

PROBABILIDADE

Exercicios autoavaliables

1. Sexan $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A = \{1,3,5,7,9\}$ e $B = \{3,6,9\}$. Calcula:
 - a) $A \cup B$
 - b) $A \cap B$
 - c) A e B son incompatibles ou compatibles?
 - d) $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A - B$
2. Lánzase unha moeda e un dado, anótanse os resultados obtidos. Describe o espazo mostral, E , referido a este experimento aleatorio.
3. Ao tirar un dado, cal é a probabilidade de que saia número par? Cal é a probabilidade de que non saia número par?, e de que saia par e maior que 2?
4. Ao tirar un dado, cal é a probabilidade de que saia un número primo? É que sexa primo e impar? É un número que non sexa nin primo ni impar?
5. Determina se son compatibles ou incompatibles os seguintes sucesos A e B, sabendo que a $P(A) = 1/4$, $P(B) = 1/2$, $P(A \cup B) = 2/3$
6. Cubrindo unha aposta da primitiva, cal é a probabilidade de acertar un premio de 2ª categoría, isto é acertar 5 números?
7. Unha urna contén 5 bolas vermellas, 3 bolas azuis e 2 negras. Se extraemos unha bola, cal é a probabilidade de que sexa vermella? E de que sexa negra? E de que sexa azul ou negra?
8. Nunha competición de natación asistiron o 65% menores de 30 anos o 53% son rapazas e o 88% son rapazas menores de 30 anos. Calcula a probabilidade dos seguintes sucesos:
 - a) Ser rapaza menor de 30 anos
 - b) Ser rapaz
9. Nun curso de 2º BAC temos 30 alumnos dos cales 17 son chicas e 13 chicos. Na avaliación de matemáticas superaron a materia 7 chicas e 8 chicos. Calcula a probabilidade de que sabendo que é unha chica, esta superara a materia.
10. Unha enquisa revela que o 35% dos habitantes dunha cidade oe a emisora A, o 28% oe a emisora B e o 10% ambas emisoras. Elíxese ó chou un deses cidadáns, calcula a probabilidade de que escoite:
 - a) Algunha das emisoras
 - b) Ningunha delas
 - c) A emisora A sabendo que non escoita B.
 - e) Só unha das dúas.
11. Calcula a probabilidade de ningún seis ao lanzar catro dados (catro veces non seis).
12. Calcula a probabilidade de obter algún seis ao lanzar catro dados (algún seis é o suceso contrario de ningún seis).



13. Temos unha moeda e dúas urnas con bolas. Na primeira bolsa 1 negra, 3 vermellas e 6 verdes e na segunda 2 negra, 2 verdes e 6 vermellas. Se sae cara eliximos unha bola da 1ª bolsa e se é cruz da 2ª bolsa. Calcula:

- a) Probabilidade de que a bola sexa verde condicionada a que saíu cara.
- b) Sexa verde e saía cara.
- c) Sexa vermella se saíu cruz.

14. Unha clase componse de 20 alumnos e 10 alumnas. A metade das alumnas e dos alumnos aproban as matemáticas. Calcula a probabilidade de elixir unha persoa ao chou resulte:

- a) Alumno o que aprobe as matemáticas.
- b) Alumno que suspenda as matemáticas.
- c) Sabendo que é un alumno, cal é a probabilidade de que aprobe?
- d) Son independentes os sucesos alumno e que aprobe as matemáticas?

15. “A Primitiva” é un xogo de azar, na que interveñen agrupacións de 6 números, que se obteñen dun bombo no que hai 49 bolas numeradas do 1,2,3,..., 49. Cal é a probabilidade de acertar unha combinación gañadora?

Solucións

1. Sexan $E=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A=\{1,3,5,7,9\}$ e $B=\{3,6,9\}$. Calcula:

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$

c) A e B son incompatibles ou compatibles?

d) $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A - B$

a) $A \cup B = \{1,3,5,6,7,9\}$ b) $A \cap B = \{3,9\}$

c) A e B son incompatibles ou compatibles? Compatibles porque $A \cap B \neq \emptyset$

d) $\bar{A} = \{2,4,6,8,10\}$, $\bar{B} = \{1,2,4,5,7,8,10\}$, $A - B = A \cap \bar{B} = \{1,5,7\}$

2. Lánzase unha moeda e un dado, anótanse os resultados obtidos. Describe o espazo mostral, E, referido a este experimento aleatorio.

*Calculamos os espazos mostrais de lanzar unha moeda = $\{c, +\}$ e lanzar un dado = $\{1,2,3,4,5,6\}$
Agora podemos realizar unha táboa de dobre entrada, táboa onde se organizan os datos, ou ben escribir os diferentes sucesos elementais directamente:*

$$E = \{c1, c2, c3, c4, c5, c6, +1, +2, +3, +4, +5, +6\}$$

3. Ao tirar un dado, cal é a probabilidade de que saia número par? Cal é a probabilidade de que non saia número par?, e de que saia par e maior que 2?

O espazo mostral do experimento é $E = \{1,1,2,3,4,5,6\}$

Suceso "saír par" é $A=\{2,4,6\}$ a probabilidade de A, $P(A) = \frac{3}{6} = 1/2$ (aplicando regra de Laplace=casos favorables(3)/ casos posibles(6))

Suceso "non saír par" e o contrario de A, é decir $\bar{A} = \{1,3,5\}$ esta probabilidade a podemos obter de dúas formas, coma a anterior ou coma sucesos contrarios sabendo que $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ obtemos que $P(\bar{A}) = 1/2$

O suceso "saír maior que 2" é $B= \{3,4,5,6\}$ e que "saía par" é $A= \{2,4,6\}$ polo tanto os suceso que nos piden é $A \cap B = \{4,6\}$ logo a $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = 1/3$ (aplicando regra de Laplace)

4. Ao tirar un dado, cal é a probabilidade de que saia un número primo? É que sexa primo e impar? É un número que non sexa nin primo ni impar?

O espazo mostral do experimento é $E = \{1,1,2,3,4,5,6\}$

O suceso "saía un número primo" $A= \{2,3,5\}$ a $P(A) = 1/3$

O suceso "saía un número primo e impar" $B= \{3,5\}$ a $P(B) = \frac{2}{6} = 1/3$

O suceso "saía un non primo e non impar" $C= \{4,6\}$ a $P(C) = \frac{2}{6} = 1/3$

5. Determina se son compatibles ou incompatibles os seguintes sucesos A e B, sabendo que a $P(A) = 1/4, P(B) = 1/2, P(A \cup B) = 2/3$

Dous sucesos son incompatibles se $P(A \cap B) = 0$, comprobemos se isto é certo.

Coma sabemos: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Calculamos: $\frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - P(A \cap B)$ e obtemos $P(A \cap B) = \frac{1}{12} \neq 0$ non son incompatibles

6. Cubrindo unha aposta da primitiva, cal é a probabilidade de acertar un premio de 2ª categoría, isto é acertar 5 números?

Temos que calcular os casos posibles e os favorables para poder aplicar a regra de Laplace.

Casos posibles: formas de elixir 6 números de 49, NON se poden repetir e NON importa a orden polo tanto $C_{49,6} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{43!6!} = 13983816$

Casos favorables: formas de acertar 5 dun total de 6 que marcamos, polo tanto $C_{6,5} = \binom{6}{5} = \frac{6!}{1!5!} = 6$

A probabilidade aplicando Laplace é: $P = \frac{6}{13983816} = 0,00000043$

7. Unha urna contén 5 bolas vermellas, 3 bolas azuis e 2 negras. Se extraemos unha bola, cal é a probabilidade de que sexa vermella? E de que sexa negra? E de que sexa azul ou negra?

Sexan V = "saia vermella", N = "saia negra" e A = "saia azul"

$$P(V) = \frac{(\text{casos favorables})}{(\text{casos posibles})} = 5/10 = 1/2$$

$$P(N) = \frac{(\text{casos favorables})}{(\text{casos posibles})} = 2/10 = 1/5$$

Probabilidade de azul ou negra: $N \cap A = \emptyset$ polo tanto son incompatibles.

$$P(N \cup A) = P(N) + P(A) = 1/5 + 3/10 = 1/2$$

8. Nunha competición de natación asistiron o 65% menores de 30 anos o 53% son rapazas e o 88% son rapazas menores de 30 anos. Calcula a probabilidade dos seguintes sucesos:

a) Ser rapaza menor de 30 anos

b) Ser rapaz

Temos os seguintes sucesos: A = "ser menor de 30 anos na competición" $P(A) = 0,65$

B = "ser rapaza na competición" $P(B) = 0,53$

$A \cup B$ = "ser rapaza ou menor de 30 anos na competición" $P(A \cup B) = 0,88$

a) *"Ser rapaza e menor de 30 anos na competición" $= A \cap B$*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0,88 = 0,65 + 0,53 - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0,3$$

b) *"Ser rapaz" $= \bar{B}$ contrario de ser rapaza $\Rightarrow P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0,53 = 0,47$*

$\Rightarrow 47\%$ son rapaces

9. Nun curso de 2º BAC temos 30 alumnos dos cales 17 son chicas e 13 chicos. Na avaliación de matemáticas superaron a materia 7 chicas e 8 chicos. Calcula a probabilidade de que sabendo que é unha chica, esta superara a materia.

Resumimos a información nunha táboa de continxencia:

	Superen materia	Non superen materia	
Chicas	7	10	17
Chicos	8	5	13
Total	15	15	30

Sexa $A = \text{Ser chica}$ e $B = \text{Superar a materia}$, o que nos pide é $P(B/A)$

O exercicio o podemos facer de dúas formas:

1º Aplicando a definición de probabilidade condicionada $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{7/30}{17/30} = \frac{7}{17}$

2º Restrinxindo o espazo soamente as chicas (son 17*), isto é: $P(A/B) = \frac{7}{17}$

10. Unha enquisa revela que o 35% dos habitantes dunha cidade oe a emisora A, o 28% oe a emisora B e o 10% ambas emisoras. Elíxese ó chou un deses cidadáns, calcula a probabilidade de que escoite:

- Algúnha das emisoras
- Ningunha delas
- A emisora A sabendo que non escoita B.
- Só unha das dúas.

Construímos unha táboa de continxencia:

	Oe A	Non oe A	Total
Oe B	10	18	28
Non oe B	25	47	72
Total	35	65	100

a) Algúnha emisora pode se A o B polo tanto debemos calcular a probabilidade da unión dos sucesos: $P(\text{algúnha}) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{35}{100} + \frac{28}{100} - \frac{10}{100} = 0,53$

b) $P(\text{ningunha}) = 1 - P(\text{algúnha}) = 1 - 0,53 = 0,47$

c) $P(A/\text{non B}) = \frac{25}{72} = 0,347$ *

d) $P(\text{só unha delas}) = P(A \cap \text{non B}) + P(B \cap \text{non A}) = \frac{25}{100} + \frac{18}{100} = 0,43$

11. Calcula a probabilidade de ningún seis ao lanzar catro dados (catro veces non seis).

Son sucesos independentes: $P(\text{ningún seis}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = 0,48$

12. Calcula a probabilidade de obter algún seis ao lanzar catro dados (algún seis é o suceso contrario de ningún seis).

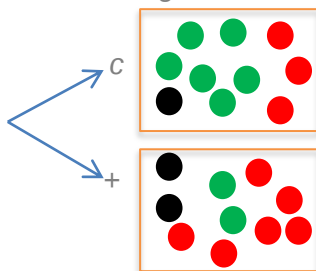
Faremos esta probabilidade polo suceso contrario:

$$P(\text{algún seis}) = 1 - P(\text{ningún}) = 1 - 0,48 = 0,52$$

13. Temos unha moeda e dúas urnas con bolas. Na primeira bolsa 1 negra, 3 vermellas e 6 verdes e na segunda 2 negra, 2 verdes e 6 vermellas. Se sae cara eliximos unha bola da 1ª bolsa e se é cruz da 2ª bolsa. Calcula:

- Probabilidade de que a bola sexa verde condicionada a que saíu cara.
- Sexa verde e saíu cara.
- Sexa vermella se saíu cruz.

Fagamos un diagrama de árbore:



$$a) P(\text{verde/cara}) = 6/10 = 3/5 = 0,6$$

$$b) P(\text{cara} \cap \text{verde}) = P(\text{Cara}) \cdot P(\text{verde/cara}) = 1/2 \cdot 6/10 = 6/20 = 3/10 = 0,3$$

$$c) P(\text{vermella/cruz}) = 6/10 = 3/5 = 0,6$$

14. Unha clase componse de 20 alumnos e 10 alumnas. A metade das alumnas e dos alumnos aproban as matemáticas. Calcula a probabilidade de elixir unha persoa ao chou resulte:

- Alumna o que aprrobe as matemáticas.
- Alumno que suspenda as matemáticas.
- Sabendo que é un alumno, cal é a probabilidade de que aprrobe?
- Son independentes os sucesos alumno e que aprrobe as matemáticas?

Facemos unha táboa:

	Alumnos	Alumnas	Total
Aproban Mates	10	5	15
Suspenden Mates	10	5	15
Total	20	10	30

a) Temos que calcular a unión dos dous sucesos que non son independentes:

$$P(\text{Alumna} \cup \text{aprobe}) = P(\text{alumna}) + P(\text{aprobe}) - P(\text{alumna} \cap \text{aprobe}) = 10/30 + 15/30 - 5/30 = 20/30 = 2/3 = 0,6$$

$$b) P(\text{alumno} \cap \text{suspenda}) = 10/30 = 1/3 = 0,3$$

c) $P(\text{aprobe}/\text{alumno}) = 10/20 = 0,5$

d) Temos que ver se a $P(\text{aprobe}/\text{alumno}) = P(\text{aprobe}) \cdot P(\text{alumno})$

A primeira probabilidade danos $1/3$ (apartado b). Doutro lado da igualdade a probabilidade de aprobar e $15/30 = 1/2$ e de ser alumno $20/30 = 2/3$ se multiplicamos danos $1/3$ o mesmo que do outro lado polo tanto si son independentes.

15. “A Primitiva” é un xogo de azar, na que interveñen agrupacións de 6 números, que se obteñen dun bombo no que hai 49 bolas numeradas do 1,2,3,..., 49. Cal é a probabilidade de acertar unha combinación gañadora?

Temos que contar os casos posibles, xa que os favorables xa sabemos que é 1.

Casos posibles: O que determina o premio son as 6 bolas no a orden, esta non importa, así que debemos usar as combinacións de 49 elementos tomados de 6 en 6. $C_{49,6} = \binom{49}{6} = 13983816$

A probabilidade de acertar é $\frac{1}{13983816} = 7,15 \cdot 10^{-8}$