

Probabilidade

Experimento Aleatorio { - O seu resultado tem que ser imprevisível
- O experimento tem que ser repetível.

- Suceso elemental: cada resultado posible. ($S_1, S_2, \dots$)
- Espaço Mostral: conjunto de todos os sucesos elementais. (E)
- Suceso composto: subconjuntos do espaço mostral ($A, B, C, \dots$)
- Suceso seguro: suceso que sempre se cumpre. ($= E$)
- Suceso imposible: suceso que nunca ocorre. ($\emptyset$)
- Suceso contrario: formado polos sucesos elementais (ou complementario) que non inclúe o suceso orixinal (A e $\bar{A}$)

• Unión: $A \cup B$

Vale que suceda A e que suceda B , o suceso resultante xunta os sucesos elementais de A e B .

• Intersección: $A \cap B$

Vale que teña lugar un suceso elemental incluído tanto en A como en B , o suceso resultante está formado polos sucesos elementais compartidos.

Se $A \cap B = \emptyset$, os sucesos A e B son incompatibles,
non poden ocorrer á vez.

Ejemplo:

Experimento Aleatorio: Sacar un número del Bingo.

$$S_1 = \{1\}, S_2 = \{2\}, \dots$$

$$E = \{1, 2, \dots, 100\}$$

$$A = \text{"Sacar impar"} = \{1, 3, 5, \dots, 97, 99\}; \quad \bar{A} = \text{"Sacar par"} = \{2, 4, \dots, 98, 100\}$$

$$B = \text{"Múltiplos de 21"} = \{21, 42, 63, 84\} \quad \bar{B} = E - B$$

$$A \cup B = \{1, 3, \dots, \underline{42}, 43, \dots\}$$

$$A \cap B = \{21, 63\}$$

Propiedades

Conmutativa

Asociativa

Elemento Neutro

Contrario

Distributiva:

Unión

$$A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cup \bar{A} = E$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Intersección

$$A \cap B = B \cap A$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$A \cap E = A$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Leis de Morgan: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\textcircled{1} \text{ a) } A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$$

$$\text{b) } A \cap B = \{3, 9\}$$

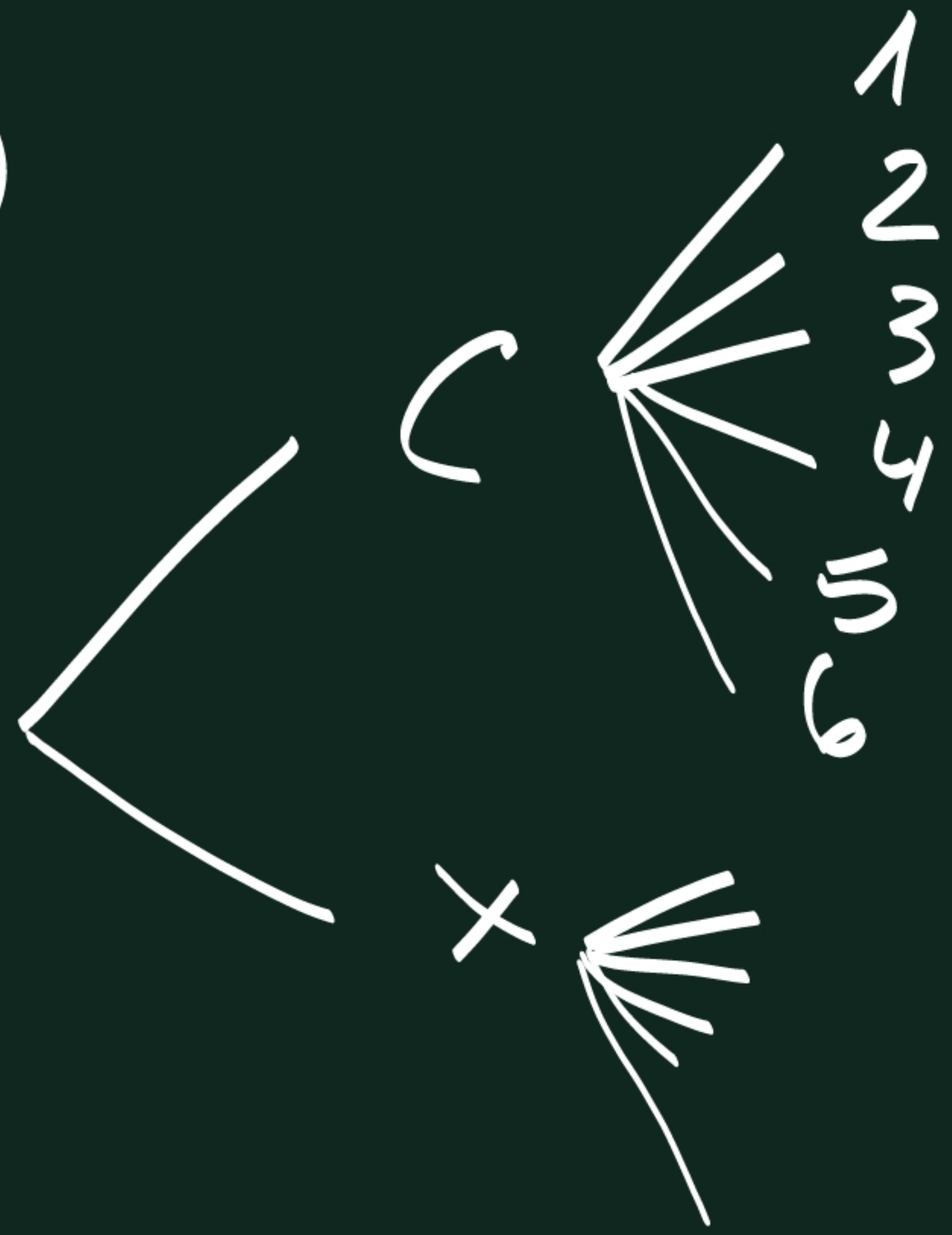
$$\text{c) } \text{Son compatibles, } A \cap B \neq \emptyset$$

$$\text{d) } \bar{A} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$\bar{B} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$$

$$A - B = \{1, 3, 5, 7, 9\} - \{3, 6, 9\} = \{1, 5, 7\}$$

②



$$E = \{C-1, C-2, \dots, C-6, X-1, \dots, X-6\}$$

Cálculo de Probabilidades

A Regra de Laplace:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{veces que pasa } A}{n \text{ repeticiones}}$$

Se admitimos que:

- $P(A) \geq 0$
- $P(E) = 1$
- $A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$P(A) = \frac{n^{\circ} \text{ casos favorables}}{n^{\circ} \text{ casos totales}}$$

- $P(\emptyset) = 0$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- Se A e B son compatibles:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidade Condicionada

O feito de que aconteça A pode influir na probabilidade de B, e viceversa. Para medir esta influencia definimos a probabilidade de B condicionada por A:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad ; \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Neste caso os sucesos son dependentes.

Pero no caso de que sexan independentes:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

③



$$a) P(\text{par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

$$b) P(\overline{\text{par}}) = 1 - P(\text{par}) = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

$$c) P(\text{par} > 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0,3 = 33,33\%$$

$$\textcircled{5} \quad P(A) = 1/4$$

$$P(B) = 1/2$$

$$P(A \cup B) = 2/3$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{3+6-8}{12} = \frac{1}{12}$$

Como $P(A \cap B) \neq 0$, os sucesos A e B son compatibles.

$$\textcircled{4} P(\text{primo}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{primo} \cap \text{impar}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(\text{primo}) \cdot p(\text{impar} / \text{primo}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$$

$$P(\overline{\text{primo}} \cap \overline{\text{impar}}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

⑥ $\boxed{n_1 \ n_2 \ n_3 \ n_4 \ n_5 \ n_6}$

D0 0 a0 9

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100000}$$

⑦ 5 V

3 A

2 N

$$P(V) = 5/10 = 0,5$$

$$P(N) = 2/10 = 0,2$$

$$P(A \cup N) = 5/10 = 0,5$$

$$P(A \cap N) = 0$$

$$\textcircled{8} \quad P(< 30) = 0,65$$

$$P(\text{rapaza}) = 0,53$$

$$P(\text{rapaza} \cup < 30) = 0,88$$

$$\begin{aligned} \text{a) } P(\text{rapaza} \cap < 30) &= P(\text{rapaza}) + P(< 30) - P(\text{rapaza} \cup < 30) = \\ &= 0,53 + 0,65 - 0,88 = 0,3 \end{aligned}$$

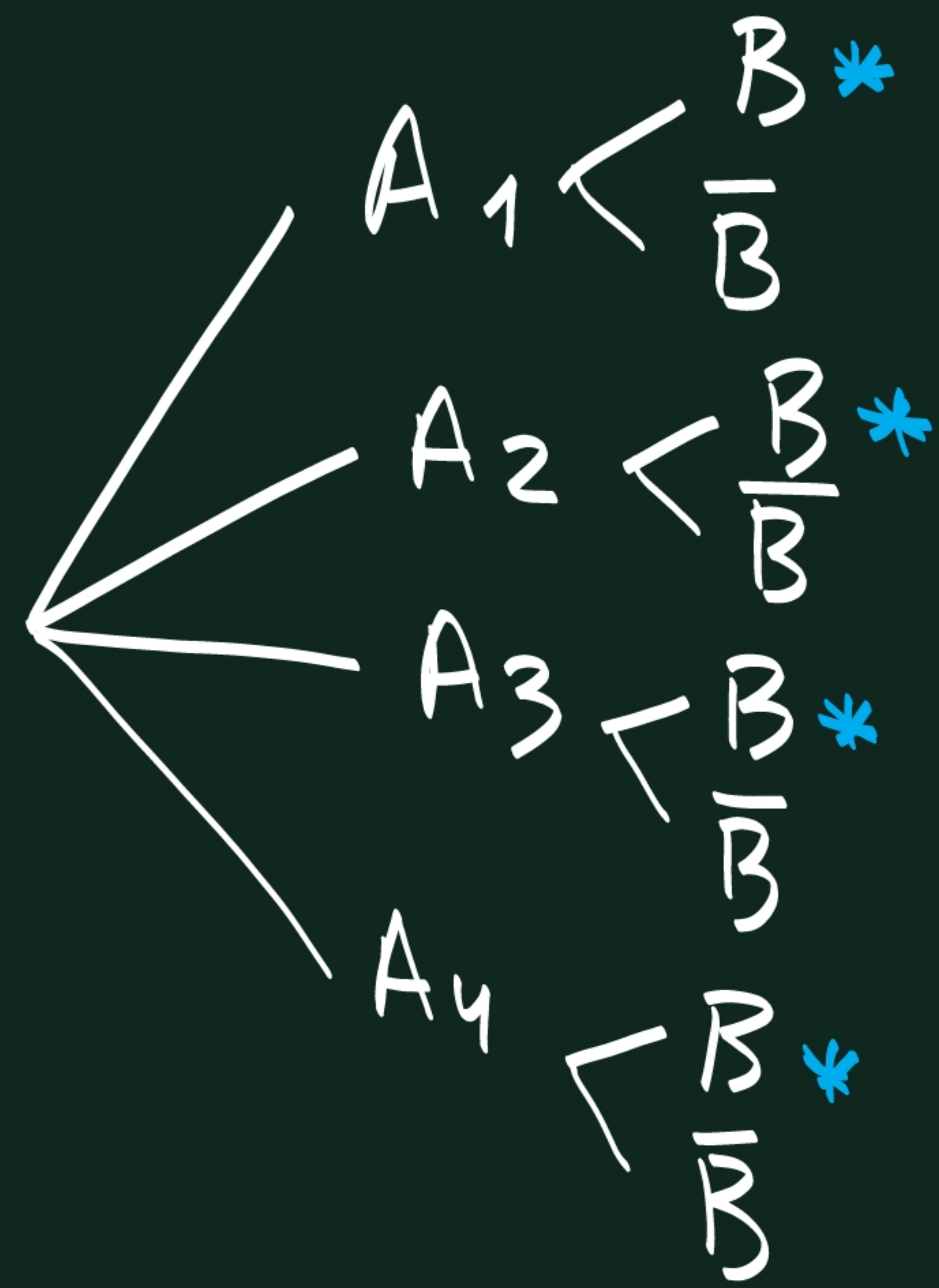
$$\text{b) } P(\text{rapaz}) = 1 - P(\text{rapaza}) = 1 - 0,53 = 0,47$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

	rapaza	rapaz	
< 30	0,3	0,35	0,65
≥ 30	$0,88 - 0,65 = 0,23$	0,12	0,35
	0,53	0,47	1

Teorema da Prob. Total



$$P(B) = P(B/A_1) \cdot P(A_1) + P(B/A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)$$

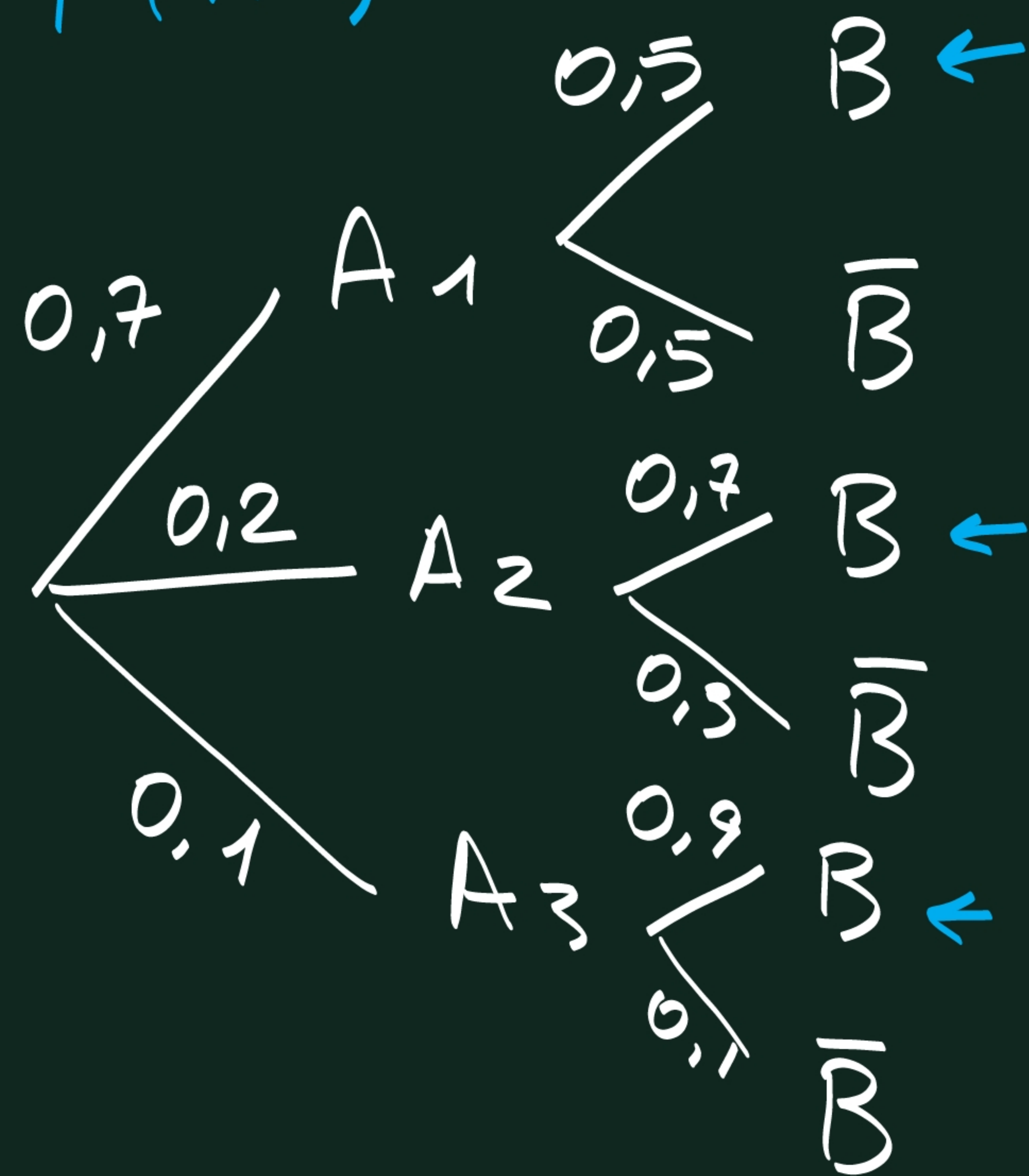
Teorema de Bayes

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B|A_n) \cdot P(A_n)}$$

Exemplo:

$P(A_i)$

$P(B/A_i)$

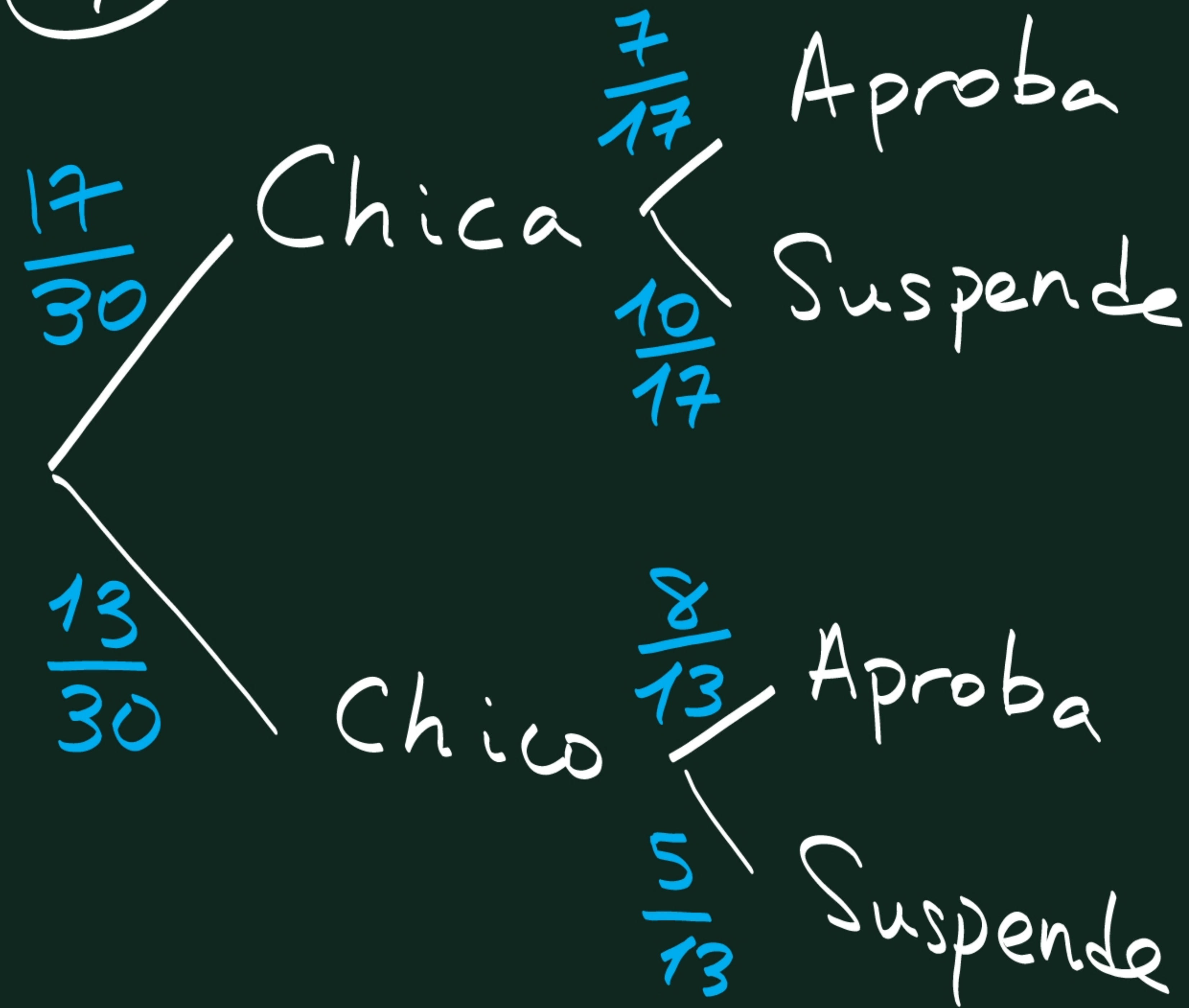


$$P(B) = 0,7 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,9 = 0,58$$

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1) \cdot P(B/A_1)}{P(B)} =$$

$$= \frac{0,7 \cdot 0,5}{0,58} \simeq 0,6$$

9



$\frac{17}{30} \cdot \frac{10}{17} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

$$P(S | C_a) = \frac{P(S \cap C_a)}{P(C_a)} = \frac{1/3}{17/30} = \frac{30}{3 \cdot 17} = \frac{10}{17} = 0,59$$

↓

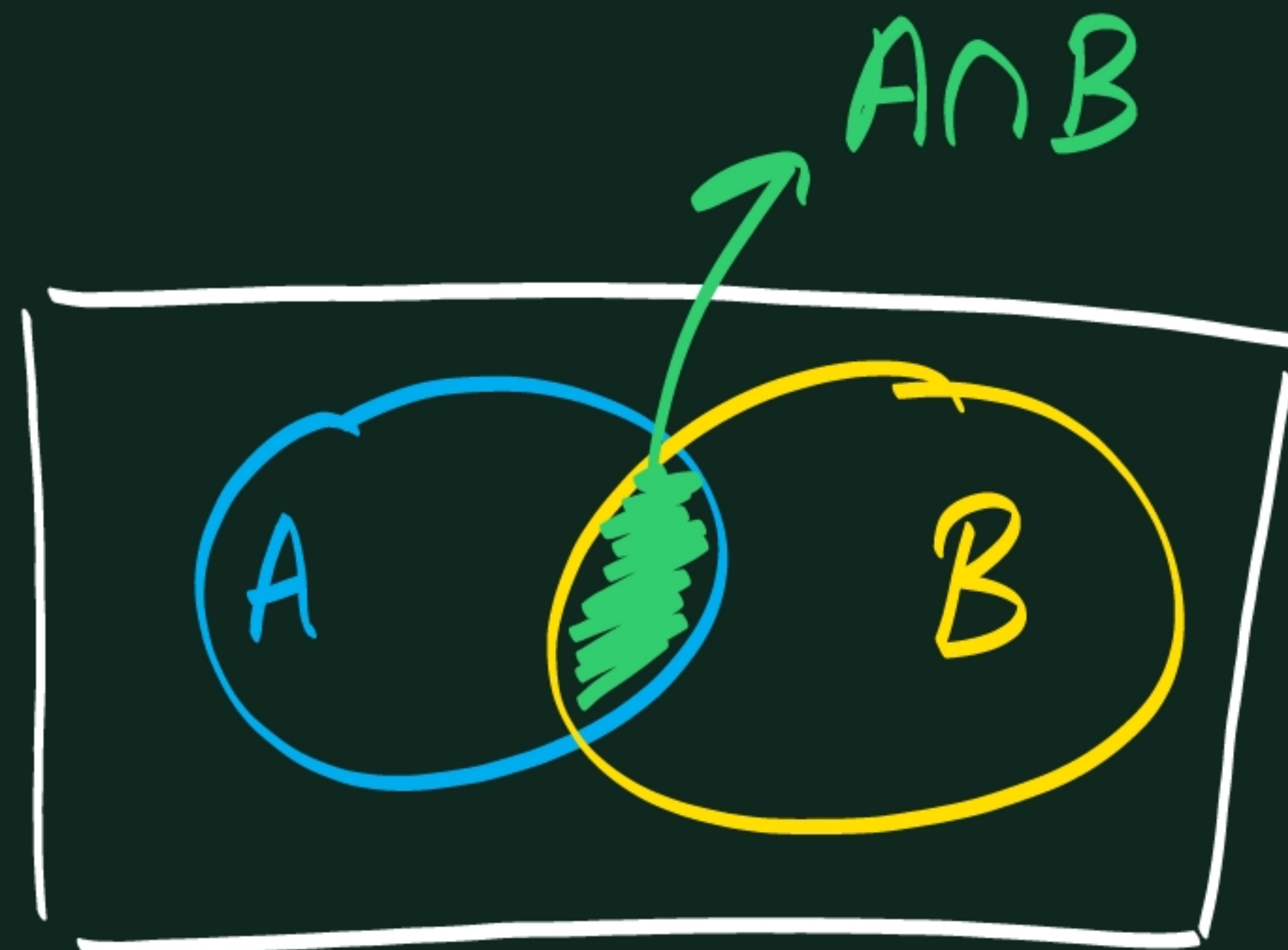
	Chica	Chilo	
Aproba	$A \cap C_a$	$A \cap C_o$	15
Susp.	$S \cap C_a$	$S \cap C_o$	15
	17	13	30

$P(S/C_a)$

10) $P(A) = 35\%$

$P(B) = 28\%$

$P(A \cap B) = 10\%$



	A	$\bar{A}$	
B	10%	18%	28%
$\bar{B}$	25%	48%	72%
	35%	65%	

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 53\%$

b) $P(\overline{A \cup B}) = 100\% - P(A \cup B) = 47\%$

c) $P(A/\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{100\% - P(B)} = \frac{35\% - 10\%}{100\% - 28\%} \approx 35\%$

d) $P(A \cup B) - P(A \cap B) = 53\% - 10\% = 43\%$

$$\textcircled{11} P(\overline{6} \cap \overline{6} \cap \overline{6} \cap \overline{6}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,4823 \rightarrow 48,23\%$$

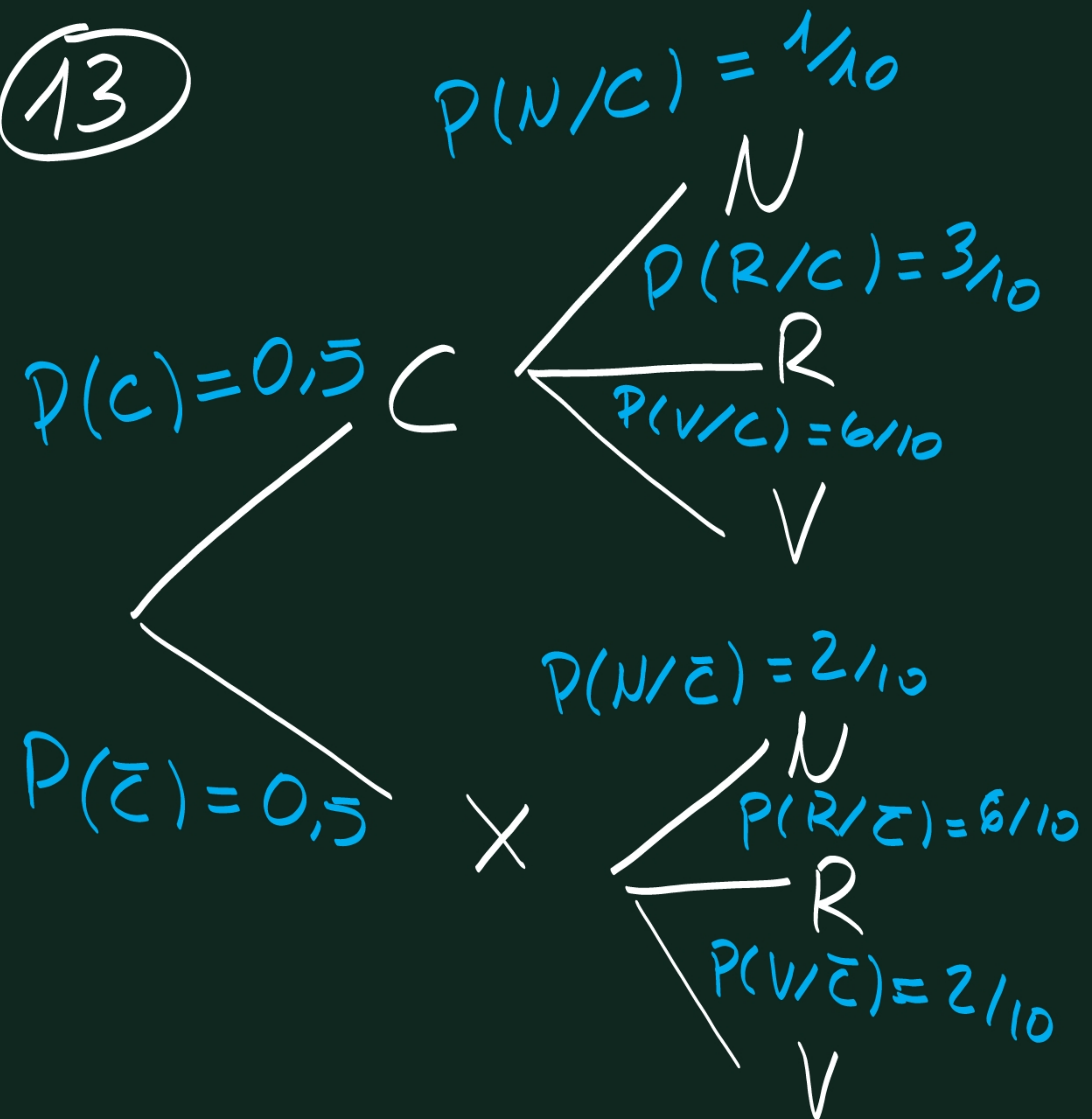
$$\textcircled{12} P(\text{algún } 6) = 1 - 0,4823 = 0,5177$$

$$P(\text{catro } 6) = \left(\frac{1}{6}\right)^4$$

$$P(\text{dos } 6) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$P(\text{tres } 6) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6}$$

13



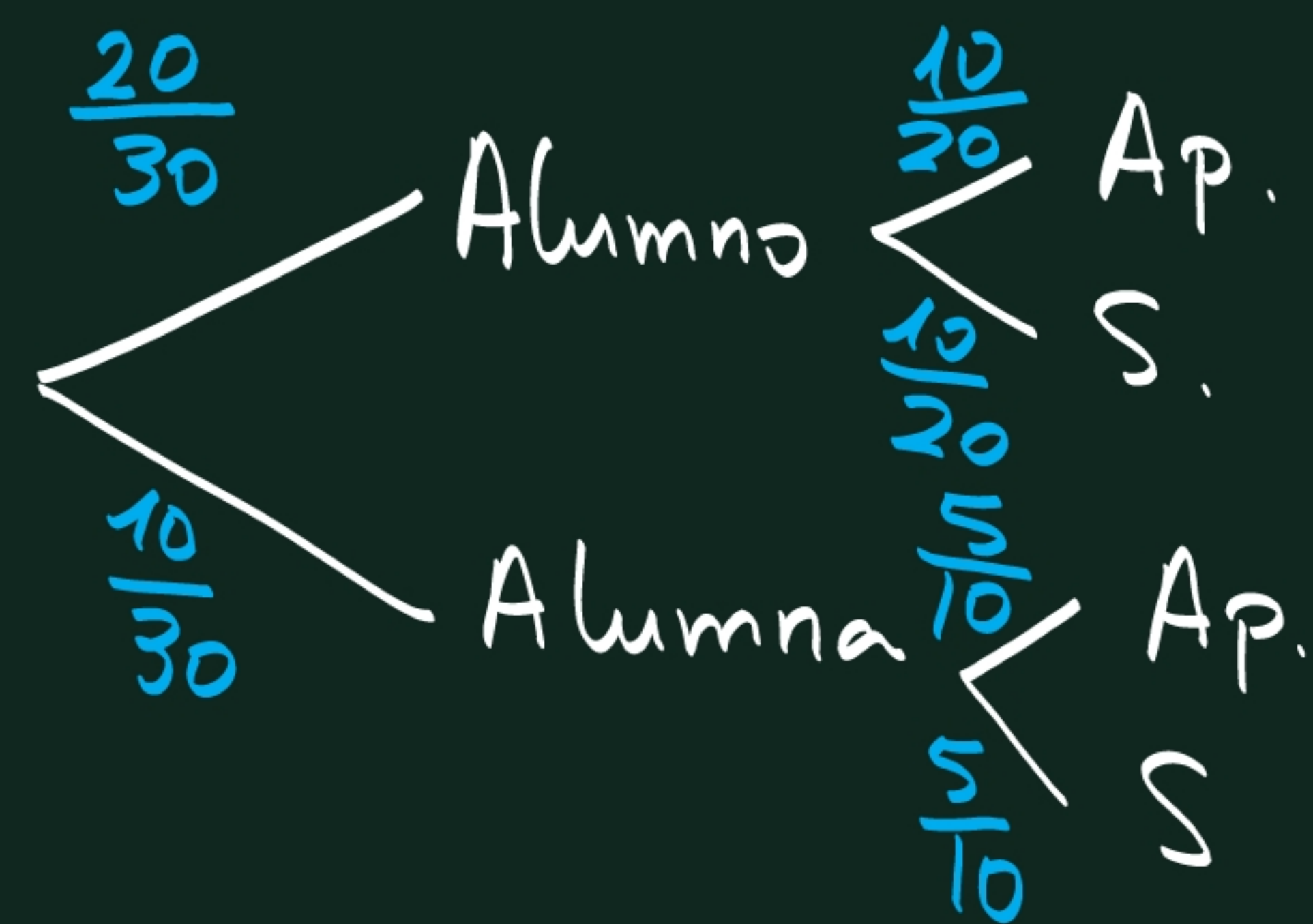
$$a) P(V/C) = 6/10$$

$$b) P(V \cap C) = P(V/C) \cdot P(C) = 6/10 \cdot 0,5 = 3/10$$

$$c) P(R/\bar{C}) = 6/10$$

$$d) P(C/N) = \frac{P(C \cap N)}{P(N)} = \frac{\cancel{0,5} \cdot 0,1}{\cancel{0,5} \cdot 0,1 + \cancel{0,5} \cdot 0,2} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3} = 0,33 = 33,33\%$$

14) 20 alumnos $\rightarrow$ Aprobados 10
 10 alumnas $\rightarrow$ Aprobados 5



	Alumno	Alumna	
Ap.	10	5	15
S.	10	5	15
	20	10	30

a) $P(\text{Alumna} \cup \text{Ap.}) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

b) $P(\text{Alumnos} \cap \text{S.}) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$

c) $P(\text{Ap.} / \text{Alumno}) = \frac{1}{2}$

$P(\text{Alumna} / \text{Ap.}) = 5/15$

$P(\text{Ap.} / \text{Alumna}) = 5/10$

d) Alumno e Ap independientes?

$$P(\text{Alumno} \cap \text{Ap.}) = 10/30 = \frac{1}{3}$$

Se son dependientes:

$$P(\text{Alumno} \cap \text{Ap.}) = P(\text{Alumno}) \cdot P(\text{Ap.} / \text{Alumno})$$

$$= P(\text{Ap.}) \cdot P(\text{Ap.} / \text{Alumno})$$

Se son independientes:

$$P(\text{Alumno} \cap \text{Ap.}) = P(\text{Alumno}) \cdot P(\text{Ap.}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$