

PREGUNTA 1. ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE. (2 puntos)

CONTEXTO

A caída dos tipos de interese no segundo semestre de 2024 permitiu ás familias aforrar arredor de 200 euros ao mes en comparación co que viñan pagando polas súas hipotecas e préstamos. Este aforro equivalía a máis de 2000 euros anuais. Ante este escenario, os bancos ofreceron condicións máis atractivas para captar clientes, o que xerou unha forte competencia entre as entidades. Unha delas lanzou os seguintes produtos: Préstamo 24 Horas, Préstamo Auto e Préstamo Estuda. Cada cliente podía contratar, como máximo, un deles.

A política da empresa determinou que o reparto final dos préstamos concedidos fora o seguinte: un 45 % correspondeu a Préstamos 24 Horas, un 40 % a Préstamos Auto e un 15 % a Préstamos Estuda. Ademais, analizouse a porcentaxe de impago nestes produtos, que foi do 20 % en Préstamos 24 Horas, do 30 % en Préstamos Auto e do 25 % en Préstamos Estuda.

Responda estes catro apartados: 1.1., 1.2., 1.3. e 1.4.

1.1. Seleccionado un préstamo ao azar, calcule a probabilidade de que non se pagara.

1.2. Sabendo que non se pagou un préstamo, calcule a probabilidade de que sexa un Préstamo Auto.

1.3. Se se pagou o préstamo, calcule a probabilidade de que sexa un Préstamo Estuda.

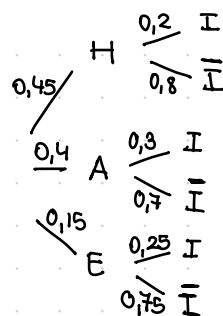
1.4. Segundo os datos proporcionados polo enunciado, indique dous sucesos relacionados con este problema que sexan incompatibles.

Sexan os sucesos: H = "concederon un préstamo 24 horas"

A = "concederon un préstamo auto"

E = "concederon un préstamo estuda"

I = "préstamos non pagados"



1.1. $P(I) = P(I|H) \cdot P(H) + P(I|A) \cdot P(A) + P(I|E) \cdot P(E) = 0,2 \cdot 0,45 + 0,3 \cdot 0,4 + 0,25 \cdot 0,15$
↑
Probabilidades totais
 $= 0,2475$

A probabilidade de que non se pague o préstamo é do 24,75%

1.2. $P(A|I) = \frac{P(I|A) \cdot P(A)}{P(I)} = \frac{0,3 \cdot 0,4}{0,2475} = 0,4848$
↑
Teorema de Bayes

A probabilidade de que un préstamo non pagado sexa de autos é do 48,48%

1.3. $P(E|\bar{I}) = \frac{P(\bar{I}|E) \cdot P(E)}{P(\bar{I})} = \frac{0,75 \cdot 0,15}{1 - 0,2475} = 0,1495$
↑
Teorema de Bayes

A probabilidade de que un préstamo pagado sexa Estuda é do 14,95%

1.4. Segundo os datos do enunciado se concede como máximo un préstamo, logo os sucesos H , A e E son incompatibles entre si, isto quere dicir que:

$$H \cap A = \emptyset \quad H \cap E = \emptyset \quad A \cap E = \emptyset$$

2.1. Unha fábrica de produtos químicos produce 3 fármacos diferentes. Anualmente, esta fábrica ten 4 clientes que, durante o mes de febreiro, realizaron compras ou devolucións, as cales se recolleron (en miles de unidades) na seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

2.1.1. Indique que representan as filas e as columnas, e especifique tanto as compras como as devolucións realizadas por cada cliente durante o mes de febreiro.

2.1.2. Sabendo que o primeiro cliente gastou un total de 3250 €, o segundo un total de 2850 € e o cuarto un total de 2800 €, cal é o prezo por unidade de cada fármaco?

2.1.1. As filas representan os clientes e as columnas os fármacos. Deste xeito temos:

- O primer cliente comprou 9 mil unidades do fármaco 1, 5 mil unidades do fármaco 2 e 2 mil unidades do fármaco 3.
- O segundo cliente comprou 3 mil e 8 mil unidades dos fármacos 1 e 2, respectivamente.
- O tercer cliente non comprou nada.
- O cuarto cliente compra 6 mil unidades do fármaco 1, 7 mil do fármaco 2 e devolve mil do fármaco 3.

2.1.2. Escribimos o sistema en forma matricial, descartamos a terceira fila porque non aporta información.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 6 & 7 & -1 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3250 \\ 2850 \\ 2800 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x, y, z \text{ son os prezos por cada mil unidades} \\ \text{dos fármacos.} \end{array}$$

$$|A| = -72 + 42 - 96 + 15 = -111$$

Utilizamos a regra de Cramer para resolver o sistema:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3250 & 5 & 2 \\ 2850 & 8 & 0 \\ 2800 & 7 & -1 \end{vmatrix}}{-111} = \frac{-26000 + 39900 - 44800 + 14250}{-111} = 150$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 3250 & 2 \\ 3 & 2850 & 0 \\ 6 & 2800 & -1 \end{vmatrix}}{-111} = \frac{-25650 + 16800 - 34200 + 9750}{-111} = 300$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 5 & 3250 \\ 3 & 8 & 2850 \\ 6 & 7 & 2800 \end{vmatrix}}{-111} = \frac{201600 + 85500 + 68250 - 156000 - 179550 - 42000}{-111} = -200$$

O prezo dunha unidade do fármaco 1 é 0,15 €, do fármaco 2 é 0,3 € e do fármaco 3 é de 0,2 €.

2.2. Discuta, segundo os valores do parámetro m , o sistema $\begin{cases} x + y + mz = 1, \\ x + my + z = 1, \\ mx + y + z = 1. \end{cases}$

PASO 1. Escribimos as matrices asociadas ao sistema.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m & 1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

PASO 2. Calculamos o determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = m + m + m - m^3 - 1 - 1 = -m^3 + 3m - 2$$

PASO 3. Vemos que valores anulán o determinante.

$$|A| = 0 \Rightarrow -m^3 + 3m - 2 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & & -1 & -1 & 2 \\ \hline & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & & -1 & -2 & \\ \hline & -1 & -2 & 0 & \end{array}$$

$$|A| = 0 \Rightarrow (m-1)^2 (-m-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-2 \end{cases}$$

PASO 4. Indico o resultado teórico que me permite estudar o sistema analizando o rango das matrices asociadas a él.

Imos analizar o sistema utilizando o teorema de Rouché-Frobenius

PASO 5. Estudio do casos dos valores que non anulán o determinante.

• Se $m \neq 1$ e $m \neq -2$, entón $|A| \neq 0$

$$* \operatorname{rg}(A) = 3$$

* $\operatorname{rg}(A^*) = 3$ (existe un menor de orde 3 con determinante distinto de 0, é A . O rango non pode ser maior que 3 posto que só temos 3 filas)

Como $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*) = 3$ (nº incógnitas), o sistema é compatible determinado.

PASO 6. Analizámos os casos concretos que fan $|A|=0$.

• Se $m=1$

PASO 6.1. Escribe as matrices para ese valor.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

PASO 6.2. Estudiamos o rango de A .

A matriz A ten as tres filas iguais e non é nula, logo $\text{rg}(A)=1$.

PASO 6.3. Estudiamos o rango de A^*

Como na matriz A , todas as filas son iguais e a matriz non é nula, logo $\text{rg}(A^*)=1$.

PASO 6.4. Concluimos como é o sistema

Temos que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1 < 3$ (nº de incógnitas) polo que o sistema é compatible indeterminado.

• Se $m=-2$.

PASO 6.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

PASO 6.2.

Existe un menor de orde 2 con determinante distinto de cero, por exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \neq 0 \quad \text{Polo tanto } \text{rg}(A)=2$$

PASO 6.3.

Existe un menor de orde 3 con determinante distinto de cero, por exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 2 - 1 - 1 - 4 \neq 0 \quad \text{Polo tanto } \text{rg}(A^*)=3$$

PASO 6.4.

Como $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$, o sistema é incompatible

3.1. Sexa $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a función dada por $f(x) = \arctan(x + \pi)$, onde $\arctan$ denota a función arcotanxente.

3.1.1. Determine os intervalos de concavidade e de convexidade de f . Estude e ache, se existen, os puntos de inflexión de f (abscisas onde se obteñen e valores que se alcanzan).

3.1.2. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{f(x)}{\sin x}.$$

Cal sería o valor do límite se cambiamos no denominador $\sin x$ por $g(x)$, sendo $g(x) = \sin x$ se $x \neq -\pi$ e $g(-\pi) = 2$?

3.1.1. Os puntos de inflexión compren $f''(x) = 0$

A función é convexa cando $f''(x) > 0$ e cóncava cando $f''(x) < 0$.

$$f(x) = \arctan(x + \pi)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x + \pi)^2} = \frac{1}{1 + x^2 + 2\pi x + \pi^2}$$

$$f''(x) = \frac{-(2x + 2\pi)}{(x^2 + 2\pi x + \pi^2 + 1)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -(2x + 2\pi) = 0 \Rightarrow x = -\pi$$

Para analizar o signo de $f''(x)$ basta analizar o signo do numerador, xa que o denominador é sempre positivo.

$$f''(x) > 0 \Rightarrow -(2x + 2\pi) > 0 \Rightarrow 2x + 2\pi < 0 \Rightarrow x < -\pi$$

$$\text{De xeito análogo } f''(x) < 0 \Rightarrow x > -\pi$$

A función é convexa en $(-\infty, -\pi)$, cóncava en $(-\pi, +\infty)$ e ten un punto de inflexión en $x = -\pi$

3.1.2. $\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\arctan(x + \pi)}{\sin x} = \frac{0}{0}$ INDETERMINACIÓN

Aplicamos L'Hôpital para resolver o límite.

$$\lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\arctan(x + \pi)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\frac{1}{1 + (x + \pi)^2}}{\cos x} = \frac{\frac{1}{1+0}}{-1} = -1$$

$$g(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x \neq -\pi \\ 2 & \text{se } x = -\pi \end{cases}$$

O límite analiza os valores cando nos aproximamos a $-\pi$. É dicir, facer os límites laterais.

Na contorna de $-\pi$ a función segue sendo como antes, logo o límite é o mesmo, -1 .

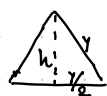
3.2. A suma dos perímetros dun cadrado e un triángulo equilátero é igual a 100 metros. Cales deben ser as medidas dos lados do cadrado e do triángulo para que a suma das súas áreas sexa mínima?

Sexa x : lado do cadrado

y : lado do triángulo equilátero

$$4x + 3y = 100$$

$$A_{\text{CADRADO}} = x^2$$



$$y^2 = h^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = y^2 - \frac{y^2}{4} = \frac{3y^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}y}{2}$$

$$A_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{y \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{3}y^2}{4}$$

$$\text{Suma de áreas: } f(x, y) = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} y^2$$

$$4x + 3y = 100 \Rightarrow x = \frac{100 - 3y}{4} =$$

$$f(y) = \left(25 - \frac{3}{4}y\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} y^2 = 25 - \frac{3}{4}y$$

Para que a área sexa mínima $f'(y) = 0$

$$f'(y) = 2\left(25 - \frac{3}{4}y\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + 2 \frac{\sqrt{3}}{4} y$$

$$= -\frac{3}{2} \left(25 - \frac{3}{4}y\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} y = -\frac{75}{2} + \frac{9}{8}y + \frac{\sqrt{3}}{2}y$$

$$= \frac{9 + 4\sqrt{3}}{8} y - \frac{75}{2}$$

$$f'(y) = 0 \Rightarrow y = \frac{75 \cdot 8}{2(9 + 4\sqrt{3})} = \frac{300}{9 + 4\sqrt{3}} = 18,83$$

Comprobamos que efectivamente es un mínimo

$$\frac{f'(y) < 0, f'(y) > 0}{18,83}$$

Decrece a la izquierda y crece a la derecha, efectivamente es un mínimo.

$$x = \frac{100 - 3 \cdot 18,83}{4} = 10,88$$

El lado del triángulo es 18,83 m y el del cuadrado 10,88 m.

3.3. Responda:

3.3.1. Calcule a área encerrada pelas gráficas das funções $f(x) = -x^2 + 2$ e $g(x) = |x|$.

3.3.2. Razoe, sen calcular a integral, se $\int_1^2 x e^x dx$ ten signo positivo ou negativo. Logo, calcule a integral.

3.3.1. $f(x) = -x^2 + 2$ $g(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Vemos onde se cortan as funcións

$f(x) = g(x)$ $\xrightarrow{x > 0}$ $-x^2 + 2 = x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0$

A única solución no intervalo é $x = 1$

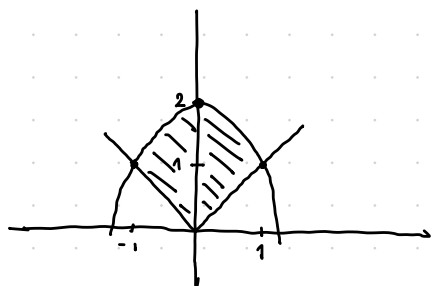
$\xrightarrow{x < 0}$ $-x^2 + 2 = -x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$(x-2)(x+1) = 0$

A única solución no intervalo é $x = -1$

Puntos de corte de $f(x)$ co eixe X : $-x^2 + 2 = 0$

$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$



$$A = \left| \int_{-1}^0 [-x^2 + 2 - (-x)] dx \right| + \left| \int_0^1 [-x^2 + 2 - x] dx \right| =$$

$$= \left| -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right|_{-1}^0 + \left| -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right|_0^1 =$$

$$= \left| 0 - \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right] \right| + \left| -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - 0 \right| =$$

$$= \frac{7}{6} + \frac{7}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3} \text{ u}^2.$$

3.3.2. $f(x) = x e^x$ é positiva en $(1, 2)$

$$\begin{pmatrix} f(1) > 0 \\ f(2) > 0 \\ f \text{ continua} \end{pmatrix}$$

Pensamos na integral definida como as áreas que quedan entre a función e o eixe X , como é positiva está toda sobre o eixe X logo a integral é positiva

Calculamos primeiro a integral indefinida por partes.

$$\int x e^x dx \rightarrow \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

$$\int_1^2 x e^x dx = [x e^x - e^x]_1^2 = 2e^2 - e^2 - [e - e] = e^2$$

4.1. Responda:

4.1.1. Considere o triângulo de vértices $A(0,0,0)$, $B(2,4,0)$ e $C(5,0,0)$. Utilizando produtos vectoriais, calcule a sua área. Logo, comprove o resultado mediante outro método.

4.1.2. Calcule a distancia do ponto $P(2,4,2)$ ao plano que pasa polos puntos $A(0,0,0)$, $C(5,0,0)$ e $D(0,0,3)$.

4.1.1. Os vectores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ determinan dous lados do triângulo. O módulo do producto vectorial indicará a área paralelogramo que determinan, a do triângulo será a metade.

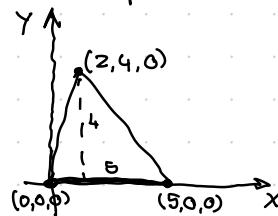
$$\vec{AB} = (2, 4, 0) \quad \vec{AC} = (5, 0, 0)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, -20)$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(-20)^2} = 20$$

$$A_{\text{TRIÂNGULO}} = \frac{20}{2} = 10 \text{ u}^2$$

Outro método: para os tres puntos, a coordenada z é 0, polo que están no plano XY



$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ u}^2$$

4.1.2. Dous vectores do plano son: $\vec{AC} = (5, 0, 0)$
 $\vec{AD} = (0, 0, 3)$

Un vector normal ao plano é:

$$\vec{AC} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (0, -15, 0)$$

Podemos considerar o vector $(0, 1, 0)$

A ecuación do plano é $y + D = 0$ } $D = 0 \Rightarrow$ plano $y = 0$
 Como pasa por $(0,0,0)$

$$d(P, \pi) = \frac{4}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = 4 \text{ u.}$$

$\uparrow$
 $(2, 4, 2)$

4.2. Responda:

4.2.1. Consideranse o plano $\pi: ax + y + z = 1$ e a recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$, onde a é un parámetro real.

- Estude a posición relativa de π e r en función de a ,
- obteña o valor de a que fai que π e r sexan perpendiculares e
- razoe se r pode estar contida en π ou non.

4.2.2. Se π é o plano de ecuación $-3x + y + z = 1$, diga que valor debe tomar o parámetro real b para que a recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ estea contida en π .

4.2.1. Se $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$ entón $r \parallel \pi$ ou $r \subset \pi$

Comprobamos isto

$$\vec{v}_r = (2, 3, 3)$$

$$\vec{n}_\pi = (a, 1, 1) \quad \begin{aligned} \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi &= 2a + 3 + 3 \\ &= 2a + 6 \end{aligned}$$

$$\text{Se } \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0 \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$$

$$2a + 6 = 0 \Rightarrow a = -3$$

Se $a \neq -3$, entón r e π se cortan.

Se $a = -3$, comprobo se a recta está contida no plano.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -3x + y + z = 1 \\ P_r(1, 0, -1) \end{array} \right\} -3 \cdot 1 + 0 - 1 = -4 \neq 1$$

Como hai un punto da recta que non está no plano, entón a recta non está contida no plano e para $a = -3$, $r \parallel \pi$.

• Para que sexan perpendiculares: $\frac{2}{a} = \frac{3}{1} = \frac{3}{1} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$

• r non pode estar contida no plano, xa que non hai ningún valor de a que verifique:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \\ P_r \in \pi \end{array} \right.$$

4.2.2. Polo apartado anterior con eses valores xa sabemos que $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$

$$P_r(1, b, -1) \in \pi \Rightarrow -3 \cdot 1 + b - 1 = 1$$

$$b = 1 + 4 = 5$$