \cap 3^{\text{a}}\text{rei} \cap 4^{\text{a}}\text{cabalo}) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = 0,0006$$

7. Consideramos o experimento que consiste en coller ao azar tres froitas dun froiteiro e comelas. No froiteiro temos 4 laranxas, 2 mazás e 6 plátanos. Calcula a probabilidade de tomar primeiro unha laranxa, segundo un plátano e por último unha mazá.

Temos os seguintes sucesos:

A_1 = "Tomar unha laranxa en primeiro lugar "

B_2 = "Tomar un plátano e segundo lugar"

C_3 = "Tomar unha mazá en terceiro lugar"

O suceso que nos piden é a intersección dos tres $P(A_1 \cap B_2 \cap C_3)$ coma neste caso son sucesos dependentes temos que ter en conta as probabilidades condicionadas, e o espazo vai cambiando:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap B_2 \cap C_3) &= P(A_1 \cap B_2) \cdot P(C_3/(A_1 \cap B_2)) = P(A_1) \cdot P(B_2/A_1) \cdot P(C_3/(A_1 \cap B_2)) = \frac{4}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{2}{10} = \\ &= \frac{2}{55} = 0,036 \end{aligned}$$

8. Dunha bolsa na que hai 7 bólas brancas, 5 azuis e 3 verdes elíxense dúas bólas

a) Cal é a probabilidade de que as dúas sexan brancas?

b) Cal é a probabilidade de que polo menos unha sexa branca?

O problema pode resolverse mediante un diagrama en árbore, ou ben usando a a combinatoria. Nesta ocasión optaremos polo segundo método.

a) Dado que tódalas bolas teñen as mesmas posibilidades de ser elixidas, podemos utiliza-las probabilidades de Laplace.



- Casos posibles (xeitos de elixir 2 bolas entre 15): Na elección non poden repetirse (pode repetirse a cor, pero non a bola) e non se ten en conta a orde. Trátase de combinacións de 15 elementos elixidos de 2 en 2:

$$C_{15,2} = \binom{15}{2} = \frac{15!}{(15-2)! \cdot 2!} = 105$$

- Casos favorables (xeitos de elixir 2 bolas entre 7):

$$C_{7,2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{(7-2)! \cdot 2!} = 21$$

$$P(\text{sexan brancas}) = \frac{21}{105} = 0,2$$

b) É máis doado polo complementario: ningunha sexa branca.

$$P(\text{polo menos unha branca}) = 1 - P(\text{ningunha branca}) = 1 - \frac{C_{8,2}}{C_{15,2}} = 1 - \frac{28}{105} = \frac{77}{105} = 0,73$$

9. Para comprobala eficacia dunha vacina contra a gripe, faise un estudo cunha mostra de 700 persoas obtendo os resultados que aparecen na táboa.

- Cal é a probabilidade de collela gripe?
- Cal é a probabilidade de estar vacinado?
- Cal é a probabilidade de collela gripe ou estar vacinado?
- Cal é a probabilidade de collela gripe e estar vacinado?
- Cal é a probabilidade de collela gripe estando vacinado?

	Collen a gripe	Non collen a gripe
Vacinados	135	365
Sen Vacinar	84	116

O obxectivo deste problema é que aprendas a diferenciar entre as diferentes operacións con sucesos (unión, intersección, condicionado).

O experimento aleatorio é elixir ó chou unha persoa da mostra e, como a probabilidade de elixir a cada unha é a mesma, podemos utiliza-las probabilidades de Laplace.

Sexan os sucesos: $A = \{\text{colle-la gripe}\}$ e $B = \{\text{estar vacinado}\}$

$$a) P(A) = \frac{135+84}{700} = 0,31$$

$$b) P(B) = \frac{135+365}{700} = 0,71$$

$$c) P(\text{collela gripe ou estar vacinado}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 219/700 + 500/700 - 135/700 = 584/700 = 0,83$$

$$d) P(A \cap B) = \frac{135}{700} = 0,19 \text{ (a probabilidade da intersección non é o produto das probabilidades pois os sucesos non son independentes)}$$

$$e) P(\text{collela gripe estando vacinado}) = P(A/B) = \frac{135}{135+365} = \frac{135}{500} = 0,27$$

(agora estamos nunha probabilidade condicionada onde os casos totais son só os vacinados).



10. Nun dado trucado, as probabilidades de obter cada un dos números 1, 2, 3, 4 e 5 nun lanzamento son $P(1) = \frac{1}{25}$, $P(2) = \frac{1}{20}$, $P(3) = \frac{1}{15}$, $P(4) = \frac{1}{10}$, $P(5) = \frac{1}{5}$

- Cal é a probabilidade de obter un 6 nun lanzamento?
- Calcula a probabilidade de obter un 4 ou un 5 nun lanzamento.
- Calcula a probabilidade de A: obter número impar o B: obter un 4 ou un 5.
- Cal é a probabilidade de que se facemos catro lanzamentos consecutivos as tres primeiras veces obtemos un 6 e a cuarta obtemos un 5? E de obter al menos un 5?

a) A suma das probabilidades dos sucesos elementais deberá ser 1, polo tanto:

$$P(6) = 1 - P(1) - P(2) - P(3) - P(4) - P(5) = \frac{163}{300} = 0,54\hat{3}$$

b) Os sucesos obter 4 e obter 5 son incompatibles, polo tanto:

$$P(4 \cup 5) = P(4) + P(5) = \frac{3}{10} = 0,3$$

c) Os sucesos A e B son compatibles, pois o suceso obter 5 forma parte de ambos, polo tanto:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(1 \cup 3 \cup 5) + P(4 \cup 5) - P(5) = \frac{1}{25} + \frac{1}{15} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} - \frac{1}{5} = \\ &= \frac{61}{150} = 0,40\hat{6} \end{aligned}$$

d) Temos que calcular $P(6 \cap 6 \cap 6 \cap 5)$, o resultado de cada lanzamento non depende do anterior así que os sucesos son independentes e a probabilidade da intersección é igual ao produto das probabilidades:

$$P(6 \cap 6 \cap 6 \cap 5) = \frac{163}{300} \cdot \frac{163}{300} \cdot \frac{163}{300} \cdot \frac{1}{5} = 0,0321$$

O suceso obter polo menos un cinco é o contrario de non obter ningún 5. Polo tanto

$$\begin{aligned} P(\text{obter polo menos un 5}) &= 1 - P(\text{ningún 5}) = 1 - P(\bar{5}) \cdot P(\bar{5}) \cdot P(\bar{5}) \cdot P(\bar{5}) = 1 - \left(1 - \frac{1}{5}\right)^4 = \\ &= 0,5904 \end{aligned}$$

11. Nunha clase de 10 alumnos distribúense 3 premios. Pescuda de cantos modos pode facerse se:

- Os premios son iguais.
- Os premios son diferentes.

a) Os premios iguais:

Non se collen todos os elementos, soamente 3 de 10.

Non importa a orde, porque todos os premios son iguais

Non se pode repetir, un alumno ou alumna só pode recibir un premio.

Polo tanto son combinacións de 10 elementos tomados de 3 e n3. Casos posibles:

$$C_{10,3} = \binom{10}{3} = 120$$

b) Os premios son diferentes:

Non se collen todos os elementos, soamente 3 de 0.

A orde si importa, porque todos os premios non son iguais.

Non se pode repetir, un alumno ou alumna só pode recibir un premio.

Polo tanto son variacións de 10 elementos tomados de 3 e n3. Casos posibles:

$$V_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

12. Sexan A e B dous sucesos dun experimento aleatorio tales que $P(A) = 0,4$, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,5$ e $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,7$. Calcula a $P(B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B)$$

Para calcular a probabilidade de B fáltnos a da unión e a da intersección de A con B. Aplicamos as leis de Morgan:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 0,5 \Rightarrow P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0,5 = 0,5$$

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 0,7 \Rightarrow P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - 0,7 = 0,3$$

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0,5 - 0,4 + 0,3 = 0,4$$