PREGUNTA 1. ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE.

O auxe do comercio electrónico nos últimos anos provocou un aumento exponencial das entregas a domicilio en todo o territorio galego. Para facer fronte a este reto, unhas grandes superficies comerciais puxeron en marcha no seu centro loxístico un ambicioso programa de mellora continua co obxectivo de reducir os erros nas entregas: paquetes danados, artigos incorrectos, atrasos superiores a 48 horas ou enderezo erróneo, entre outros. Para medir o impacto do programa, o departamento de calidade analizou os rexistros do último trimestre.

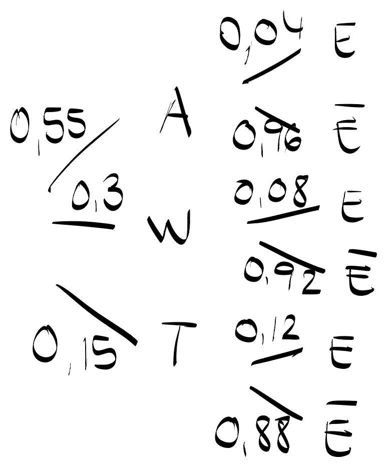
As entregas clasifícanse segundo o canal polo que se recibiu o pedido: aplicación móbil (A), páxina web (W) e teléfono (T), representando o 55 %, o 30 % e o 15 % do total respectivamente. A taxa de erro rexistrada foi do 4 % nos pedidos realizados pola aplicación, do 8 % nos da páxina web e do 12 % nos do teléfono.

Ao finalizar o trimestre, o equipo de loxística decide avaliar o rendemento nun día de alta demanda no que se realizaron 200 entregas, das cales todas corresponden ao canal de aplicación móbil, xa que ese día o resto de canles estaban inactivas por mantemento.

Nota: $P(Z > -0{,}90) = 0{,}8159$; $P(Z > 0{,}54) = 0{,}2946$; $P(Z < -1{,}22) = 0{,}1112$; $P(Z > 0{,}32) = 0{,}3745$

Responda estes tres apartados: 1.1., 1.2. e 1.3.

1.1 Seleccionado un pedido ao azar entre todos os do trimestre, calcule a probabilidade de que se producise un erro na entrega. Sabendo que houbo un erro, calcule a probabilidade de que o pedido fose realizado pola páxina web.



Prob. totais

$$P(E) = P(E|A)\cdot P(A) + P(E|W)P(W) + P(E|T)\cdot P(T)$$

$$= 0{,}04\cdot 0{,}55 + 0{,}08\cdot 0{,}3 + 0{,}12\cdot 0{,}15 =$$

$$= 0{,}064$$

A probabilidade de erro é do 6,4 %

$$P(W|E) = \frac{P(E|W)\cdot P(W)}{P(E)} = \frac{0{,}08\cdot 0{,}3}{0{,}064} = 0{,}375$$

T. Bayes

Sabendo que houbo erro a probabilidade de que se fixera o pedido pola web é do 37,5%.

1.2 Sexa X o número de entregas con erro no día de alta demanda descrito no contexto. Calcule a probabilidade de que ese día se produzan como mínimo 11 erros nas entregas.

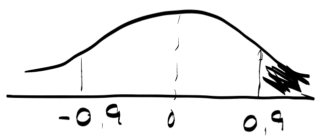
Éxito = "entrega con erro pola app"

$Bi(200;\ 0{,}04)$

Como $n = 200 > 5$, e $np = 200 \cdot 0{,}04 = 8 > 5$ e $nq = 200 \cdot 0{,}96 = 192 > 5$, podemos aproximar a distribución binomial a unha normal $N(np, \sqrt{npq})$

$N(8;\ 2{,}77)$

$$P(Y \geq 11) \underset{\text{corrección continuidade}}{=} P(X \geq 10{,}5) \overset{\text{Tipificamos}}{=} P\left(\frac{X-8}{2{,}77} \geq \frac{10{,}5-8}{2{,}77}\right) =$$



$$= P(Z \geq 0{,}90) = P(Z \leq -0{,}9) = 1 - P(Z \geq -0{,}9)$$

$$= 1 - 0{,}8159 = 0{,}1841$$

A probabilidade de que como mínimo se produzan 11 erros é do 18,41%

1.3 O programa de mellora considérase exitoso nese día se o número de erros é inferior a 6. Calcule a probabilidade de que o programa se considere exitoso. Con base neste resultado, parécelle razoable ese criterio de éxito? Razoe brevemente.

Como vimos no apartado anterior, podemos aproximar mediante unha normal, logo

$$P(Y \leq 6) = P(X \leq 6{,}5) = P\left(Z \leq \frac{6{,}5-8}{2{,}77}\right) =$$

$$= P(Z \leq -0{,}54) = P(Z \geq 0{,}54) = 0{,}2946$$

A probabilidade de que se produzan menos de 6 erros é do 29,46%

O criterio de éxito véxoo moi estrito xa que só ocorre que se den menos de 6 erros en preto dun 30% das veces, é dicir, hai poucas ocasións nas que vamos a considerar o día un éxito.

2.1. Unha fábrica de viño de Mallorca produce 3 tipos de viño: tinto, branco e rosado. Coa finalidade de saber o prezo de cada tipo de viño, compramos viño, o mismo día e na mesma fábrica, de 4 xeitos diferentes:

- Comprando 3 botellas de viño tinto e 2 de viño branco pagamos 67 €.
- Comprando 2 botellas de viño tinto, 4 de branco e 1 de rosado pagamos 85 €.
- Comprando 1 botella de viño tinto e 1 de viño rosado pagamos 21 €.
- Comprando 4 botellas de viño branco e 5 de viño rosado pagamos 85 €.

(a) Escribe, en forma matricial, o sistema de ecuacións lineais que se debería de resolver para poder saber o prezo de cada tipo de viño. É necesario ter os datos das 4 compras para saber o prezo de cada tipo de viño?

(b) Calcula cal é o prezo de cada tipo de viño.

Baleares 2024

a) Prezo viño tinto = x Prezo viño rosado = z

" " branco = y

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} T & B & R \end{array} \\ \begin{array}{c} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{array} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 \\ 85 \\ 21 \\ 85 \end{pmatrix}$$

Non son necesarios os datos dos 4 xeitos xa que só temos 3 variables. O sistema compatible determinado se a matriz ten rango 3.

b) Usamos 3 dos días

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 \\ 21 \\ 85 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -12 - 10 = -22$$

Usando a Regra de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 67 & 2 & 0 \\ 21 & 0 & 1 \\ 85 & 4 & 5 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{170 - 268 - 210}{-22} = 14$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 67 & 0 \\ 1 & 21 & 1 \\ 0 & 85 & 5 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{315 - 255 - 335}{-22} = 12{,}5$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 67 \\ 1 & 0 & 21 \\ 0 & 4 & 85 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{268 - 252 - 170}{-22} = 7$$

O prezo da botella de viño tinto é 14 €, a de viño branco é 12,5 € e a do viño rosado 7 €.

2.2. Discuta en función do parámetro $a \in \mathbb{R}$ o seguinte sistema de ecuacións.

$$\left.\begin{array}{lcl} 2x + y - az & = & 2 \\ x + y & = & a + 1 \\ (a+1)x + y - z & = & 2 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad A^* = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -a & 2 \\ 1 & 1 & 0 & a+1 \\ a+1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

Analizamos a determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 0 \\ a+1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - a + a(a+1) + 1 = a^2 - 1$$

$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = 1, \ a = -1$

Usamos o teorema de Rouché-Frobenius para analizar o sistema

- Se $a \neq 1$ e $a \neq 1$, entón $|A| \neq 0$ polo que $rg(A) = 3$

  $rg(A) = rg(A^*) = 3$ (nº de incógnitas)

  Polo que o sistema é compatible determinado.

- Se $a = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

En A temos o menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ logo $rg(A) = 2$

En A^* a 1ª e a 3ª fila son iguais, polo tanto o rango non pode ser 3, así que o rango é 2 (collemos o mesmo menor que para A).

$rg(A) = rg(A^*) = 2 <$ nº incógnitas

Polo que o sistema é compatible indeterminado

- Se $a = -1$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

En A temos o menor $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ logo $rg(A) = 2$

Consideramos o menor de A^* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4 \neq 0$

Neste caso $rg\, A = 2 \neq rg\, A^* = 3$, o sistema é incompatible.

3.1. a) Sexa a función $f(x) = ax^3 + bx^2 + x - 1$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina os valores de a e b para que a gráfica de $f(x)$ pase polo punto $(1, 1)$ y teña aí un punto de inflexión.

b) Sexa a función $f(x) = x \sin x - \cos x$. Enuncia o teorema de Rolle e úsao para razoar se a función $f(x)$ ten polo menos un extremo relativo no intervalo $[-1, 1]$.

Castilla La Mancha 2021

a) Para que pase polo punto (1,1) temos que

$$f(1) = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 1 - 1 = a + b = 1$$

Para que sexa punto de inflexión $f''(x) = 0$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Pto infl.

$$f''(1) = 6a \cdot 1 + 2b = 6a + 2b \overset{\downarrow}{=} 0$$

Logo temos

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 6a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 3a = 1 \Rightarrow -2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \\ b = -3a \qquad\qquad \Rightarrow b = \frac{3}{2} \end{cases}$$

b) Teorema de Rolle: Sexa f continua en $[a,b]$ e derivable en (a,b) e tal que $f(a) = f(b)$. Entón existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

$f(x) = x \operatorname{sen} x - \cos x$ é continua en $[-1,1]$
é derivable en $(-1,1)$

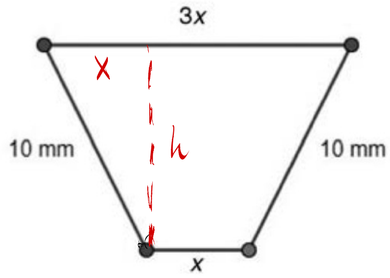
$$f(-1) = -1 \cdot \operatorname{sen}(-1) - \cos(-1) = 0{,}3011$$
$$f(1) = 1 \operatorname{sen}(1) - \cos(1) = 0{,}3011$$

$f(-1) = f(1)$

Polo que existe $c \in (-1,1) \,/\, f'(c) = 0$

Para que un punto sexa extremo relativo, a súa derivada é 0, así que temos que c é extremo relativo.

3.2. Queremos construír unha peza metálica que teña por sección un trapecio isósceles coa base superior tres veces máis longa que a base inferior. Os outros lados do trapecio miden 10 mm, tal e como se pode observar na seguinte figura:



a) Exprese a altura do trapecio en función da lonxitude x da base inferior. [0,5 puntos]

b) Calcule a lonxitude da base inferior do trapecio de forma que a área da peza sexa máxima e atopa o valor desa área máxima. [1,5 puntos]

Cataluña 2023

a) $10^2 = x^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{100 - x^2}$

b) Área do trapecio: (dos triángulos de altura h e base x, e un rectángulo de altura h e base x)

$$A = x\sqrt{100 - x^2} + 2\,\frac{x\sqrt{100-x^2}}{2} = 2x\sqrt{100-x^2}$$

Para calcular os extremos derivamos

$$A'(x) = 2\sqrt{100-x^2} + 2x \cdot \frac{1}{2}\,\frac{-2x}{\sqrt{100-x^2}} =$$

$$= 2\sqrt{100-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{100-x^2}} = \frac{2(100-x^2) - 2x^2}{\sqrt{100-x^2}} =$$

$$= \frac{200 - 4x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

$A'(x) = 0 \Rightarrow 200 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 50 \Rightarrow x = \sqrt{50}$

(raíz positiva porque a distancia non é negativa.

Comprobo que é máximo:

$\underset{\sqrt{50}}{\overset{A'(x)>0 \quad A'(x)<0}{\longrightarrow}}$ Efectivamente $x=\sqrt{50}$ é máximo.

$$A(\sqrt{50}) = 2\cdot\sqrt{50}\cdot\sqrt{100-(\sqrt{50})^2} = 100\ u^2.$$

3.3. Dada a seguinte función $f(x) = \begin{cases} 5-ax^2 & \text{se } x \leq 1 \\ \dfrac{6}{ax} & \text{se } x > 1 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

a) Calcule los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que a función $f(x)$ sexa continua. b) Determine xustificadamente para que valor dos anteriores verifícase que a área pechada pola función $f(x)$, o eixe OX e as rectas $x=0$ e $x=e$ sexa $6u^2$.

Aragón 2021

a) En $(-\infty,1)$ a función é polinómica logo é continua para todo valor de a

En $(1,+\infty)$ a función é unha fracción alxebraica que non se anula, xa que $a\neq 0$ e $x>1$, polo tanto é continua.

Para que sexa continua en $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 5-ax^2 = 5-a = f(1) \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{6}{ax} = \dfrac{6}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underset{\text{continuidad}}{\Rightarrow} 5-a = \frac{6}{a} \Rightarrow 5a-a^2 = 6 \Rightarrow a^2-5a+6=0$$

$$(a-2)(a-3)=0$$

A función é continua para $a=2$ e $a=3$.

b) $\int_0^e f(x)\,dx = 6$

$$\int_0^1 (5 - ax^2)\,dx + \int_1^e \frac{6}{ax}\,dx = 5x - \frac{ax^3}{3}\Big]_0^1 + \frac{6}{a}\ln x\Big]_1^e =$$

$$= 5 - \frac{a}{3} + \frac{6}{a}(1-0) = 5 - \frac{a}{3} + \frac{6}{a} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15a - a^2 + 18 = 18a \Rightarrow a^2 + 3a - 18 = 0$$

$$(a+6)(a-3) = 0$$

O valor que cumpre que a función é continua e a área é 6 é $a = 3$.

4.1. Considere o plano $\pi : 2ax + y + az = 4$ e a recta $r : \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$

a) Determine a posición do plano e a recta segundo os diferentes valores de a.

b) Para $a = 2$, determine a recta que é perpendicular ao plano π e pasa polo punto $P(0, 1, 0)$.

Aragón 2018

a) Temos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \pi \\ \Big\} r \end{matrix} \qquad |A| = 4a - 1 + 2a + a - 2a - 4$$

$$= 5a - 5$$

$|A| = 0 \Rightarrow 5a - 5 = 0 \Rightarrow a = 1$

Polo tanto se $a \neq 1$, $\text{rg}\, A = 3 \Rightarrow$ sistema compatible determinado

· se $a = 1$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right), \text{ consideramos o menor}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3+2+8-4-4-3 = 2$$

Neste caso $rg\, A = 2 \neq rg\, A^* = 3$, o sistema é incompatible.

Entón se $a \neq 1$ o plano e a recta son secantes, e se $a = 1$ a recta e o plano son paralelas

b) Se a recta é perpendicular ao plano, o vector director da recta coincide co vector normal do plano.

$\vec{n}_\pi = (4,1,2) \equiv \vec{v}_r$

$P(0,1,0)$ punto da recta

$$r: \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

4.2. Os puntos $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$ e $C(1,3,3)$ son vértices consecutivos do paralelogramo $ABCD$.

a) Calcula a área do paralelogramo.

b) Atopa a ecuación xeral do plano que contén a dito paralelogramo.

c) Calcula as coordenadas do vértice D.

Andalucía 2017

a) Para calcular a área, vemos os vectores que determinan os puntos.

$\vec{AB} = (1,1,1) \quad \vec{AC} = (0,2,2)$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (2-2, -(2-0), 2-0) = (0,-2,2)$$

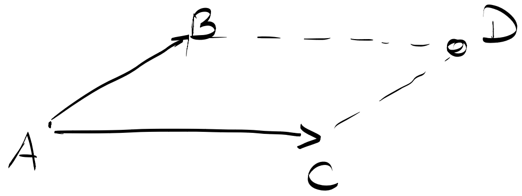
$$\text{Área} = |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{0^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{8}\ u^2$$

b) Temos un punto $A(1,1,1)$ e dos vectores directores do plano.

$$\Pi: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda + 2\mu \\ z = 1 + \lambda + 2\mu \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad ; \quad \Pi: y = z$$

$$y - z = 0$$

c)



$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (1,1,1) + (0,2,2) = (1,3,3)$$

$$\overrightarrow{AD} = (1,3,3)$$
$$A = (1,1,1) \longrightarrow D = (0,2,2).$$