

PROBABILIDADE

1. Experimentos aleatorios

Cando estudamos a natureza podemos atopar dous tipos de fenómenos: fenómenos determinísticos e fenómenos aleatorios. Os fenómenos determinísticos, son os que podemos predicir o seu comportamento a partires das condicións nas que se producen: velocidade dun obxecto ao aplicarlle unha forza, deformación dun resorte ao colgarlle un peso,... Os fenómenos aleatorios, non podemos predicir o seu resultado, ben porque intervén o azar, ben porque non podemos controlar tódalas variables que inflúen no proceso: lanzar un dado, resultado dun exame, estatura que vai ter unha persoa,...

1.1 Espazo mostral. Sucesos

Moitos dos fenómenos observables teñen un resultado imprevisible: lanzar un dado, lanzar unha moeda, os números da lotería... este tipo de fenómenos son os que estudaremos nesta unidade e caracterízanse por:

- Os seus resultados son imprevisibles
- Podemos realizar o experimento as veces que desexemos en idénticas condicións.

O que quere dicir: “ Un fenómeno aleatorio é aquel que se o repetimos, mantendo as mesmas condicións o resultado non é predicible”.

Aínda que os resultados non sexan predicibles podemos coñecer os posibles resultados do experimento. Os experimentos poden ser simple ou compostos. Lanzar un dado e apuntar o número, experimento simple; lanzar dúas moedas e contar o número de caras, experimento composto.

Chamamos espazo mostral (E) ao conxunto de tódolos posibles resultados dun experimento aleatorio. Un suceso é calquera subconxunto de E . Chamamos:

- Suceso Elemental: suceso constituído por un único resultado.
- Suceso Composto: suceso formado por dous ou máis sucesos elementais.
- Suceso Imposible, $\emptyset$: suceso que non se realiza nunca.
- Suceso Seguro, E : suceso constituído por todos os resultados da proba.

Exemplo

Consideremos o experimento aleatorio lanzar un dado. Describe o espazo mostral, os sucesos “sacar un 3 ou 4”, “sacar par”, “sacar impar”, un suceso seguro e un suceso imposible.

Espazo mostral o conxunto formado por todos os posibles resultados $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

Suceso “sacar un 3 ou 4”, é o conxunto $A = \{3,4\}$

Suceso sacar par, é o conxunto formado por $B = \{2,4,6\}$

Suceso sacar impar, é o conxunto formado por $C = \{1,3,5\}$

Suceso Seguro $D = \{\text{Obter menos dun 6}\}$

Suceso imposible $F = \{\text{Sacar máis dun 7}\} = \emptyset$

1.2 Operación cos sucesos

A unión de dous sucesos A e B , é outro suceso formado por tódolos sucesos elementais que temos en A ou en B , e o denotamos como $A \cup B$.

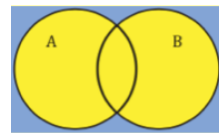


Ilustración 1: Unión de sucesos

A intersección de dous sucesos A e B , é outro suceso formado por tódolos sucesos elementais que teñen en común A e B , e o denotamos como $A \cap B$.

Cando a intersección de dous sucesos é o suceso imposible $\emptyset$ diremos que os sucesos son incompatibles:

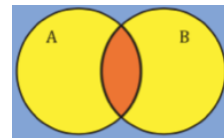


Ilustración 2: Intersección de sucesos

A e B son incompatibles $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

O suceso contrario ou complementario dun suceso A é outro suceso que denotamos por $\bar{A}$, está formado por tódolos sucesos elementais do espazo mostral que non están en A . Para o seu cálculo tomaremos o espazo mostral e eliminaremos os sucesos elementais de A .

A diferenza de dous sucesos A e B é a intersección do primeiro suceso co contrario do segundo. O denotamos como $A - B = A \cap \bar{B}$.



Ilustración 3: Diferenza de sucesos

É evidente que o suceso A e o seu contrario $\bar{A}$ cumpren:

- $A \cup \bar{A} = E$ Espazo mostral e $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- $A = \bar{\bar{A}}$

As leis de Morgan

As leis de Morgan permiten intercambiara unión pola intersección a través do complementario e serán moi útiles para o cálculo de probabilidades:

1. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
2. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Exemplo

Os conxuntos $A = \{1,3,5\}$, $B = \{1,2,3\}$ e $C = \{4,5\}$ son sucesos do experimento lanzar un dado. Calcula $A \cup B$, $A \cup B \cup C$, $B \cap C$, $B \cap E$, $E \cup B$, $\bar{A}$, $A - B$

$A \cup B = \{1,2,3,5\}$, collemos todos os elementos de A e de B

$A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5\}$, collemos todos os elementos dos tres sucesos

$B \cap C = \emptyset$ son incompatibles, non teñen ningún elemento en común

$B \cap E = B$, neste caso os comúns son todos os de B

$E \cup B = E$, todos os elementos

$\bar{A} = \{2,4,6\}$, formado polos elementos de E que non están en A

$A - B = A \cap \bar{B} = \{5\}$, collemos os elementos comúns con A e o complementario de B

2. Probabilidade dun suceso. Regra de Laplace

Existen dúas formas de asignar probabilidades a un suceso:

- a. Mediante a frecuencia relativa do suceso: A frecuencia relativa dun suceso A tende a estabilizarse cando o número de veces que repetimos o experimento é moi grande. A frecuencia relativa dun suceso é o cociente entre o número de veces que ocorreu o suceso e o número total de veces que realizamos o experimento.

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_r(A) = \frac{n^\circ \text{ de veces que ocorre } A}{n^\circ \text{ veces que realizamos o experimento}}$$

- b. Admitindo como axiomas da probabilidade as afirmacións seguintes:
1. A probabilidade dun suceso A é sempre un número real non negativo, $P(A) \geq 0$
 2. A probabilidade do suceso seguro E é un, $P(E) = 1$
 3. Se A e B son sucesos incompatibles, $A \cap B = \emptyset$, entón a probabilidade da unión é a probabilidade da suma:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Estes axiomas unidos ao feito de que cada suceso elemental, dun espazo mostral E de m elementos, teñan a mesma dispoñibilidade de saír, ten unha probabilidade de:

$$\frac{1}{\text{número de sucesos elementais}}$$

Obtemos que: para calquera experimento onde os sucesos teñen a mesma probabilidade de saír, é dicir sucesos equiprobables, podemos aplicar para o cálculo da probabilidade dun suceso o que se coñece como Regra de Laplace que nos di:

$$P(A) = \frac{n^\circ \text{ de casos favorables do suceso } A}{n^\circ \text{ de casos posibles}}$$

Insistir en que soamente podemos aplicar este criterio cando os sucesos elementais dun experimento teñan a mesma probabilidade de saír.

Dos axiomas podemos concluír:

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $0 \leq P(A) \leq 1$ ou ben que $P(A) = 1 - P(\bar{A})$
3. Se A e B non son incompatibles $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Demostración:

1. Se $P(E) = P(E \cup \emptyset) = P(E) + P(\emptyset) = 1 \Rightarrow P(\emptyset) = 0$
2. Se $P(A) \geq 0$, como $P(E) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$ e $0 \leq P(A) \leq 1$
3. Se A e B non son incompatibles a intersección non é valeira entón temos que restar a probabilidade desta, xa que se non estaríamos contando dúas veces esa probabilidade $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Exemplo 1

Unha urna de 5 bolas azuis, 2 vermellas e 3 verdes. Se sacamos unha bola ao azar, cal é a probabilidade de que sexa verde?

O primeiro que temos que mirar é se os sucesos son equiprobables, para poder aplicara a Regra de Laplace, efectivamente ten a mesma probabilidade de saír a vermella que a verde e que a azul.

Determinamos os casos posibles e os casos favorables os sucesos pedidos:

Casos posibles: 10 bolas (o total)

Casos favorables: 3 (temos tres bolas verdes)

Chamemos A: “a bola sexa verde”

$$P(A) = \frac{3}{10} = 0,3$$

Exemplo 2

Ao tirar un dado, cal é a probabilidade de que saia número par? Cal é a probabilidade de que non saia número par? Cal é a probabilidade de que saia un número menor de 7? Sexa o suceso $B=\{4,5\}$ e o suceso A saia par, cal é a probabilidade de $A \cup B$?

O suceso saír par é $A = \{2,4,6\}$, tres casos favorables e seis posibles $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

O suceso non par o podemos calcular de varias formas unha delas polo contrario:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{6} = \frac{3}{6}$$

$P(\text{un número menor que } 7) = P(E) = 1$; neste experimento é un suceso seguro

Os sucesos A e B teñen intersección non baleira, isto é non son incompatibles, entón:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

3. Técnicas de recuento

Para poder aplicar a Regra de Laplace é necesario contar os casos posibles e os casos favorables dun experimento, cousa que non sempre é doado de facer. A combinatoria proporciónanos unha serie de fórmulas e procedementos para contar de cantos xeitos diferentes pódese facer unha elección de varios obxectos de entre unha colección.

3.1 Principio da adición e do produto

Principio de adición:

Se un suceso, A , pódese realizar de m formas diferentes e outro suceso, B , pódese facer de n formas distintas e son sucesos incompatibles, é dicir $A \cap B = \emptyset$, entón $A \cup B$ pódese facer de $m + n$ formas diferentes. Este principio pódese xeneralizar para máis sucesos sempre que sexan incompatibles.

Principio de multiplicación:

Se un suceso, A , pódese suceder de m formas distintas e outro suceso, B , pode ocorrer de n formas, entón o suceso A e, a continuación, B sucede de $m \cdot n$ formas distintas.

Exemplo 1

Cantos resultados diferentes podemos obter ao lanzar un dado e unha moeda?

Nunha moeda obtemos: cara e cruz $\Rightarrow$ 2 resultados

Nun dado obtemos: $\{1,2,3,4,5,6\} \Rightarrow$ 6 resultados

Polo tanto, aplicando o principio da adición, obtemos $2 + 6 = 8$ resultados diferentes.

Exemplo 2

Se unha persoa ten 5 camisas e 4 pantalóns, de cantas formas diferentes poderase vestir?

Aplicando o principio de multiplicación poderase vestir: $5 \cdot 4 = 20$ formas diferentes

3.2 Combinatoria

Variacións sen repetición

Unha variación sen repetición de m elementos tomados de n en n , $m \geq n$, son os distintos grupos de n elementos que se poden formar cos m elementos dun certo conxunto de tal xeito que non se pode repetir ningún.

O número de variacións de m elementos tomados de n en n , $V_{m,n}$, é igual ao produto de multiplicar n factores partindo de m e decrecendo dun en un:

$$V_{m,n} = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \dots \cdot (m - n + 1)$$

Para identificar unha variación sen repetición temos que ter en conta:

- Non se collen todos os elementos do conxunto de partida.
- Importa a orde.
- Ningún elemento aparece dúas veces na mesma variación, non se repiten.

Exemplo 1

Co conxunto $A=\{1,2,3,4\}$. Cantos números de dúas cifras podemos formar con ditos elementos de forma que unha mesma cifra non poderá aparecer dúas veces no número.

Se o intentamos facer de forma manual deberemos seguir unha orde para non esquecer ningún:

Comezan por 1	Comezan por 2	Comezan por 3	Comezan por 4
12	21	31	41
13	23	32	42
14	24	34	43

Observamos que os posibles resultados son 12.

Identifiquemos a situación: Non se collen todos os elementos de partida, importa a orde e non poden aparecer dúas veces, entón sería unha variación sen repetición: $V_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$

Exemplo 2

De cantas formas diferentes pódese formar un podio nunha carreira de 100 metros con 8 atletas?

Neste caso tratar de facelo de forma manual se complica. Identifiquemos a situación: Non se collen todos os elementos de partida, importa a orde e non poden aparecer dúas veces, entón sería unha variación sen repetición: $V_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ posibilidades.

Variacións con repetición

Unha variación con repetición de m elementos tomados de n en n , $m \geq n$, son os distintos grupos de n elementos que se poden formar cos m elementos dun certo conxunto. O número de variacións con repetición de m elementos tomados de n en n , denótase por $VR_{m,n}$, e calcúlase coa fórmula:

$$VR_{m,n} = m^n$$

Para identificar unha variación con repetición temos que ter en conta:

- Importa a orde.
- Os elementos do conxunto inicial poden aparecer dúas veces na mesma variación.

Exemplo

Co conxunto $A=\{1,2,3,4\}$. Cantos números de dúas cifras podemos formar con ditos elementos.

De forma manual deberemos seguir unha orde para non esquecer ningún:

Comezan por 1	Comezan por 2	Comezan por 3	Comezan por 4
12	21	31	41
13	23	32	42
14	24	34	43
11	22	33	44

Observamos que os posibles resultados son $4 \cdot 4 = 4^2 = 16$.

Variación sen repetición: $VR_{4,2} = 4^2 = 16$

Permutacións

Chámase permutacións ao número de posibilidades que podemos obter dun conxunto de n elementos, designase por P_n e lese permutacións de n elementos. Calcúlase como o factorial de n :

$$P_n = n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Para identificar unha permutación temos que ter en conta:

- En cada grupo se toman todos os elementos de partida.
- A orde importa.
- Non se repiten dentro do mesmo grupo.

Exemplo

Co conxunto $A=\{a, b, c\}$. Cantas palabras de 3 letras se poden formar, de forma que non pode aparecer unha letra dúas veces.

Intentemos facelo de forma manual deberemos seguir unha orde para non esquecer ningún:

Comezan por a	Comezan por b	Comezan por c
abc	bac	cab
acb	bca	cba

Observamos que os posibles resultados son 6.

Permutacións: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Combinacións

Chamamos combinacións de m elementos tomados de n en n , con $m \geq n$, , aos distintos grupos de n elementos distintos que se poden formar a partir dun conxunto de m elementos diferentes entre si, de tal forma que cada grupo se diferencia dos outros polos elementos que o forman, non pola orde en que aparece. Denótase como $C_{m,n}$ e calcúlase:

$$C_{m,n} = \frac{m!}{n! \cdot (m - n)!}$$

Para identificar as combinacións teremos en conta:

- Non se colle todos os elementos de partida.
- Non importa a orde.
- Ningún elemento aparece dúas veces no mesmo grupo.

Ao número $C_{m,n}$ se lle chama tamén número combinatorio, e se representa por $\binom{m}{n}$ e lese m sobre n .

$$C_{m,n} = \binom{m}{n}$$

Importante:

$$0! = 1$$

$$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$$

Exemplo

Cantos equipos diferentes de 3 persoas pódense formar entre os 4 traballadores dunha oficina.

Chamamos aos traballadores A,B,C e D. Non importa a orde e non se poden repetir, os equipos que podo formar son: ABC, ACD, BCD, ABD

Os resultados son 4 formas de elixir.

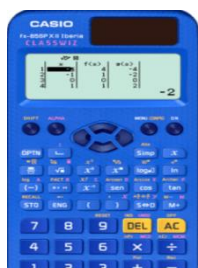
Nesta situación os equipos son combinacións de 4 elementos tomados de 3 en 3:

$$C_{4,3} = \binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} = 4$$

3.3 Uso da calculadora para o cálculo de permutacións e combinacións

A calculadora é unha ferramenta que nos axuda a realizar moitos destes cálculos, vexamos as distintas teclas que nos serven de axuda:

Para o cálculo do factorial dun número: esta operación a podemos facer coa calculadora usando a tecla x!. Tecleamos o número a teclas SHIFT x⁻¹ =



Para o cálculo dun número combinatorio: esta operación a podemos realizar coa axuda da tecla nCr. Para o cálculo de C_{4,3} = 4, debemos teclear 4SHIFT nCr 3 =



Factorial

Nº combinatorio

Ilustración 4: Calculadora

4. Aplicación da combinatoria ao cálculo de probabilidades

A combinatoria como xa dixemos, permítenos calcular o número de casos posibles e favorables dun experimento para logo poder aplicar a Regra de Laplace.

Exemplo

Un grupo de 5 persoas séntanse nun banco. Cal é a probabilidade de que dúas persoas fixadas de antemán se senten xuntas?

Casos favorables: Hai dúas persoas que consideramos como un grupo, coma se foran unha persoa única, entón habería 4! = 24 formas de sentarse, a maiores esas dúas persoas pódense intercambiar, así que temos 2 · 4! = 48 formas.

Casos posibles: cantidade de formas nas que se poden sentar todo o grupo 5! = 120

$$P(\text{Sentarse xuntos}) = \frac{48}{120} = 0,4$$

5. Probabilidade condicionada

A probabilidade dun suceso A pode verse afectada se ocorreu previamente outro suceso B. Para medir a influencia entre eses sucesos, defínese a probabilidade de A condicionada por B, e se designa como: $P(A/B)$

Esta probabilidade obtense a través da fórmula $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ ou $P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

Das expresión anteriores dedúcese: $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B/A)$

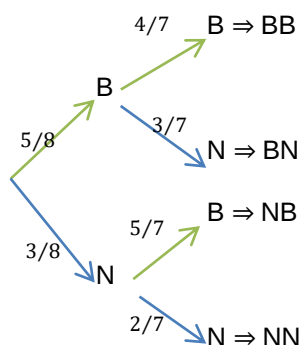
Un experimento é composto se está formado por varios experimentos simples, simultáneos e sucesivos. Por exemplo lanzar un dado e unha moeda, lanzar dúas moedas. A confección dun diagrama de árbore, visto en cursos anteriores, facilita o cálculo do espazo mostral e simplifica o cálculo das probabilidade condicionadas.

Exemplo

Se nunha urna temos 5 bolas de igual tamaño, 3 negras e 5 brancas, extraemos una bola ao chou, obsérvase e non se devolve á urna, extraemos outra bola.

A probabilidade de que a primeira bola sexa negra (N) ou branca (B) é: $P(N) = \frac{2}{5}$ e $P(B) = \frac{3}{5}$

En cambio, as probabilidade de que a segunda bola sexa negra ou branca non se mantén, xa que os casos varían segundo o que pasara na primeira extracción. Vexamos cun diagrama de árbore as posibles situacións:



2ª branca se a 1ª foi branca: $P(2^a B / 1^a B) = \frac{4}{7}$

2ª branca se a 1ª foi negra: $P(2^a B / 1^a N) = \frac{3}{7}$

2ª negra se a 1ª foi branca: $P(2^a N / 1^a B) = \frac{5}{7}$

2ª negra se a 1ª foi negra: $P(2^a N / 1^a N) = \frac{2}{7}$

Pódese observar que nun diagrama de árbore as probabilidade condicionadas coinciden coas segundas ramas.

Se o que temos que calcular é por exemplo a probabilidade de 1ª B e 2ª N:

$$P(1^a B \cap 2^a N) = P(1^a B) \cdot P(2^a N / 1^a B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

Para o cálculo destas probabilidade deberemos seguir o camiño dentro do diagrama de árbore.

Cando na información do problema temos datos de interseccións, “e” en linguaxe coloquial e non temos datos de sucesos condicionados son moi útiles as táboas de continxencia.

	B	$\bar{B}$	Total
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
Total	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

Vexamos un exemplo do seu uso.

Exemplo

Nunha clase de 25 alumnos e alumnas. Temos 10 rapazas e oito delas aproban matemáticas. Dos rapaces aproban matemáticas 9. Calcula a probabilidade de “aprobar sabendo que é rapaza”

Chamemos ao suceso A=“aprobar mate” e suceso B=“ser rapaza”, entón os sucesos contrarios serán $\bar{A}$ = “suspender mate” e $\bar{B}$ = “ser rapaz”

Recollamos os datos que temos nunha táboa e completamos:

	B	$\bar{B}$	Total
A	8	9	
$\bar{A}$			
Total	10		25

	B	$\bar{B}$	Total
A	8	9	17
$\bar{A}$	2	6	8
Total	10	15	25

* “aprobar sabendo que é rapaza” $P(A/B) = \frac{8}{10}$

* “suspender mates” $P(suspender) = \frac{8}{25}$

6. Sucesos dependentes e independentes

Dous sucesos A e B son dependentes cando a realización dun deles condiciona a probabilidade do outro. Verifícase: $P(A/B) \neq P(A)$, verificando que $P(B) > 0$.

Segundo a definición da probabilidade condicionada verifícase: $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$

Dous sucesos A e B son independentes se a probabilidade dun deles non depende de que se verifique o outro. Se dous sucesos son independentes verifícase

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B) = P(B) \cdot P(A/B) = P(A) \cdot P(B)$$



Exemplo 1

Lanzamos dous dados, calcula a probabilidade de “5” no primeiro e un “par” no segundo.

Son sucesos independentes entón a probabilidade da intersección coincide co produto das probabilidades:

$$P(\text{un 5 no 1º e par no 2º}) = P(\text{un 5 en 1º dado}) \cdot P(\text{par en el 2º dado}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{12}$$

Exemplo 2

Se nunha urna temos 5 bolas de igual tamaño, 2 negras e 3 brancas, extraemos una bola ao chou, observase e devólvese á urna e extraemos outra bola. Cal será a probabilidade de que a primeira fora branca e a segunda negra?

De novo son sucesos independentes:

$$P(B \cap N) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25} = 0,24$$

Exemplo 3

Nunha urna temos 3 bolas brancas, 2 azuis e 5 vermellas. Calcula a probabilidade de obter dúas bolas vermellas se extraemos a bola a notamos o seu color e sen devolvela extraemos outra bola.

Neste caso o espazo mostral varía, os sucesos son dependentes:

$$P(V \cap V) = P(V) \cdot P(V/V) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = 0,2$$

Licenzas das ilustracións

Ilustración	Recurso
Ilustración 1: Unión de sucesos	Autoría: Licenza: Dominio público Procedencia: https://bioprofe.com/wp-content/uploads/2019/04/Captura-de-pantalla-2019-04-01-a-las-13.02.16.png
Ilustración 2: Intersección de sucesos	Autoría: Licenza: Dominio público Procedencia: https://bioprofe.com/wp-content/uploads/2019/04/Captura-de-pantalla-2019-04-01-a-las-13.02.16.png
Ilustración 3: Diferenza de sucesos	Autoría: Licenza: Dominio público Procedencia: https://bioprofe.com/wp-content/uploads/2019/04/Captura-de-pantalla-2019-04-01-a-las-13.02.16.png
Ilustración 4: Calculadora	Autoría: Elaboración propia