

Tema 8 - Funciones (Pag. 212)

Una función es una relación entre dos variables x e y , de forma que a cada valor de x le corresponde un único valor de y .

La variable x se denomina variable independiente, la variable y se denomina variable dependiente.

Dominio: todos los valores de x para los que existe la función.

$$f(x) = 7x^2 - 5x \quad \text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \sqrt{x+4} \quad \text{Dom } g(x) = [-4, +\infty)$$

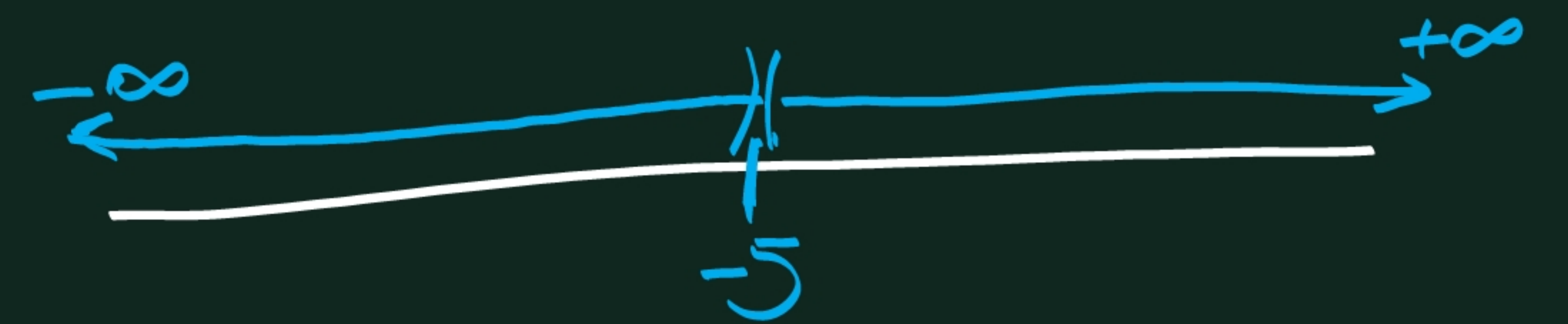
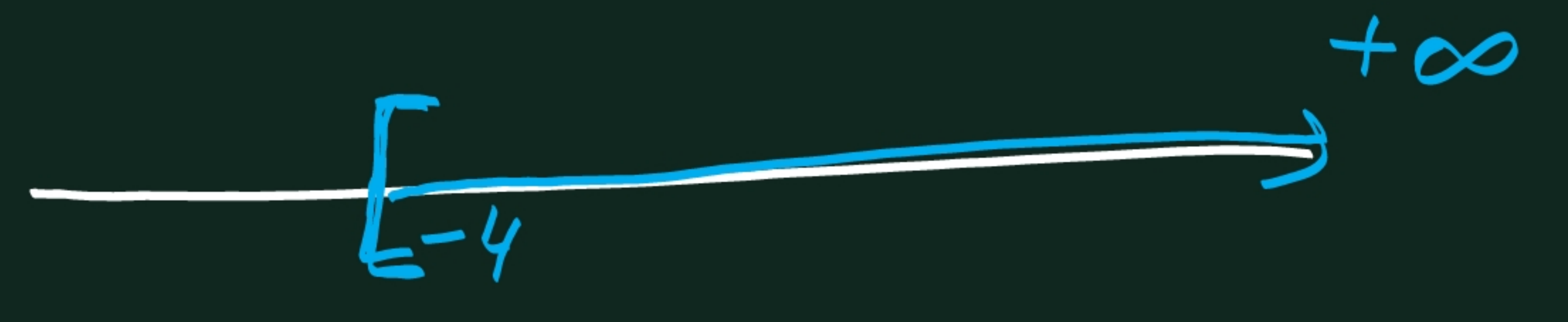
$$x+4=0 \rightarrow x=-4$$

$$h(x) = \frac{17x^2 - 5x + 4}{x+5}$$

$$x+5=0 \rightarrow x=-5$$

$$\text{Dom } h(x) = \mathbb{R} - \{-5\}$$

$$= (-\infty, -5) \cup (-5, +\infty)$$

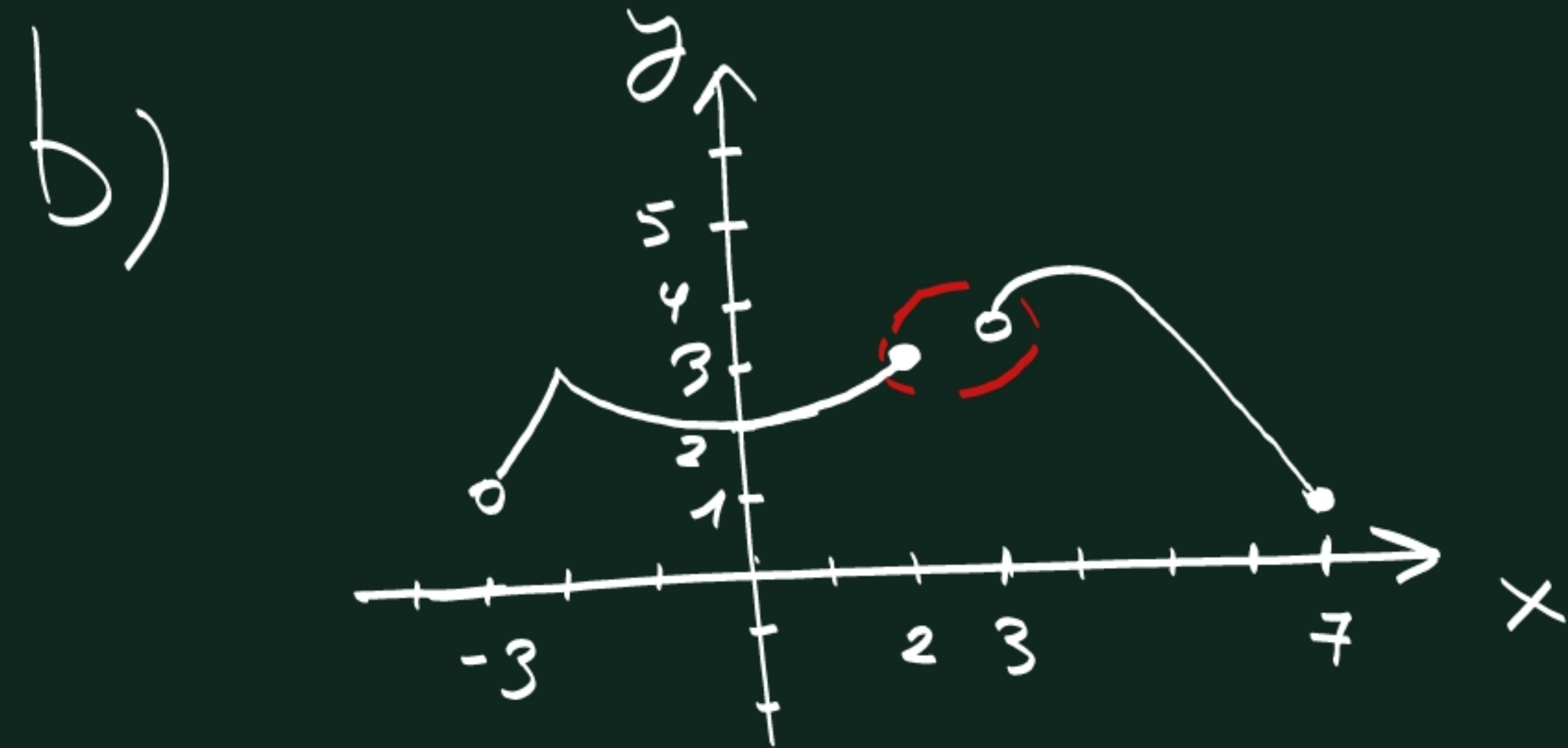
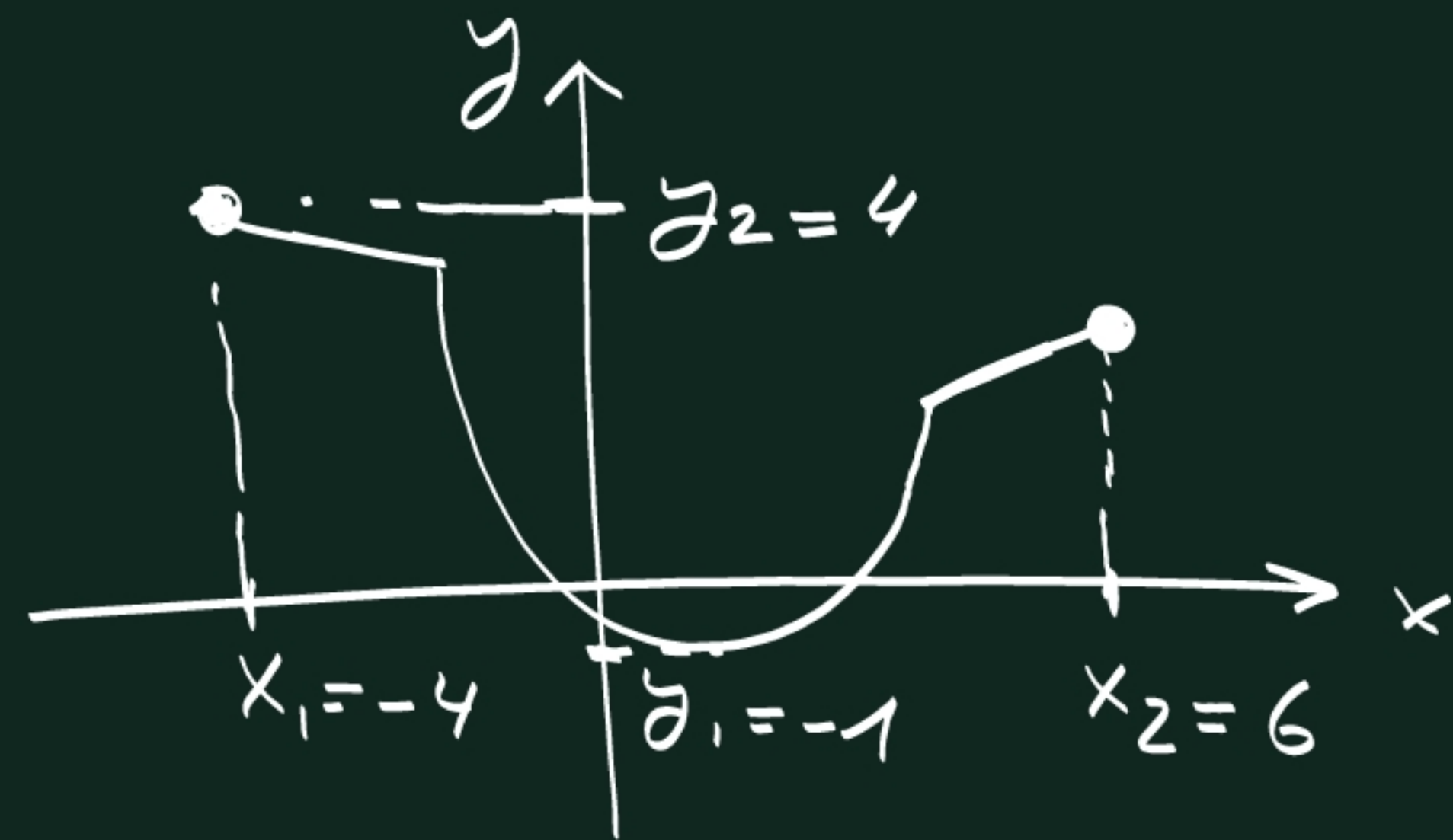


Recorrido: son los valores de y para los que existe la función.

↓
Sólo gráficamente.

Pág. 215, Ej. 12

a) $\text{Dom} = [-4, 6]$, $\text{Im} = \text{Rec} = [-1, 4]$



$$\text{Dom} = [-3, 2] \cup (2, 7]$$

$$\text{Rec} = [1, 5]$$

Continuidad

Decimos que una función es continua si se puede dibujar con un solo trazo.

Se llama puntos de discontinuidad a aquellos en los que se interrumpe la representación gráfica.

Puntos de Corte

Los pto. de corte con los ejes de una función son los pto. donde la gráfica se cruza con los ejes de coordenadas.

- Ptos Corte Eje X: son del tipo $(a, 0)$, y se

calculan resolviendo $f(x)=0$.

- Pto. Corte Eje Y: son del tipo $(0, b)$ y se calcula

resolviendo $f(0)$, es decir $f(0)=b$. El pto. de corte con el eje Y es único.

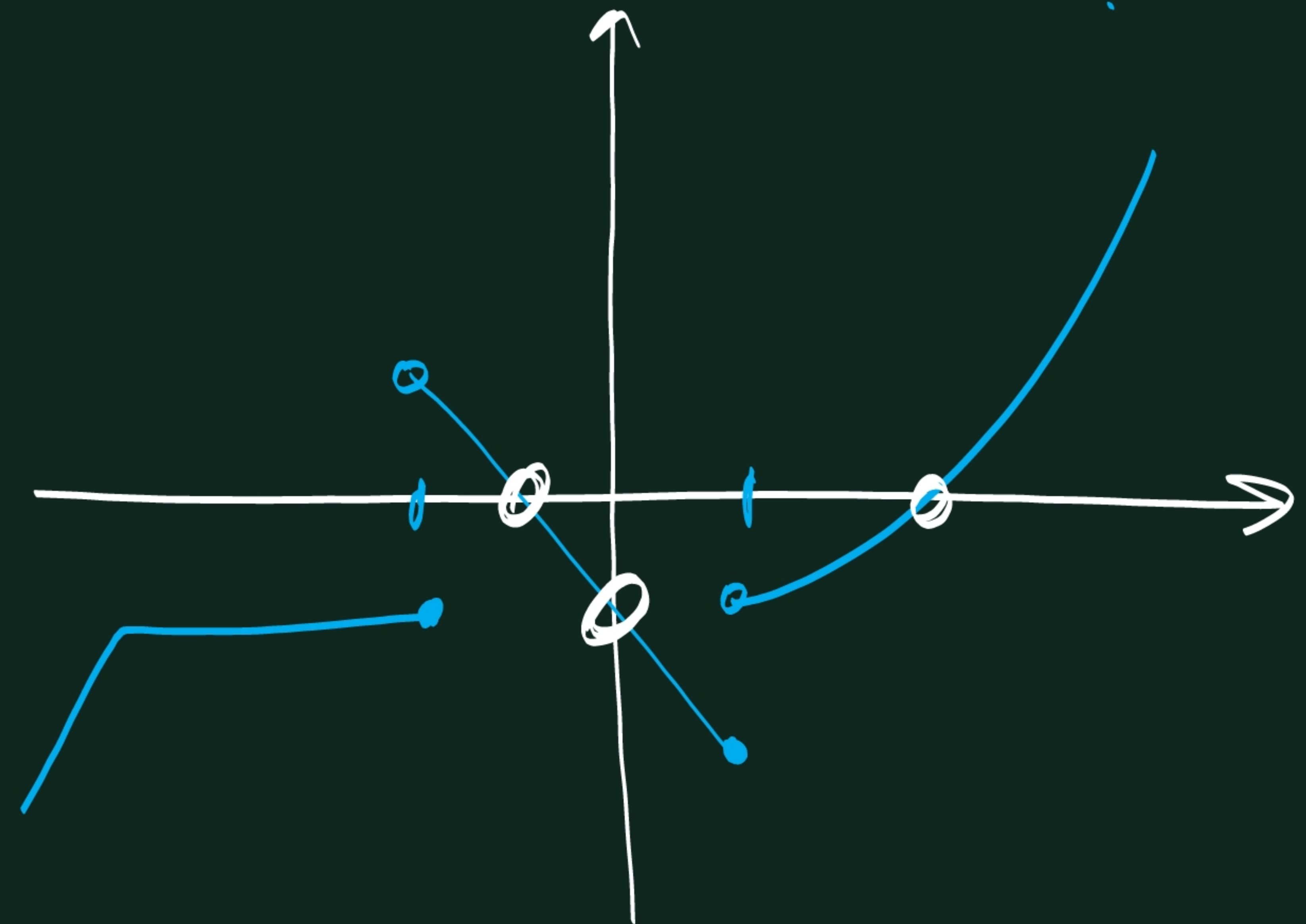
Pág. 216, Ej 16 / Pág 217, Ej 19

(16) Discontinuidad en: $x = -2$ y $x = 1$ $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$

Ptos Corte Eje X: $(-1, 0)$, $(2, 0)$

Dom = $\mathbb{R}$

Pto. Corte Eje Y: $(0, -1)$



19 a) $y = 3x + 1$ (x, y)

• Eje X: $y = 0$ $(-1/3, 0)$

$$0 = 3x + 1$$

$$-1 = 3x$$

$$x = -1/3$$

• Eje Y: $x = 0$ $(0, 1)$

$$y = 0 + 1 = 1$$

b) $y = -2x + 3$

Eje X: $y = 0$ $(3/2, 0)$

$$0 = -2x + 3$$

$$-3 = -2x$$

$$x = -3/-2 = 3/2$$

Eje Y: $x = 0$

$$y = 0 + 3 = 3$$

$$(0, 3)$$

$$c) y = 3(x+1)$$

$$\text{Eje X: } y=0 \quad (-1, 0) \quad \text{Eje Y: } x=0 \quad (0, 3)$$

$$0 = 3(x+1)$$

$$0 = 3x + 3$$

$$x = -3/3 = \boxed{x = -1}$$

$$y = 3(0+1)$$

$$y = 0+3$$

$$\boxed{y = +3}$$

$$d) y = \frac{3x+2}{4}$$

$$\text{Eje X } y=0 \quad (-2/3, 0)$$

$$0 = \frac{3x+2}{4} \Rightarrow 0 = 3x+2$$

$$-3x = 2$$

$$\boxed{x = 2/-3}$$

$$\text{Eje Y } x=0 \quad (0, \frac{1}{2})$$

$$y = \frac{3 \cdot 0 + 2}{4} \Rightarrow y = \frac{0+2}{4} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$e) y = x^2 - 9$$

$$y = x^2 - 9$$

$$0 = x^2 - 9$$

$$+x^2 = +9$$

$$x = \sqrt{9} = \pm 3$$

$$y = x^2 - 9$$

$$y = 0 - 9$$

$$y = -9$$

$$\text{eje } x \rightarrow (3, 0) \text{ y } (-3, 0)$$

$$\text{eje } y \rightarrow (0, -9)$$

$$f) y = x^2 + x - 6 \rightarrow$$

Punto de corte Eje x

$$\frac{-1 \pm 5}{2} < \begin{matrix} +2 \\ -3 \end{matrix}$$

$$x: (2, 0)$$

$$(-3, 0)$$

Punto de corte Eje y

$$y: (0, -6)$$

$$g) y = 4x^2 + 8x - 5$$

Corte Eje X:

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 80}}{8} = \frac{-8 \pm \sqrt{144}}{8} = \frac{-8 \pm 12}{8}$$

$$\begin{cases} 1/2 = 0,5 \rightarrow (0,5; 0) \\ -5/2 = -2,5 \rightarrow (-5/2, 0) \end{cases}$$

$$h) y = \frac{x^2 - 16}{3}$$

Corte Eje X:

$$0 = \frac{x^2 - 16}{3} \rightarrow x^2 - 16 = 0$$

$$x = \pm 4$$

$$(4, 0), (-4, 0)$$

Corte Eje Y:

$$x = 0 \rightarrow y = -5$$

$$(0, -5)$$

Corte Eje Y:

$$y = \frac{-16}{3} \rightarrow (0, -\frac{16}{3})$$

Crecimiento y Decrecimiento

Para una función continua $f(x)$ podemos tomar intervalos y estudiar su comportamiento:

- Si el valor de $f(x)$ aumenta en todo el intervalo a medida que aumenta " x ", la función es creciente en dicho intervalo.
- Si el valor de $f(x)$ disminuye en todo el intervalo a medida que aumenta " x ", la función es decreciente en dicho intervalo.
- Si el valor de $f(x)$ no varía en todo el intervalo a medida que aumenta " x ", la función es constante en dicho intervalo.

Llamamos máximo de una función a un punto donde la función pasa de crecer a decrecer.

MAX

Llamamos mínimo de una función a un punto donde la función pasa de decrecer a crecer.

min

Máximo absoluto de una función es un máximo que además es el punto más alto de la función. El resto son máximos relativos.



Mínimo absoluto de una función es un mínimo que además es el punto más bajo de la función, el resto serían mínimos relativos.

Página 218, Ej 25

" 219, Ej 28 y 29

(25) Máximo: $(3, 3)$ ↗ ↘

Mínimos $\begin{cases} (-3, -1) \\ (4, 2) \end{cases}$ ↘ ↗

a) Sí que es creciente.

b) No, es constante.

(28) a) Crece: $(6, 16) \cup (18, 20)$

Decrece: $(0, 6) \cup (16, 18) \cup (20, 24)$

b) Ruidoso: 16:00

Silencioso: 6:00

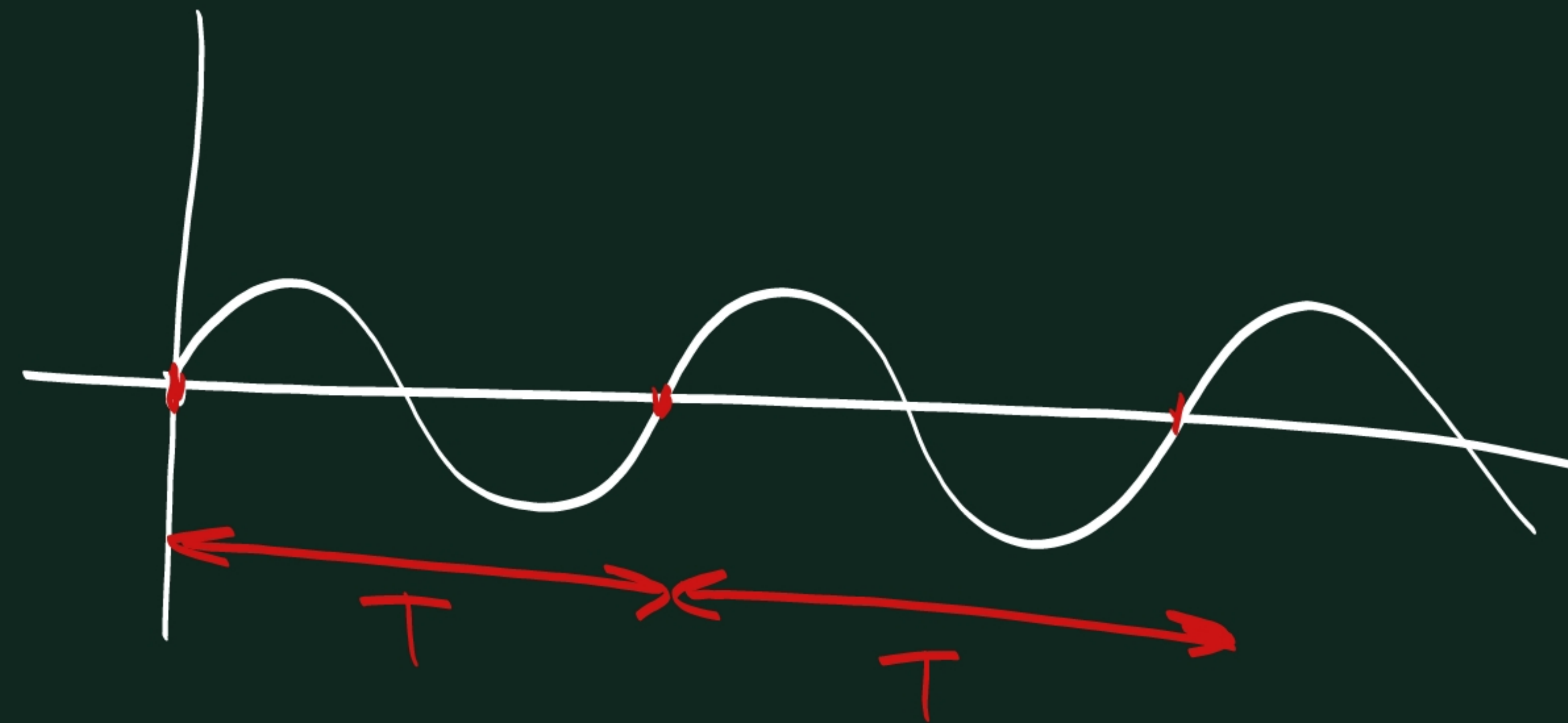
(29) Cuesta arriba: $(130, 145) \cup (155, 165) \cup (170, 172) \cup (175, 185)$

Cuesta abajo: $(145, 155) \cup (165, 170)$

Llana: $(172, 175)$

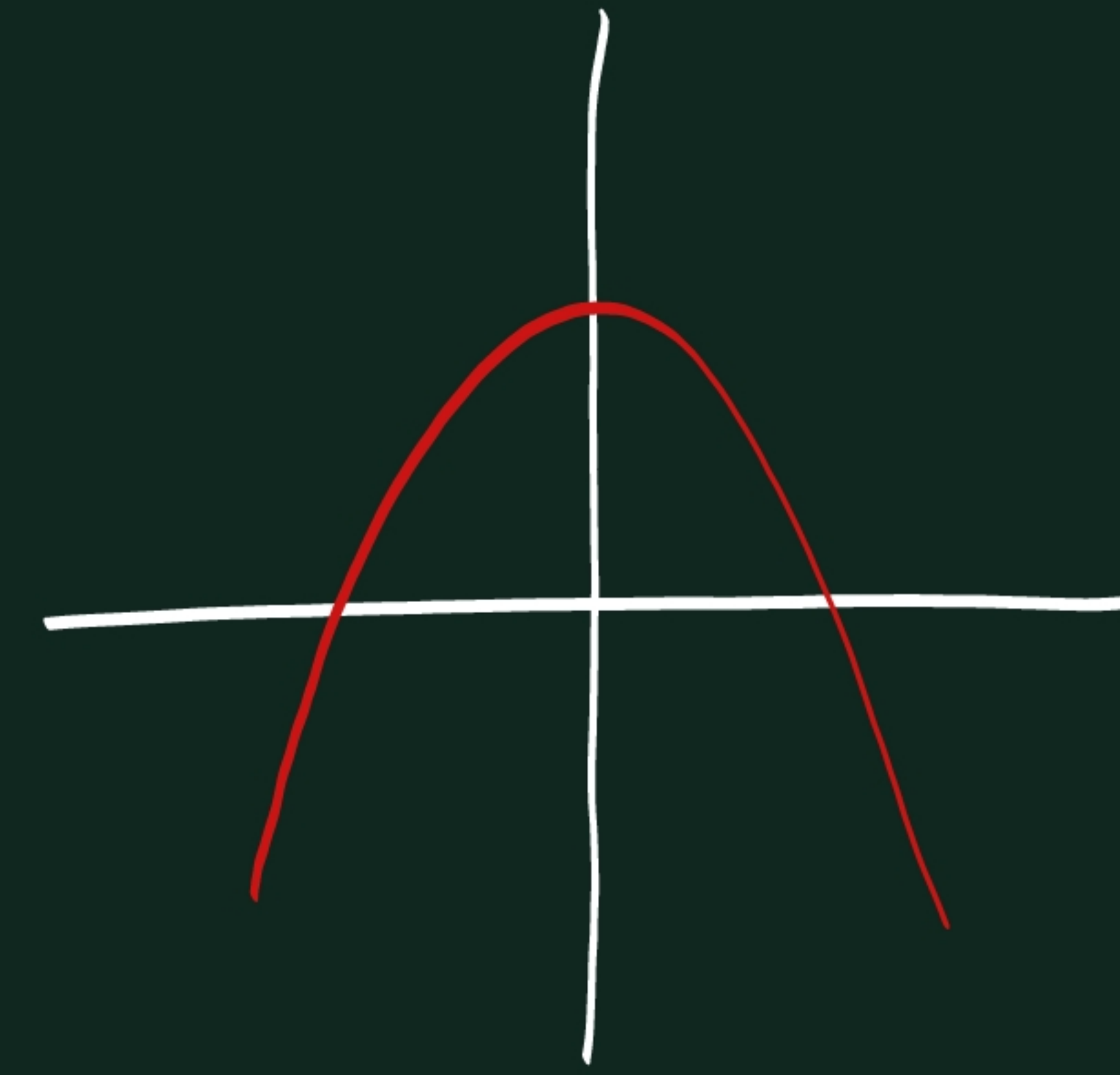
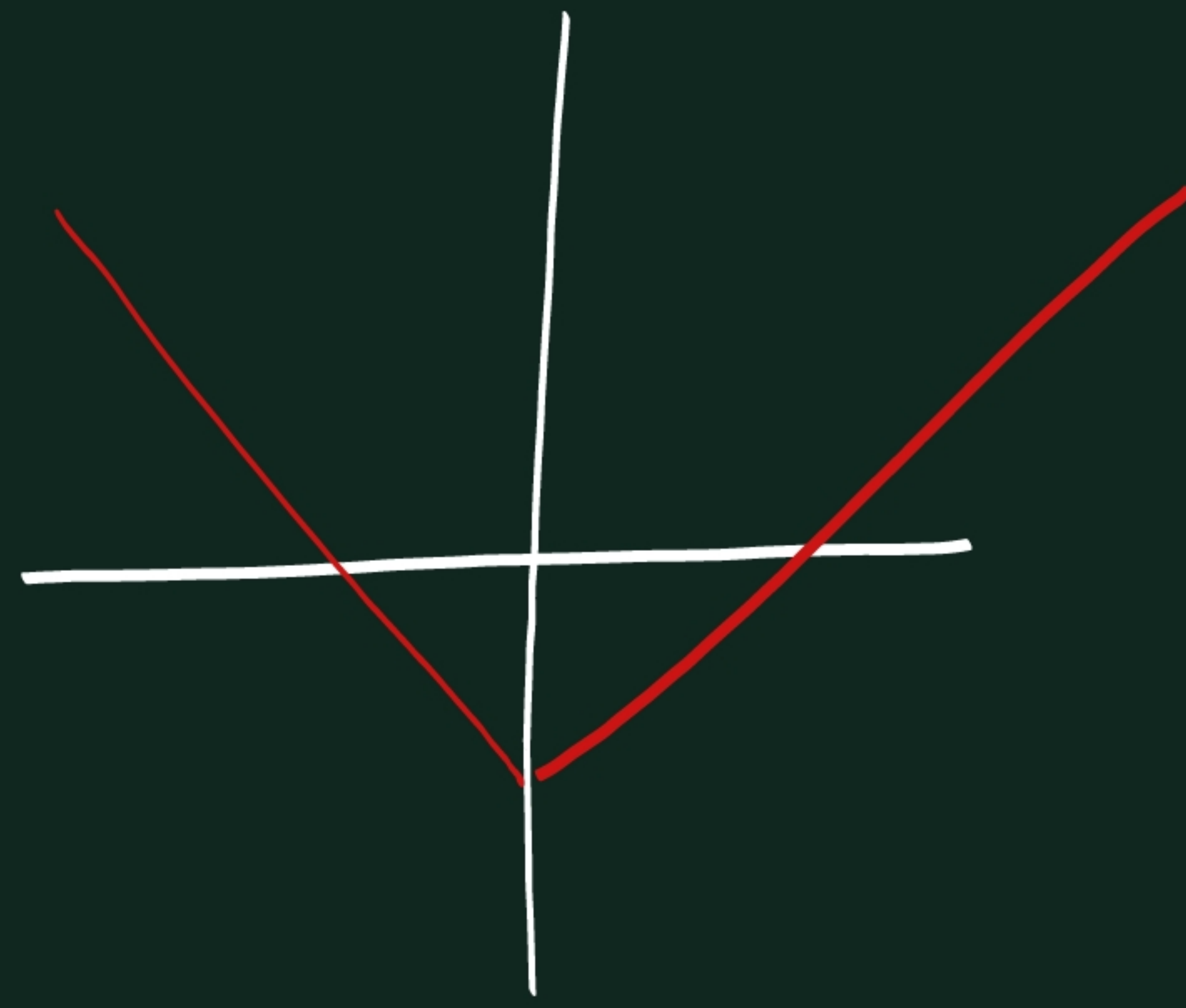
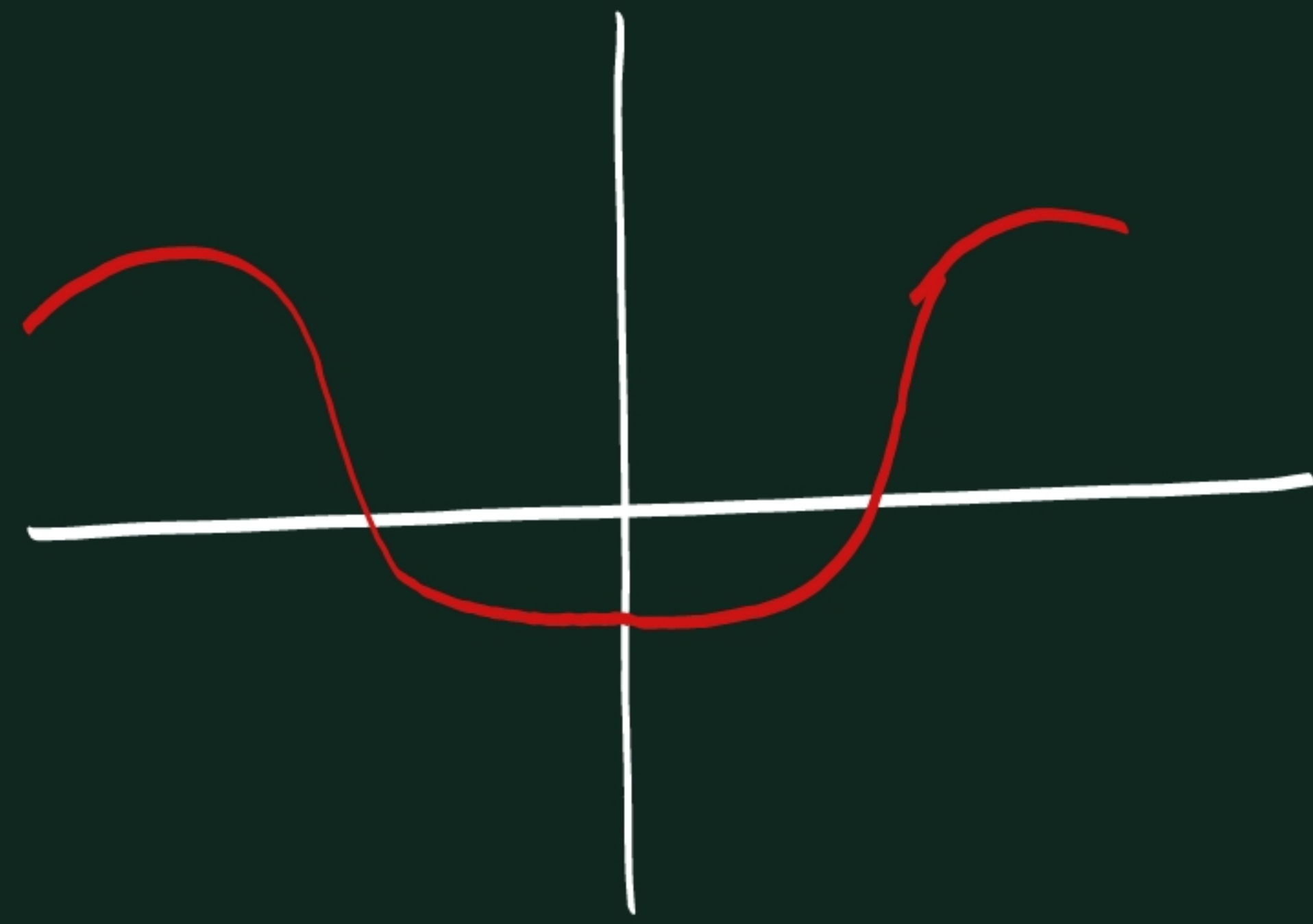
Funciones Periódicas:

Se repiten a intervalos regulares.

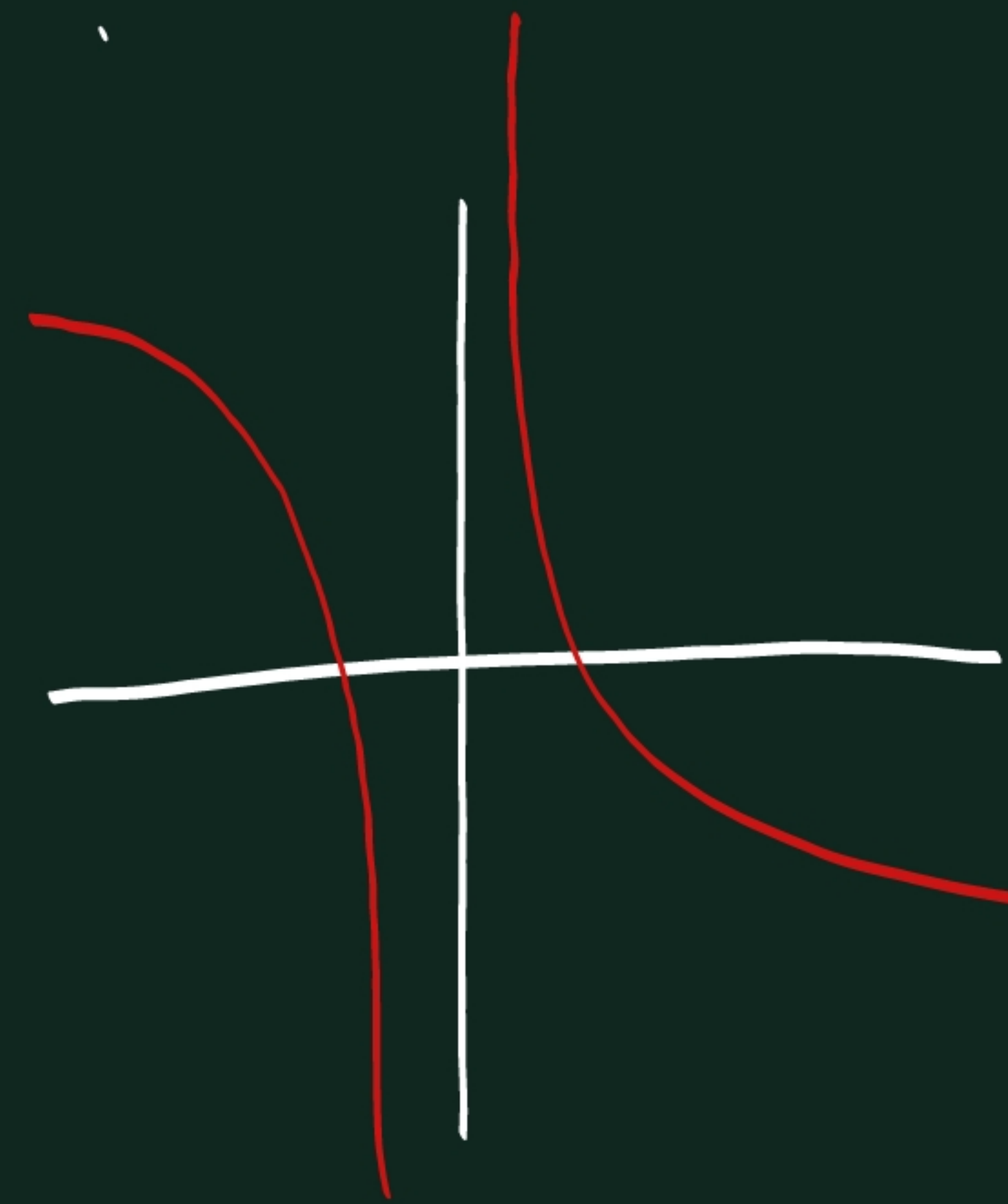
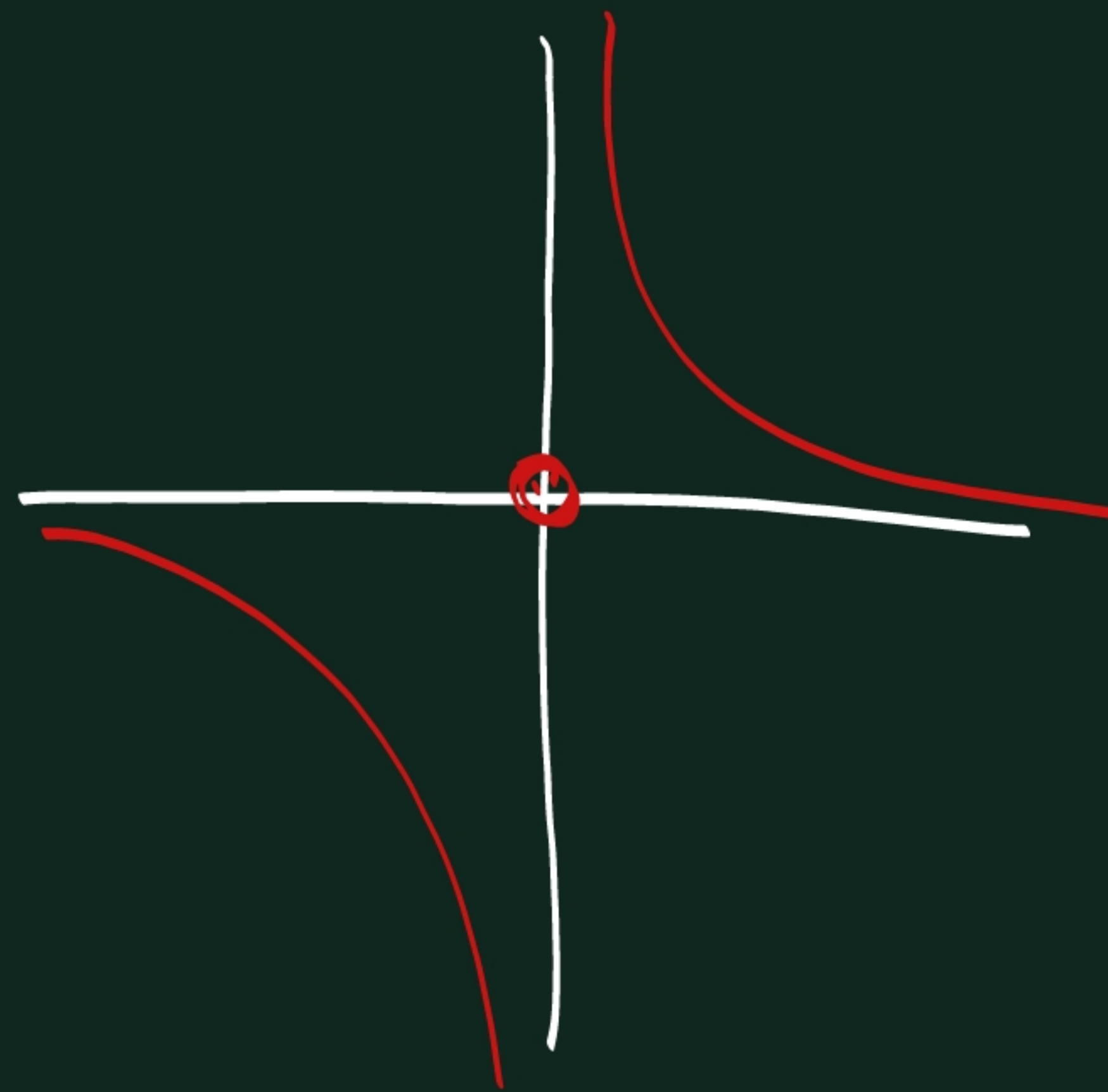


$T = \text{período}$

Simetria Par:

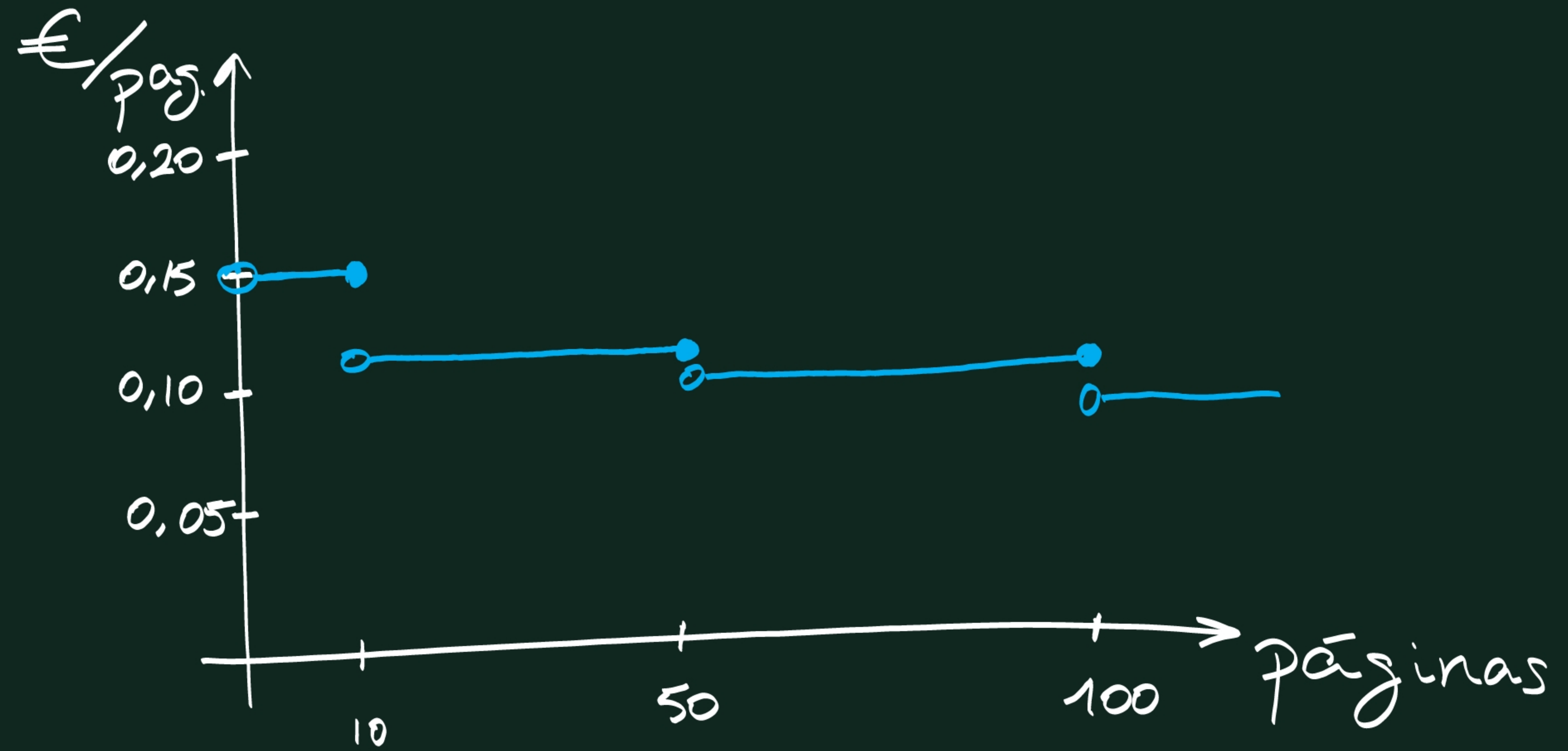


Simetria Impar:



Pág. 222, Ej 45 y 46

45



Pag. 222

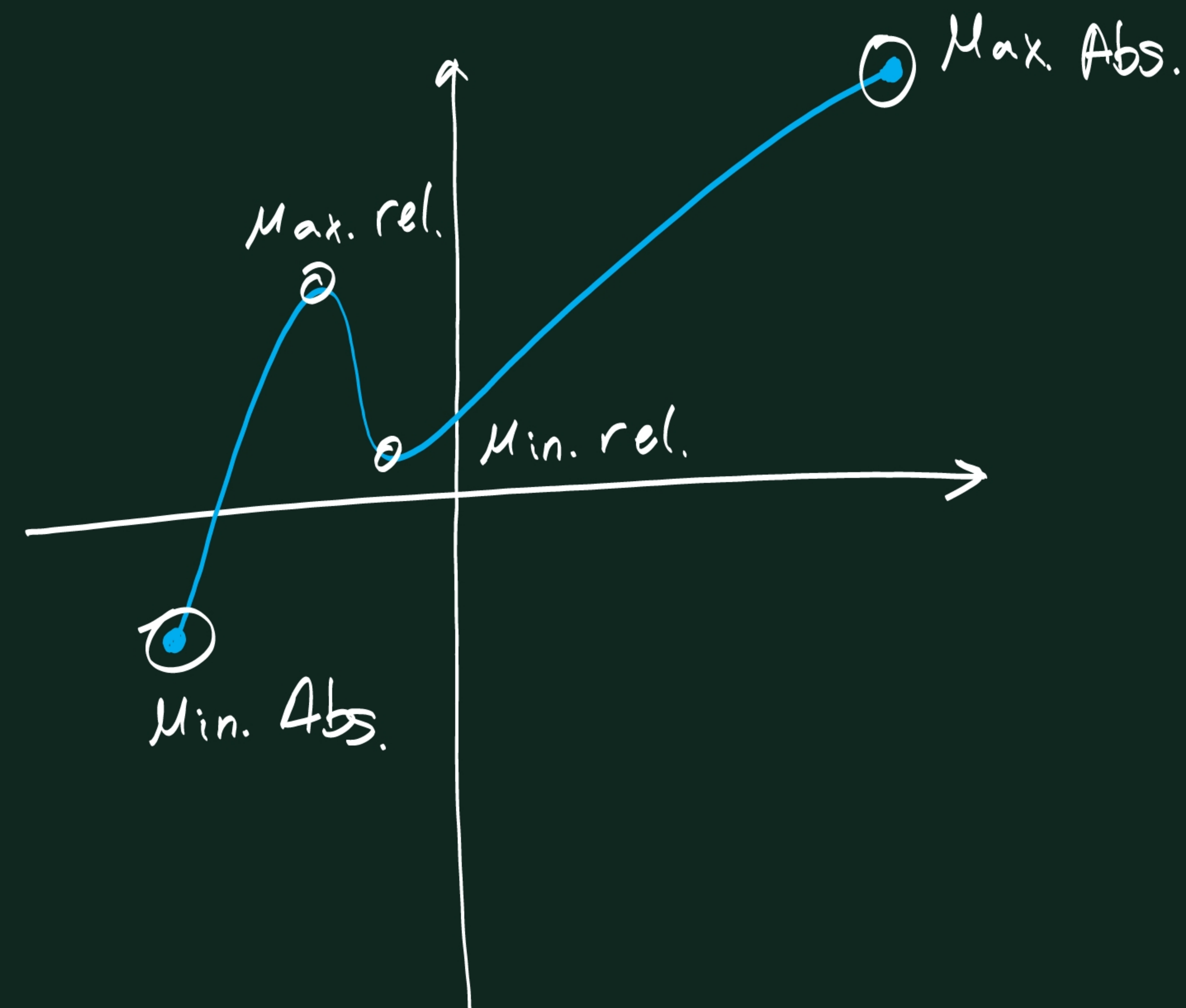
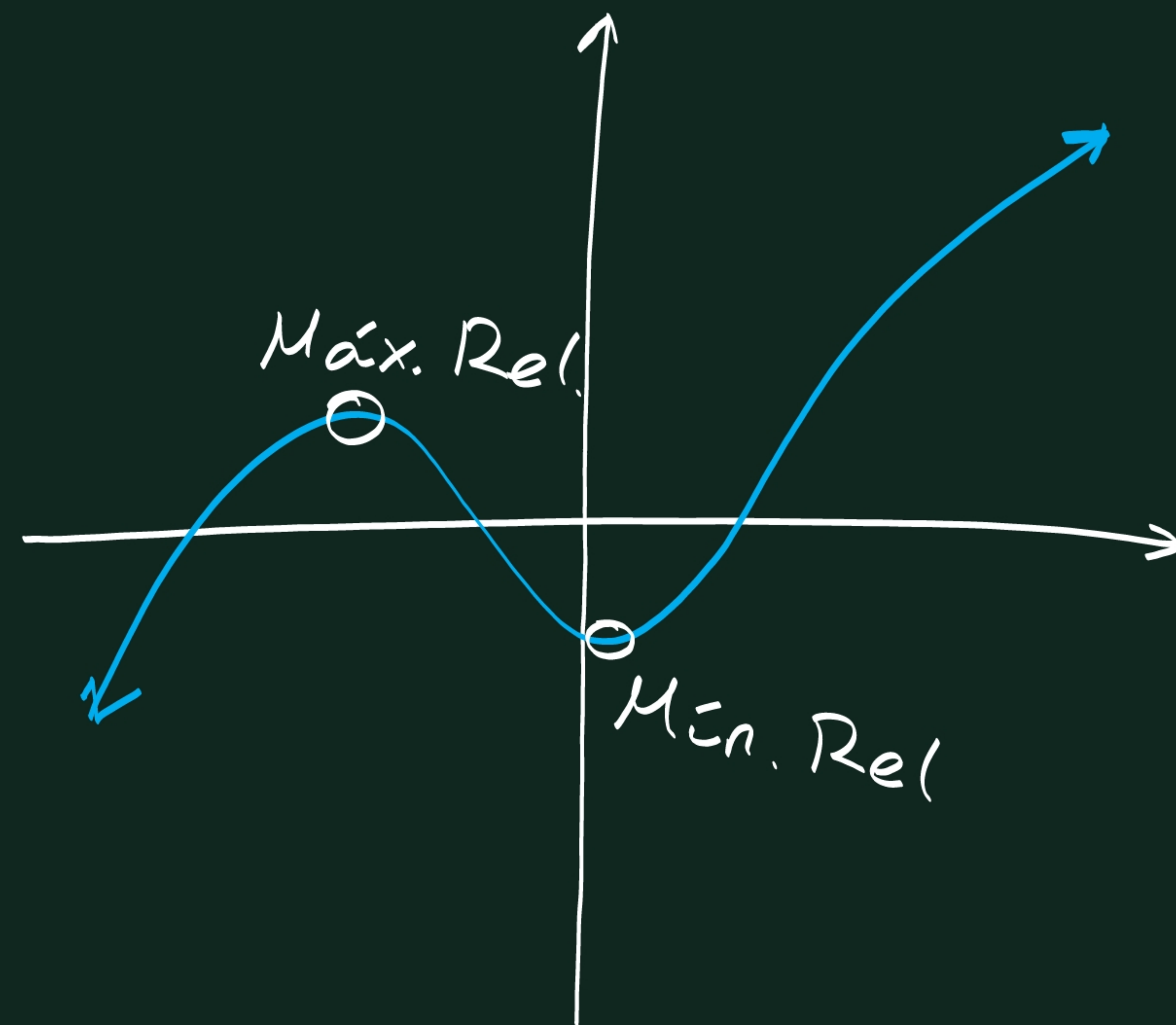
46

a) Gráfica 3

b) Gráfica 1

c) Gráfica 2

Pág 223, Ej 48 y 49 → Deberes



74

a) $y = 0,8 \cdot x$
b)

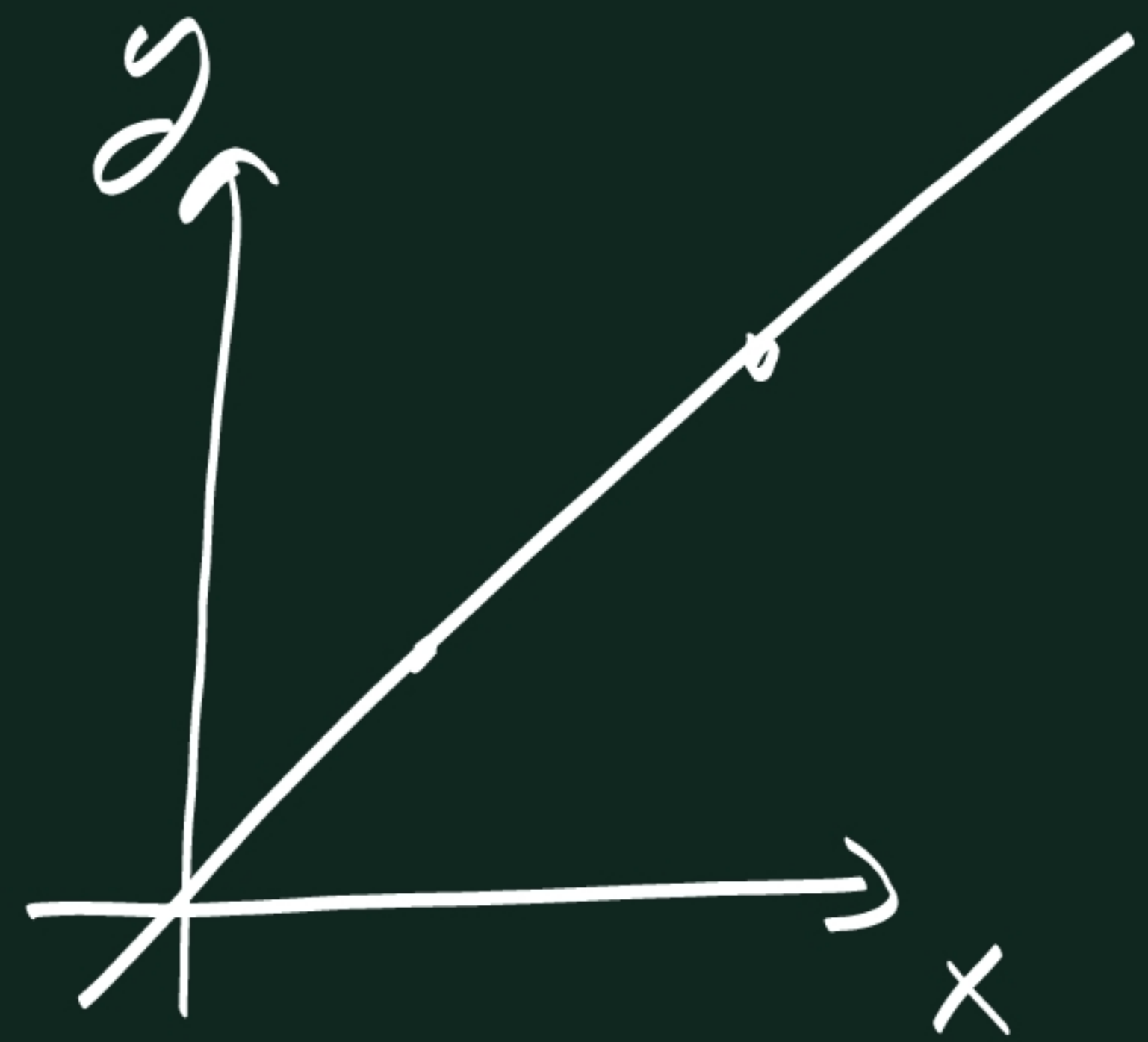
$\left\{ \begin{array}{l} y: \text{Precio final/rebajado} \\ x: \text{Precio Original.} \end{array} \right.$

c) $f(15) = 0,8 \cdot 15 = 12$
 $f(x) = y(x)$

d) $40 = 0,8 \cdot x \rightarrow x = \frac{40}{0,8} = 50$

e)

x	y
0	0
10	8
15	12
50	40



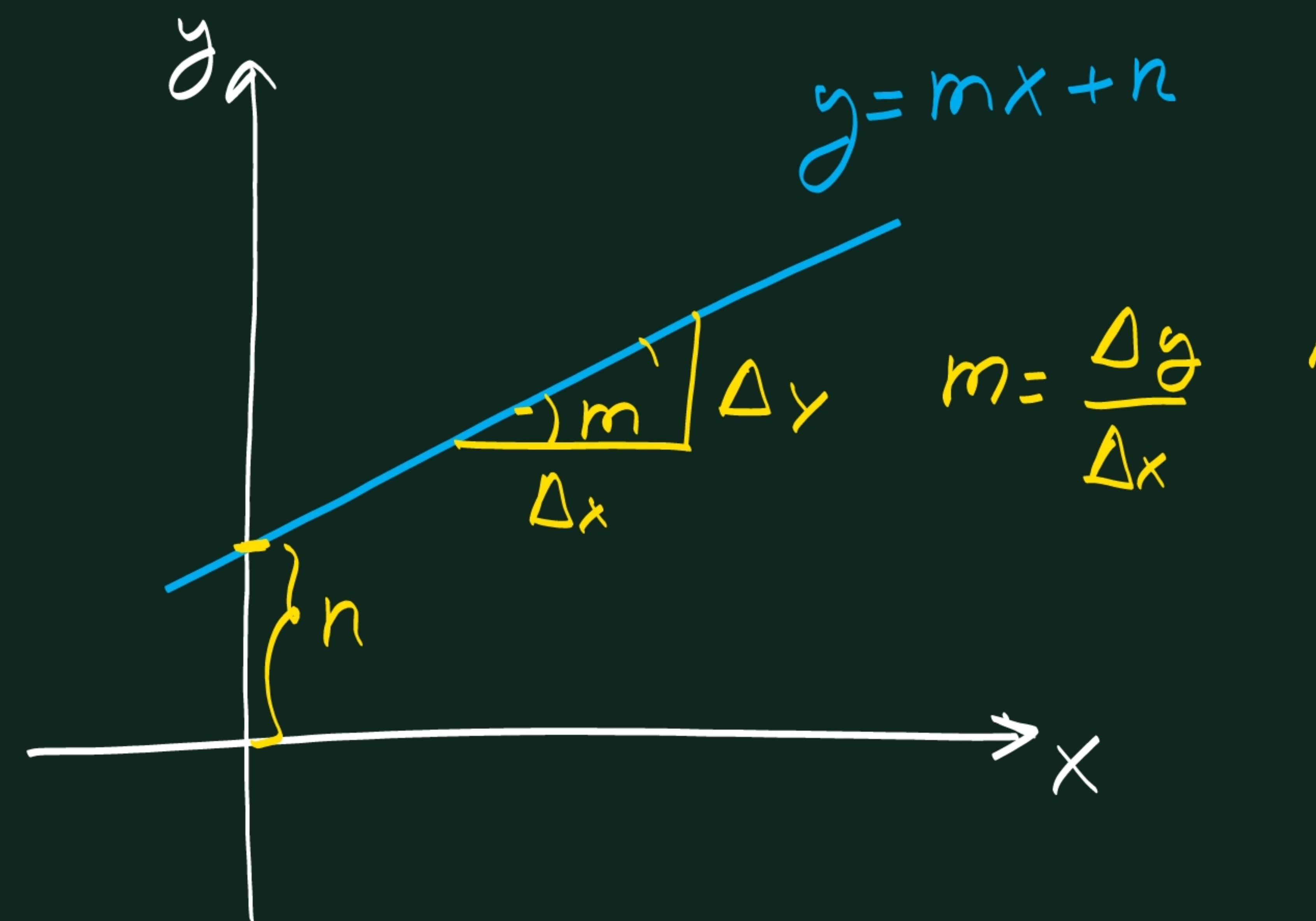
Funciones Lineales

Son del tipo: $y = mx + n$

- Representan una recta.
- Cortan al eje X en $(-\frac{n}{m}, 0)$.
- Cortan al eje Y en $(0, n)$.

m : pendiente

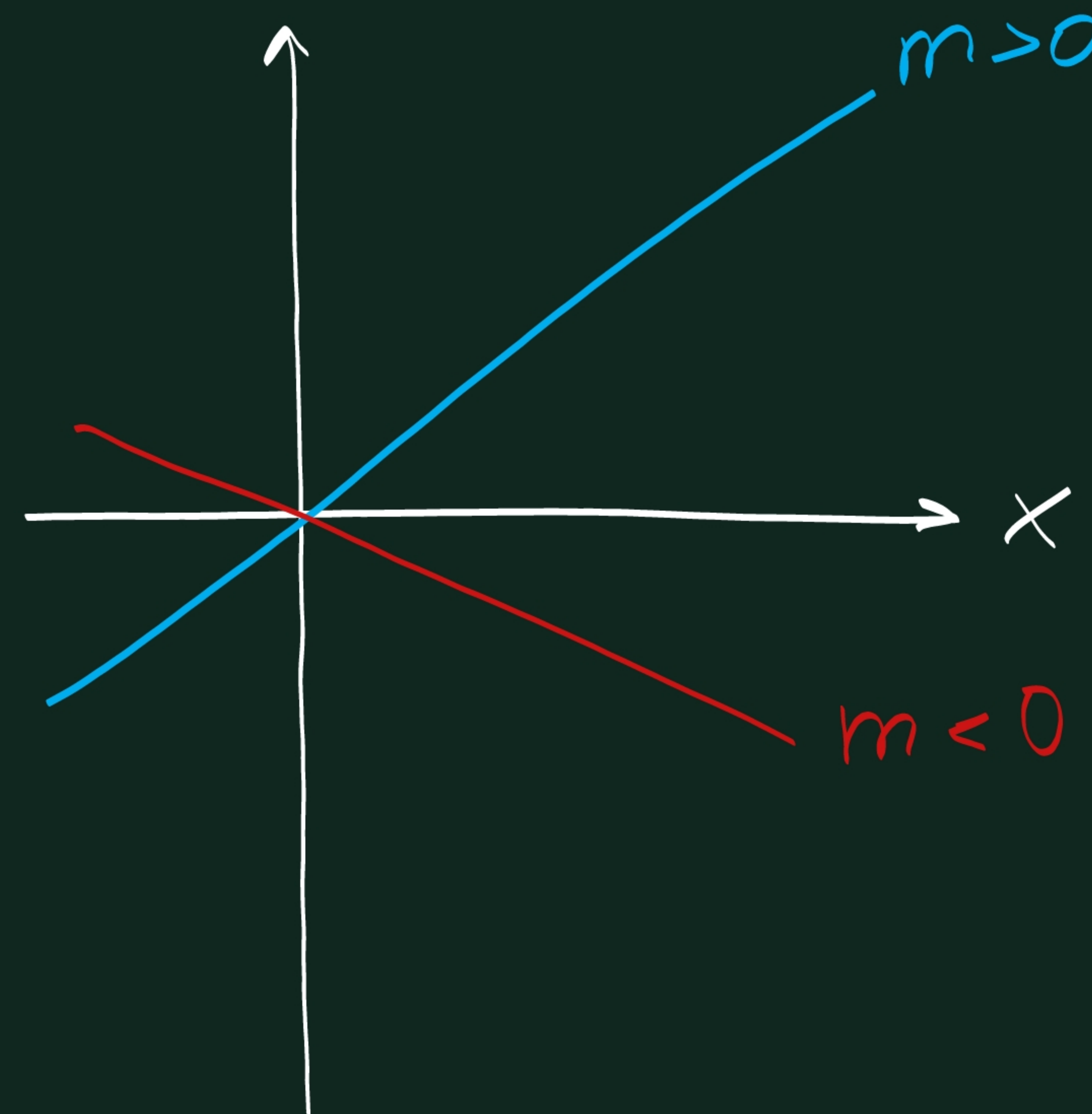
n : ordenada en el origen.



- Funciones de proporcionalidad:

Son del tipo: $y = m x$

- $n = 0$
- $m > 0 \rightarrow$ Proporcionalidad Directa
- $m < 0 \rightarrow$ $\sim$ Inversa
- Pasan por el $(0,0)$



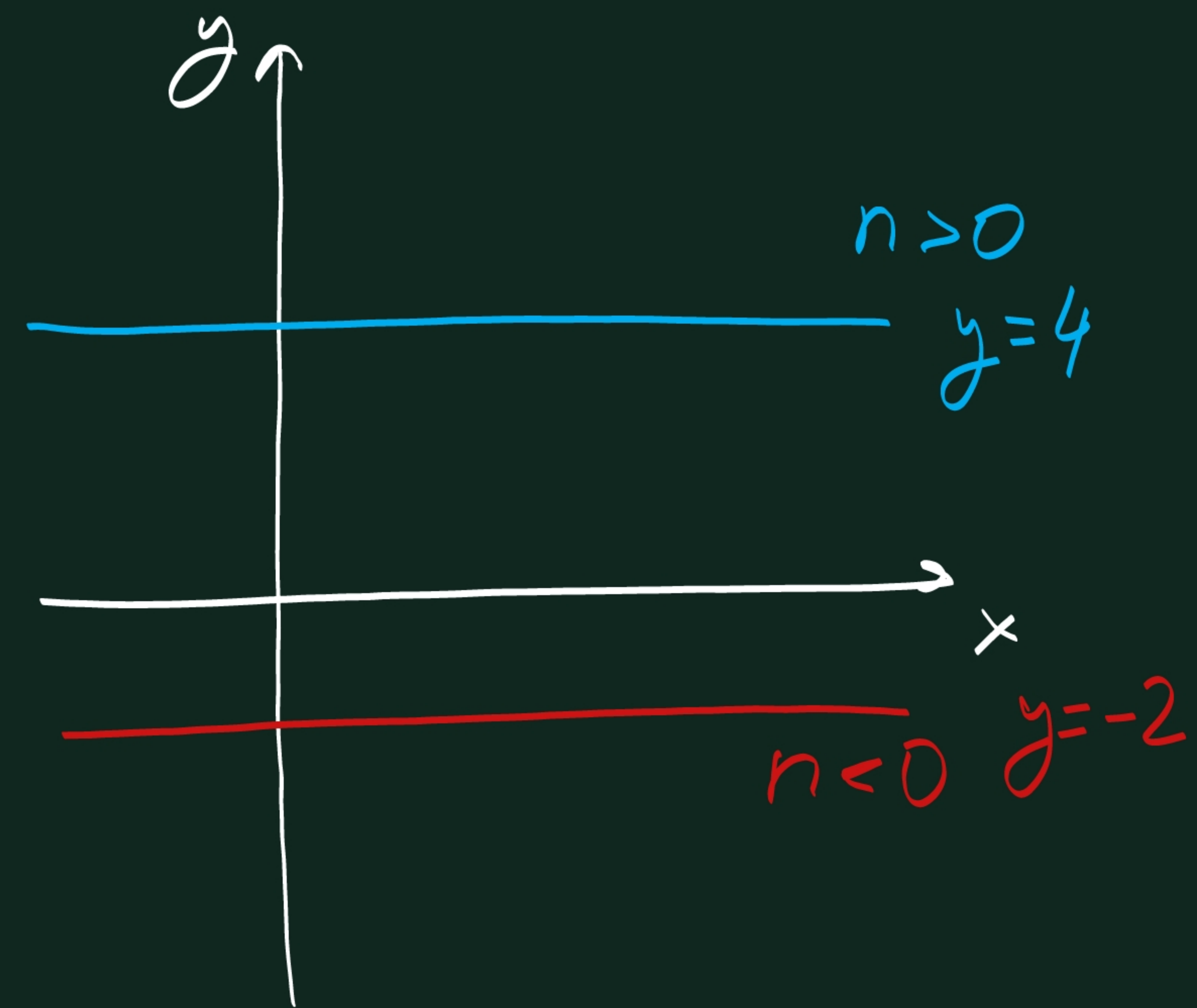
- Funciones Constantes:

Son del tipo: $y=n$

- $m = 0$

- Son rectas paralelas al eje X .

- Pasan por el punto $(0, n)$



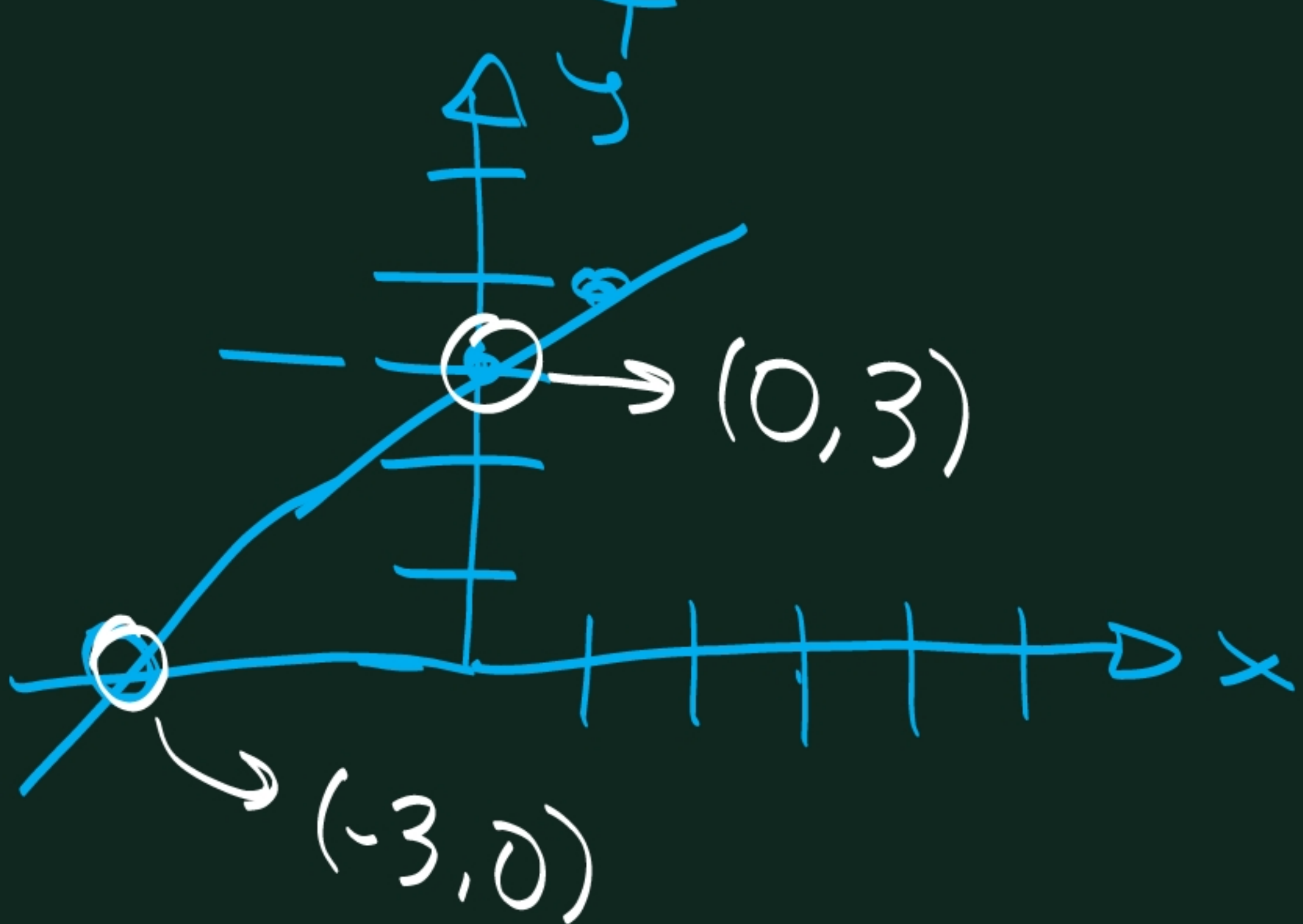
P. 233, Ej 5, 7

P. 232, Ej 3

a) $y = x + 3$

b) $y = -4x + 8$

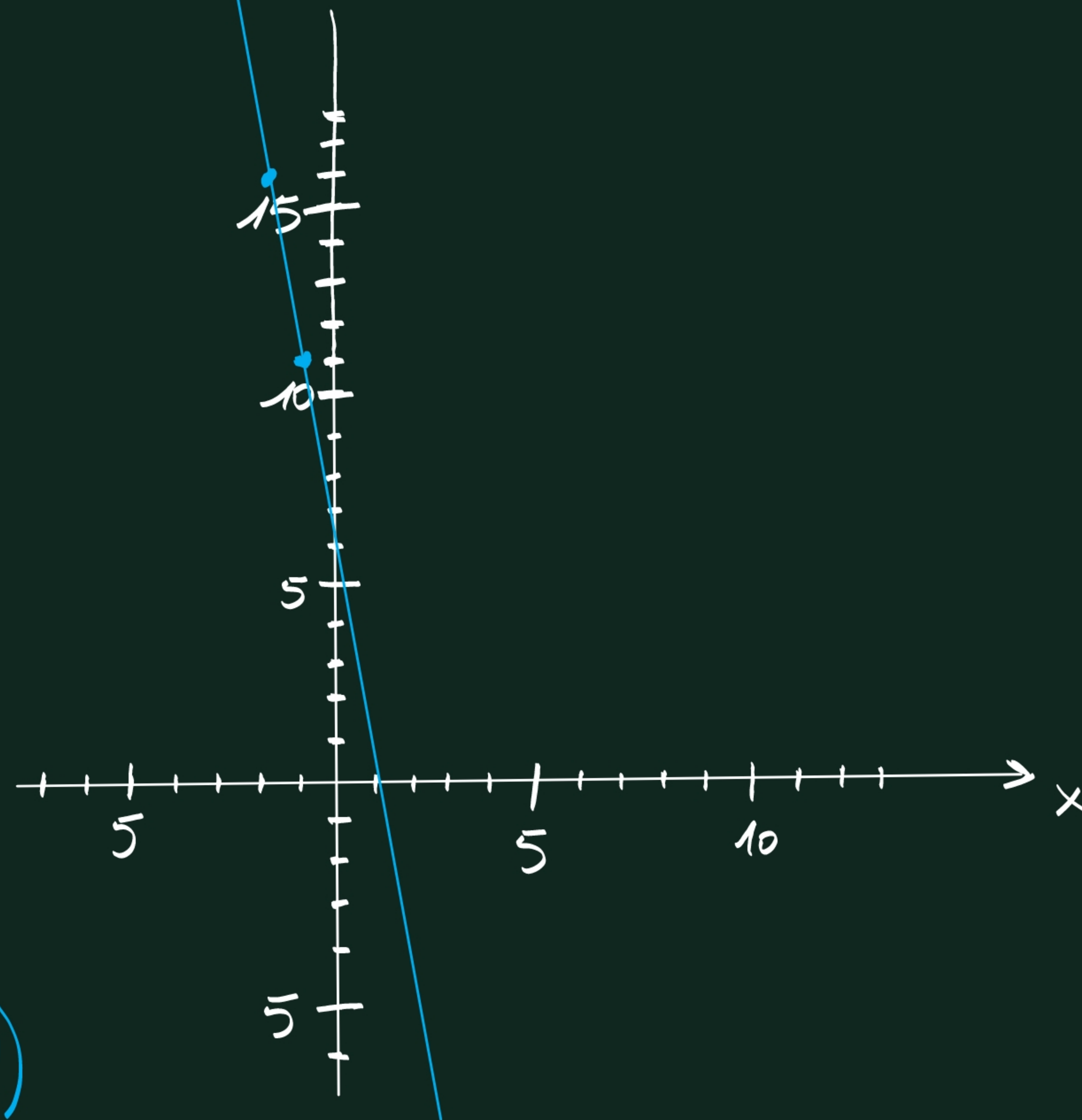
x	y
0	3
1	4



x	y
-1	12
-2	16

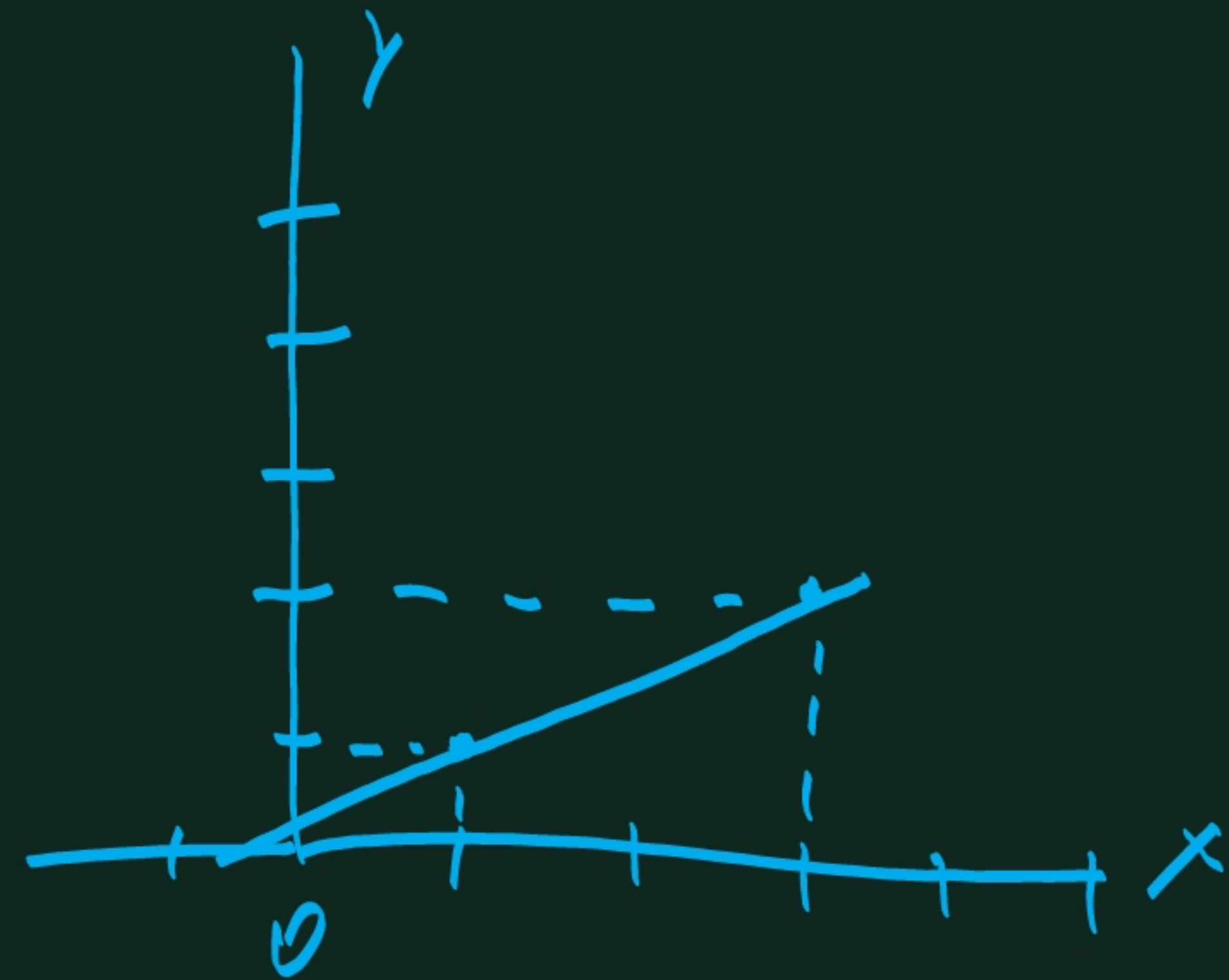
Punto. Corte Y: $(0, 8)$

Punto. Corte X: $(2, 0)$



$$d) y = \frac{x+1}{2}$$

x	y
1	1
3	2



Punto de corte con el eje $x \rightarrow (-1, 0)$

$$0 = \frac{x+1}{2} \rightarrow 2 \cdot 0 = x+1 \rightarrow -1 = x$$

Punto de corte con el eje $y \rightarrow (0, 0.5)$

$$y = \frac{0+1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}$$

Ecuaciones de la recta

• Ec. Explícita: $y = m \cdot x + n$

• Ec. Punto-Pendiente: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$
"x₀" e "y₀" son las coordenadas de un punto que pertenece a la recta.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Me permite calcular la ec. de la recta con:

- 1 punto y la pendiente.

- 2 puntos

• Ec. General: $ax + by + c = 0$

Se obtiene mandando todos los sumandos al mismo lado.

P. 237, Ej. 20, 21, 22

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

(20) a) Pendiente: 7

Pasa por: $(-1, -2)$

Punto-Pend.

$$y - (-2) = 7 \cdot (x - (-1))$$

$$y + 2 = 7x + 7$$

Expl. $y = 7x + 5$

b) $m = -2$
 $(0, -5)$

$$\left\{ \begin{array}{l} y + 5 = -2(x - 0) \\ \dots \end{array} \right.$$

$$y + 5 = -2x$$

$$y = -2x - 5$$

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

21 a) $(2, 3)$
 $(-1, 5)$

$$m = \frac{5-3}{-1-2} = -\frac{2}{3}$$

$$y-5 = -\frac{2}{3}(x+1)$$

$$y = -\frac{2}{3}(x+1) + 5$$

$$y = -\frac{2x}{3} - \frac{2}{3} + 5$$

$$y = -\frac{2x}{3} - \frac{2}{3} + \frac{15}{3}$$

$$y = -\frac{2x}{3} + \frac{13}{3}$$

$$b) \begin{matrix} (4, 0) \\ (2, -3) \end{matrix} \left\{ m = \frac{-3-0}{2-4} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \right.$$

$$y - 0 = \frac{3}{2}(x - 4)$$

$$\boxed{y = \frac{3x}{2} - 6}$$

$$c) \begin{matrix} (-2, -3) \\ (4, 6) \end{matrix} \left\{ m = \frac{6+3}{4+2} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \right.$$

$$y - 6 = \frac{3}{2}(x - 4)$$

$$y = \frac{3x}{2} - 6 + 6 \rightarrow \boxed{y = \frac{3x}{2}}$$

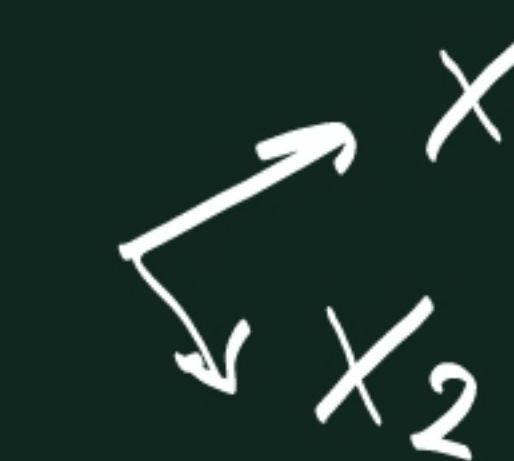
$$d) \begin{matrix} (-5, 3) \\ (2, 3) \end{matrix} \left\{ m = \frac{3-3}{2+5} = 0 \right.$$

$$y - 3 = 0 \cdot (x - 2) \rightarrow \boxed{y = 3}$$

Funciones Cuadráticas

Son funciones del tipo: $y = ax^2 + bx + c$
 a, b y c son números y $a \neq 0$.

Estas funciones tienen forma de parábola.

- Vértice en $x = -\frac{b}{2a}$, $y = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$
- Si $a > 0$, parábola positiva: 
- Si $a < 0$, " negativa: 
- Tienen un eje de simetría en: $x = -\frac{b}{2a}$
- Puntos Corte eje X: $ax^2 + bx + c = 0$ 
- Punto de Corte eje Y: $(0, c)$

Representación de parábolas

1º - Cálculo el Vértice.

$$y = -2x^2 + 4x + 5$$

$$V(x_v, y_v) = (V_x, V_y) = (1, 7)$$

$$V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot (-2)} = 1$$

$$V_y = -2 \cdot (1)^2 + 4(1) + 5 = 7$$

2º - Ptos de Corte

Corte eje X:

$$-2x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 + 40}}{-4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -0,87 \rightarrow (-0,87; 0) \\ x_2 = 2,87 \rightarrow (2,87; 0) \end{cases}$$

Corte eje Y:

$$x = 0$$

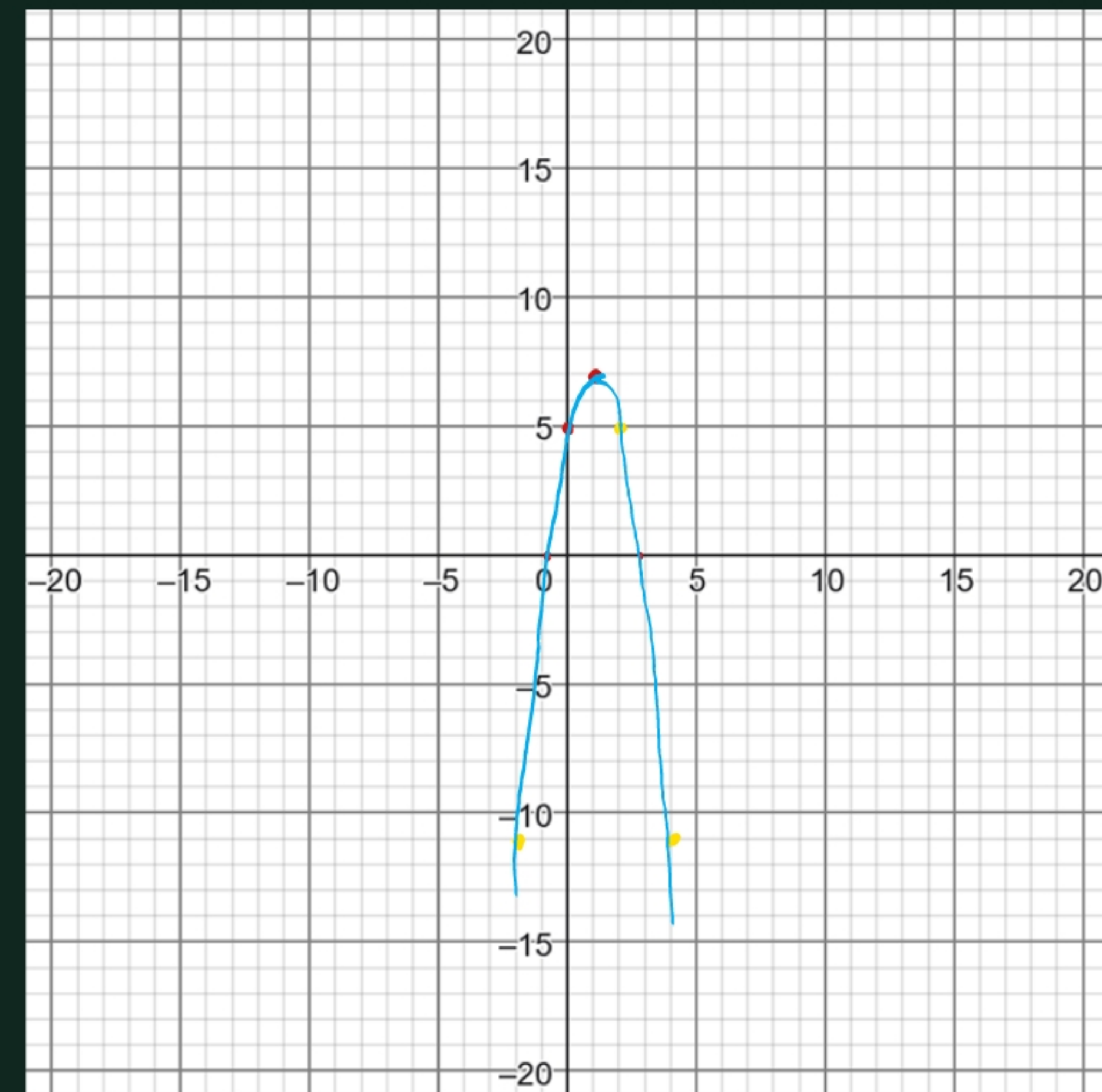
$$y = -2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 5 = 5 \rightarrow (0, 5)$$

3º - Tabla de valores:

	x	y
	-2	-11
-3	-0,87	0
	0	5
Vértice	1	7
	2	5
+3	2,87	0
	4	-11

$$x = 4$$

$$\begin{aligned} y &= -2 \cdot (4^2) + 4 \cdot 4 + 5 = \\ &= -32 + 16 + 5 = -11 \end{aligned}$$



P. 239, Ej 28, 29 P. 240, Ej 30

(28) a) $y = 0x^2 - 1$ $\cup$ mínimo

b) $y = 3 + 5x - 2x^2$ $\cap$ máximo

c) $y = 4 + 3x^2$ $\cup$ mín.

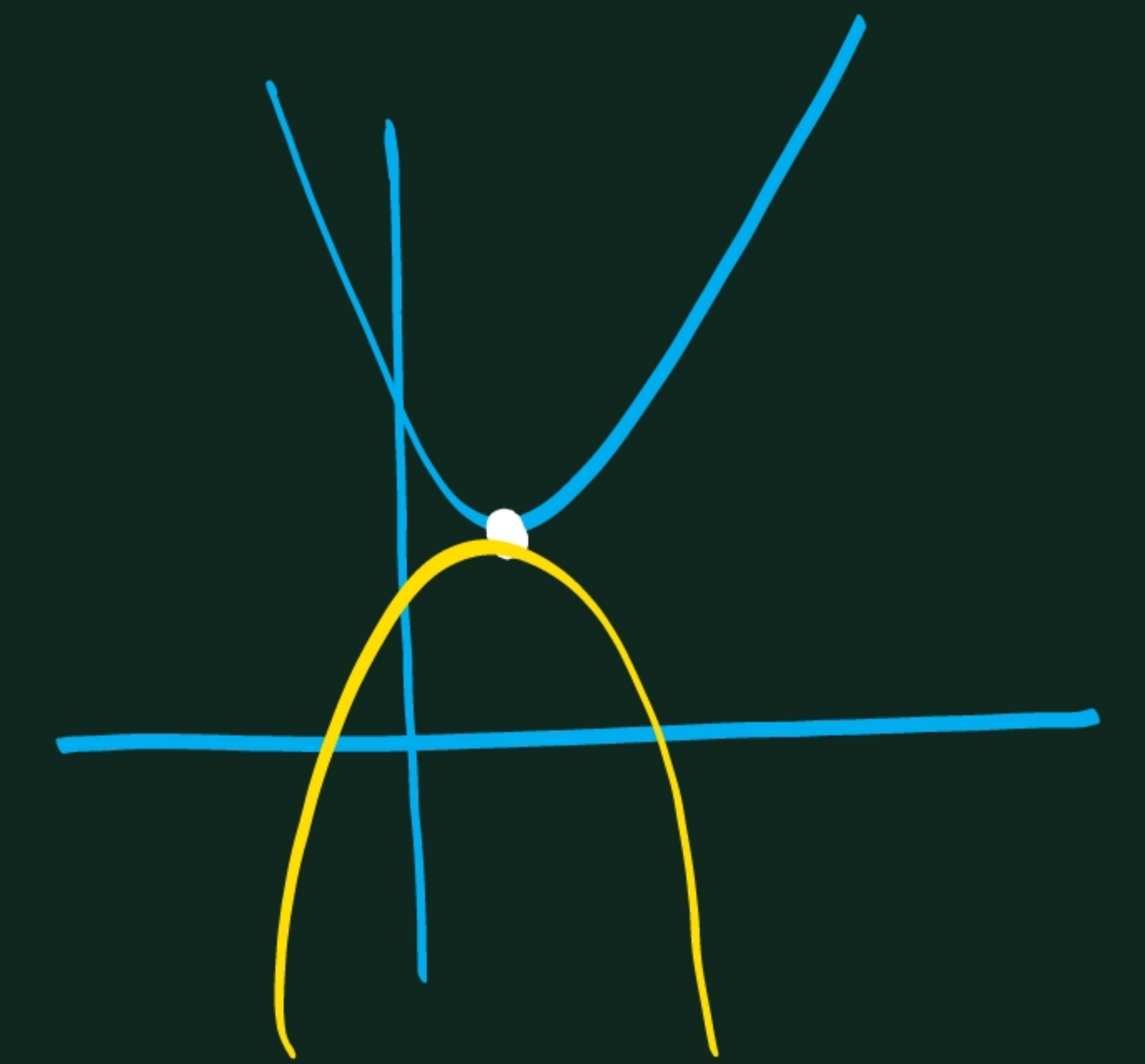
d) $y = -x^2 + 2x - 5$ $\cap$ máx

(29) • $V = (1, 4)$ y $a > 0$

1 pto. corte con el eje Y

• $V = (1, 4)$ y $a < 0$

3 ptos de corte



30 a) $y = -x^2 + 2x + 3$
 $-16 + 8 + 3$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2 \cdot (-1)} = 1 \text{ e}$$

$$y = -(1)^2 + 2 + 3 = 4$$

Pto de corte eje x

$$0 = -x^2 + 2x + 3$$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{-2 \pm 4}{-2}$$

$-1 \rightarrow (-1, 0)$
 $3 \rightarrow (3, 0)$

$$V = (1, 4)$$

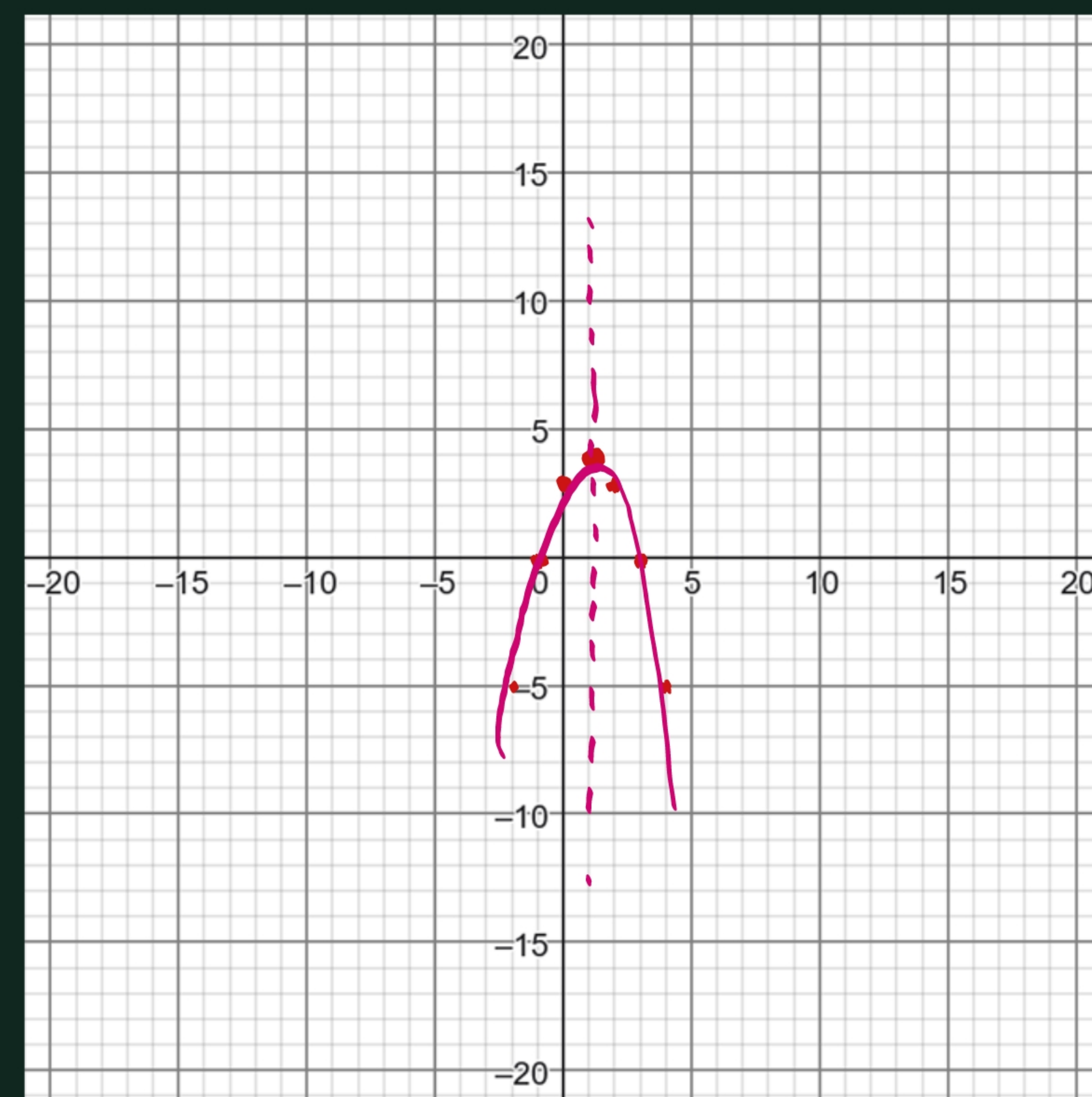
Pto corte eje y

$$y = 0 + 2 \cdot 0 + 3$$

$$y = 3 \rightarrow (0, 3)$$

x	y
-2	-5
-1	0
0	3
1	4
2	3
3	0
4	-5

Vért.



$$b) y = 2x^2 + 4x$$

$$X_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot 2} = -1$$

$$y = 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) = 2 - 4 = -2$$

$$V = (-1, -2)$$

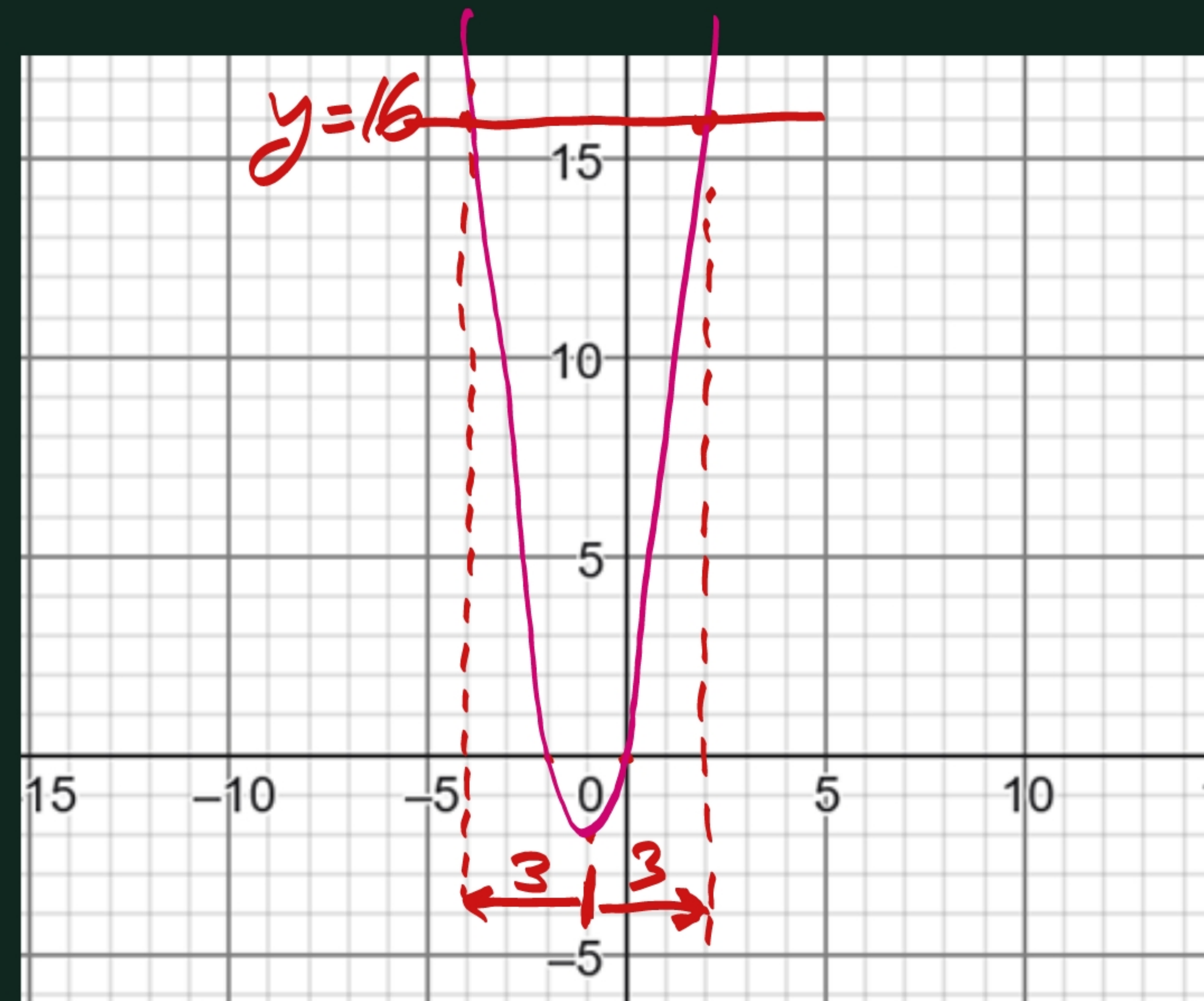
$$\text{Pto corte eje } x: 2x^2 + 4x = 0$$

$$2x(x+2) = 0$$

$$2x = 0 \rightarrow x = 0 \quad (0, 0)$$

$$x+2 = 0 \rightarrow x = -2 \quad (-2, 0)$$

$$\text{Pto corte eje } y: (0, 0)$$



x	y
-4	16
-2	0
-1	-2
0	0
2	16

$y = 2 \cdot (2)^2 + 4 \cdot 2$

$$c) y = x^2 - 6x + 5$$

$$V = (3, -4)$$

$$V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$$

$$V_y = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$$

$$x = 7$$

$$7^2 - 6 \cdot 7 + 5 = 4$$

$$49 - 42 + 5 = 4$$

$$y = 12$$

$$\text{Ptos corte eje } x: (5, 0); (1, 0)$$

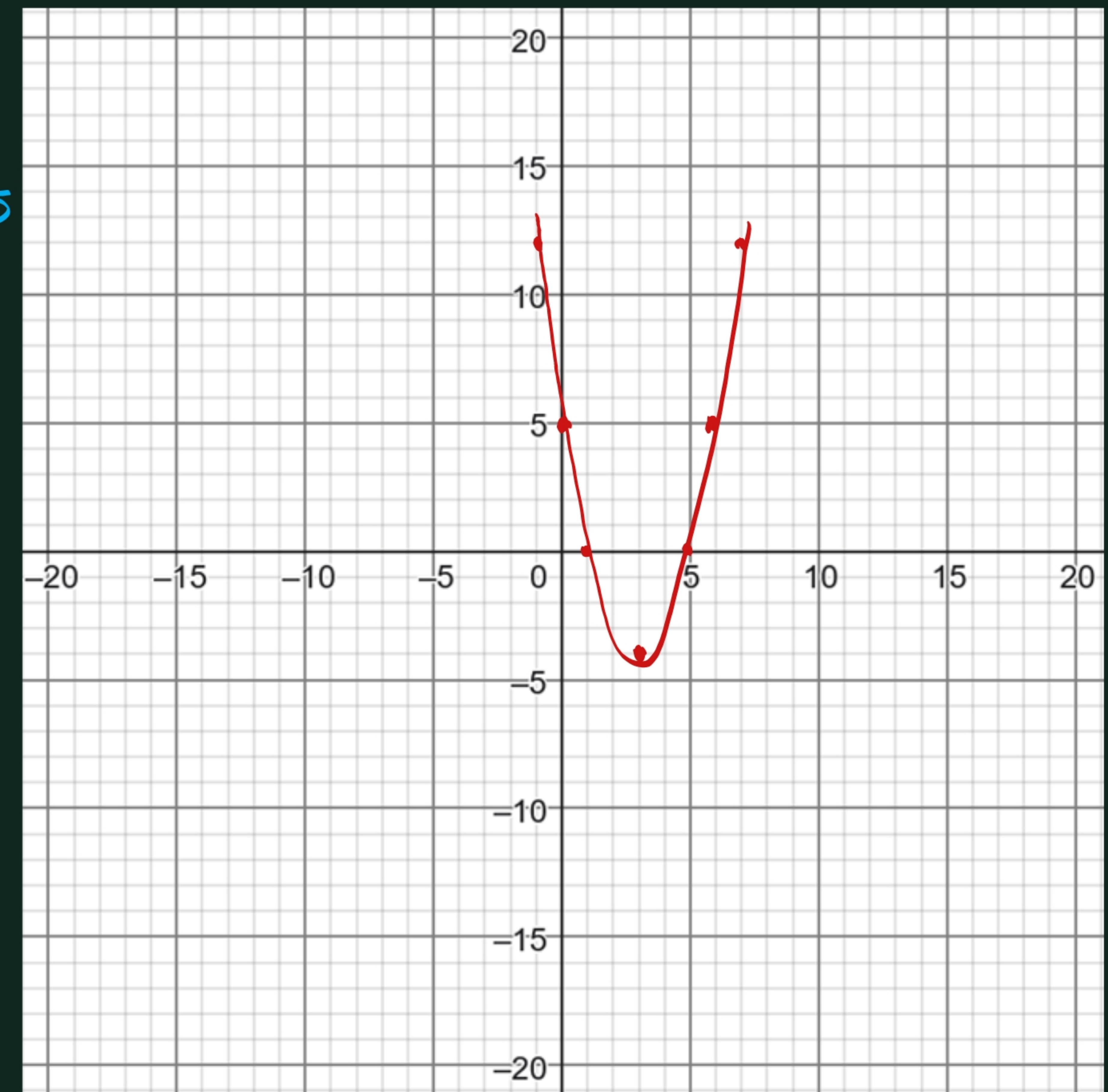
$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} \frac{6+4}{2} = 5 \\ \frac{6-4}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Ptos corte eje } y: (0, 5)$$

$$y = 0 - 0 + 5 = 5$$



$$d) y = -x^2 + 4x - 3$$

$$V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$y = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 =$$

$$= 1$$

$$V = (2, 1)$$

Ptas de corte eje x: (1,0); (3,0)

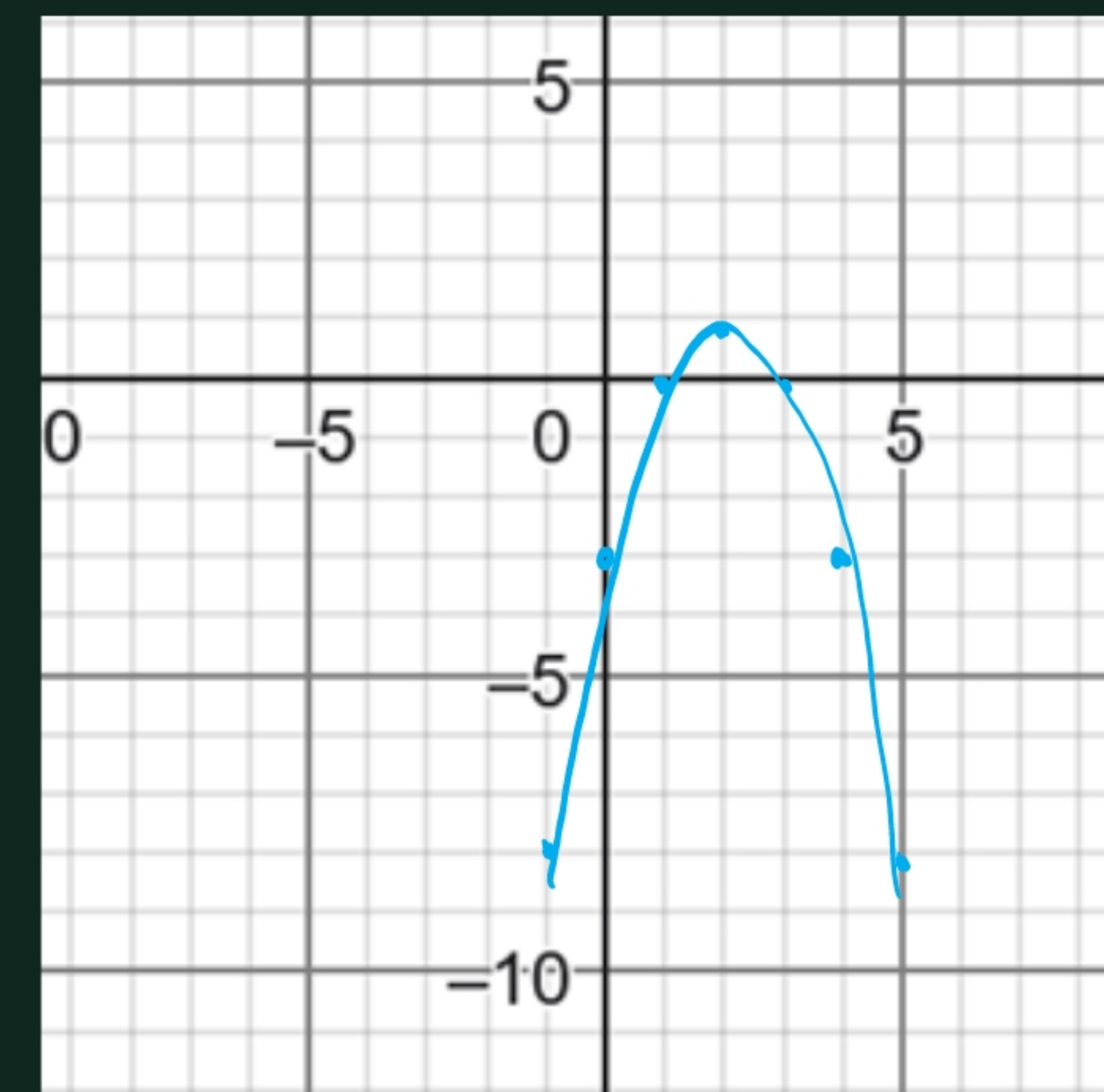
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)} =$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-2} = \begin{cases} \frac{-4+2}{-2} = 1 \\ \frac{-4-2}{-2} = 3 \end{cases}$$

Ptas. corte eje y: (0,-3)

$$y = 0 + 0 - 3 \rightarrow y = -3$$

x	y
-1	-8
0	-3
1	0
2	1
3	0
4	-3
5	-8



$$y = -x^2 + 4x - 3$$

$$y = -5^2 + 4 \cdot 5 - 3 = -25 + 17 =$$

$$= -8$$

(37)

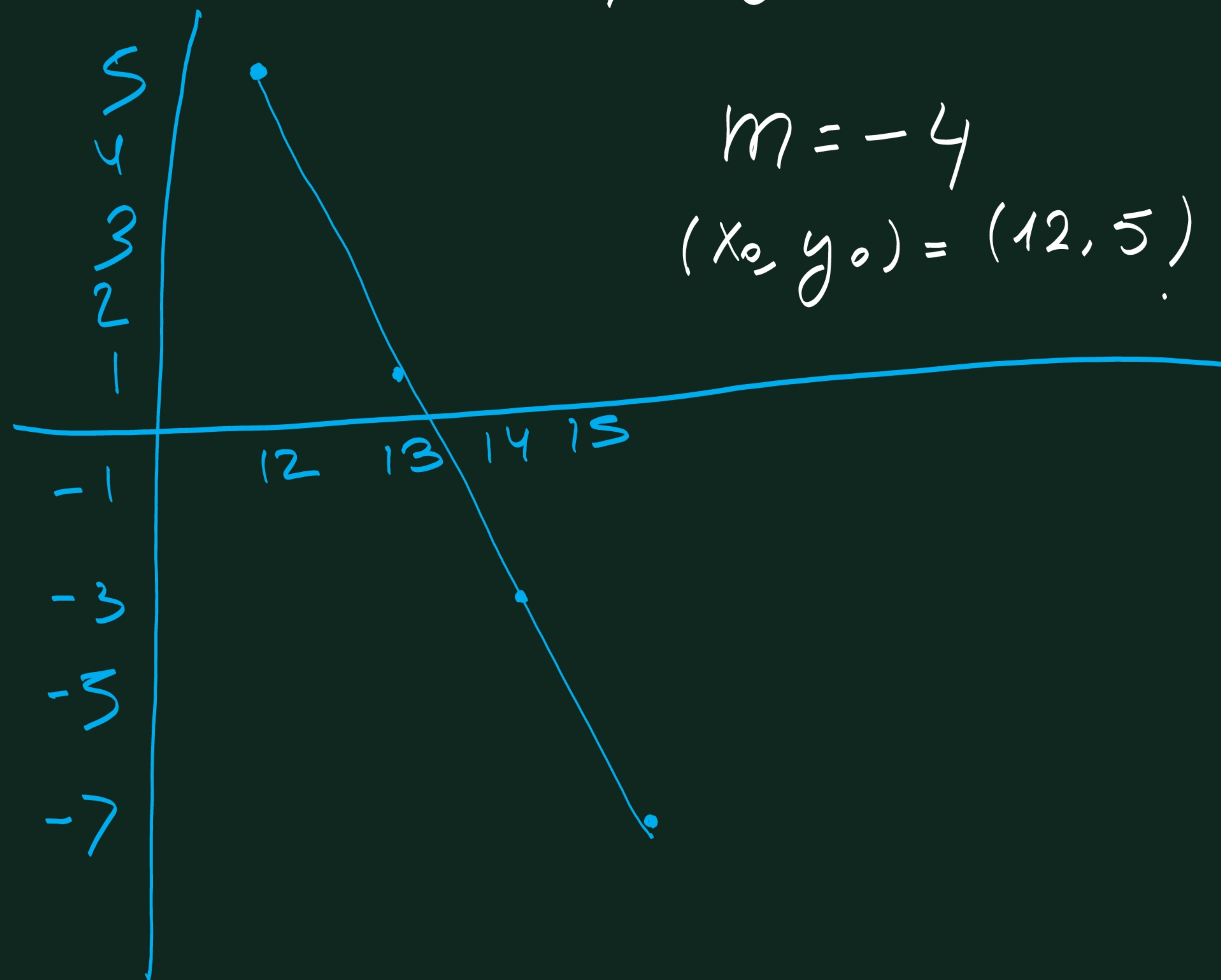
$$f(x) = 5 - 4(x - 12)$$

hora(x)	grados(y)
12	5
13	1
14	-3
15	-7

$$\rightarrow y = mx + n // y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

$$m = -4$$

$$(x_0, y_0) = (12, 5)$$



(38) $h_0 = 0 \text{ m}$

$$T_0 = 100^\circ\text{C} = n$$

$$m = -0,001$$

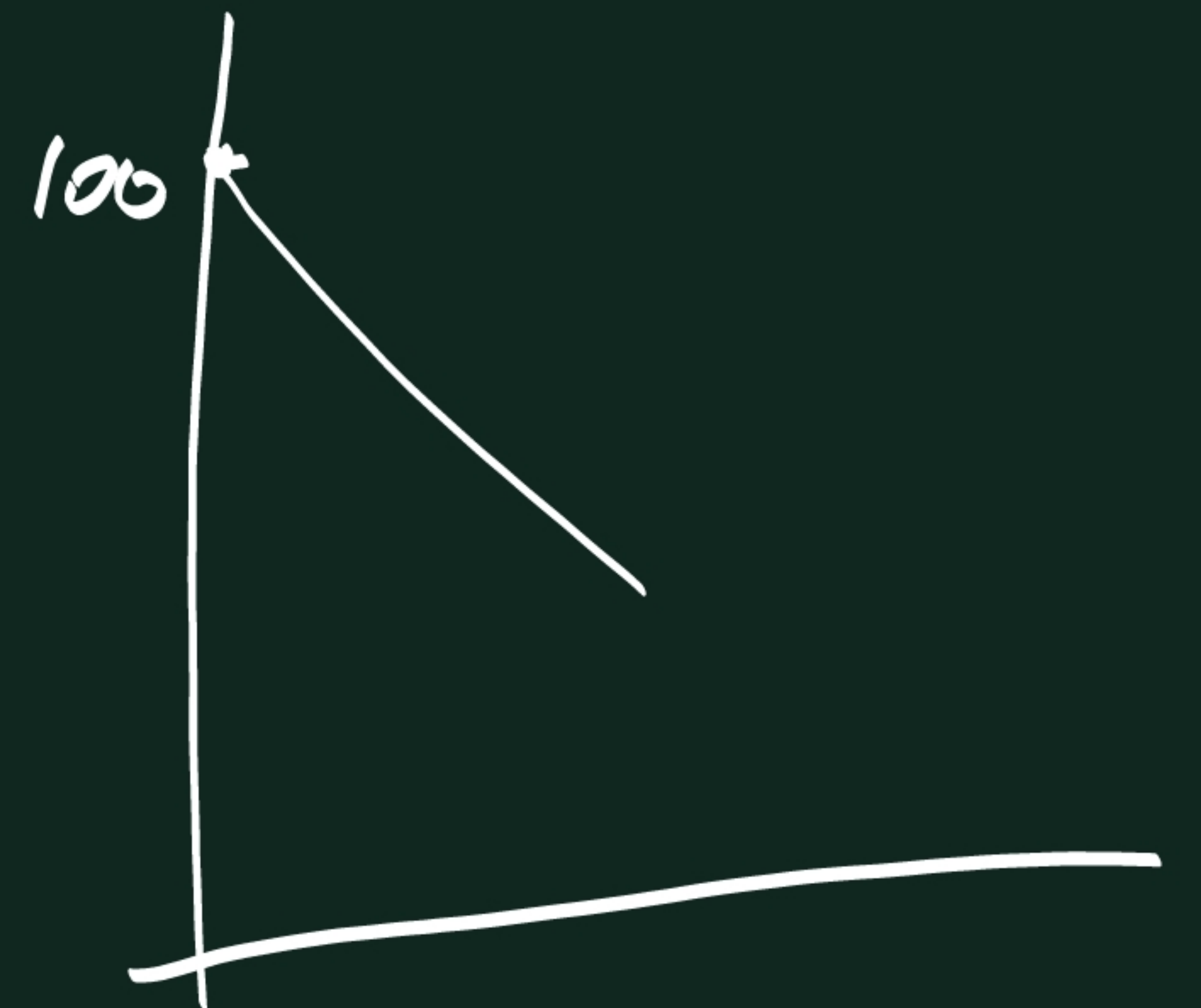
$\therefore 100$
- $0,1^\circ\text{C}$ por cada 100 m
- $0,001^\circ\text{C}$ por cada metro.

a) $h_1 = 3404 \text{ m} \rightarrow 3404 \cdot (-0,001) = -3,404^\circ\text{C}$

$$h_2 = 8848 \text{ m} \rightarrow 8848 \cdot (-0,001) = -8,848^\circ\text{C}$$

En la cima del Aneto (a temp.
de ebullición es $96,6^\circ\text{C}$ y en
el Everest de $91,2^\circ\text{C}$

b) $y = -0,001x + 100$

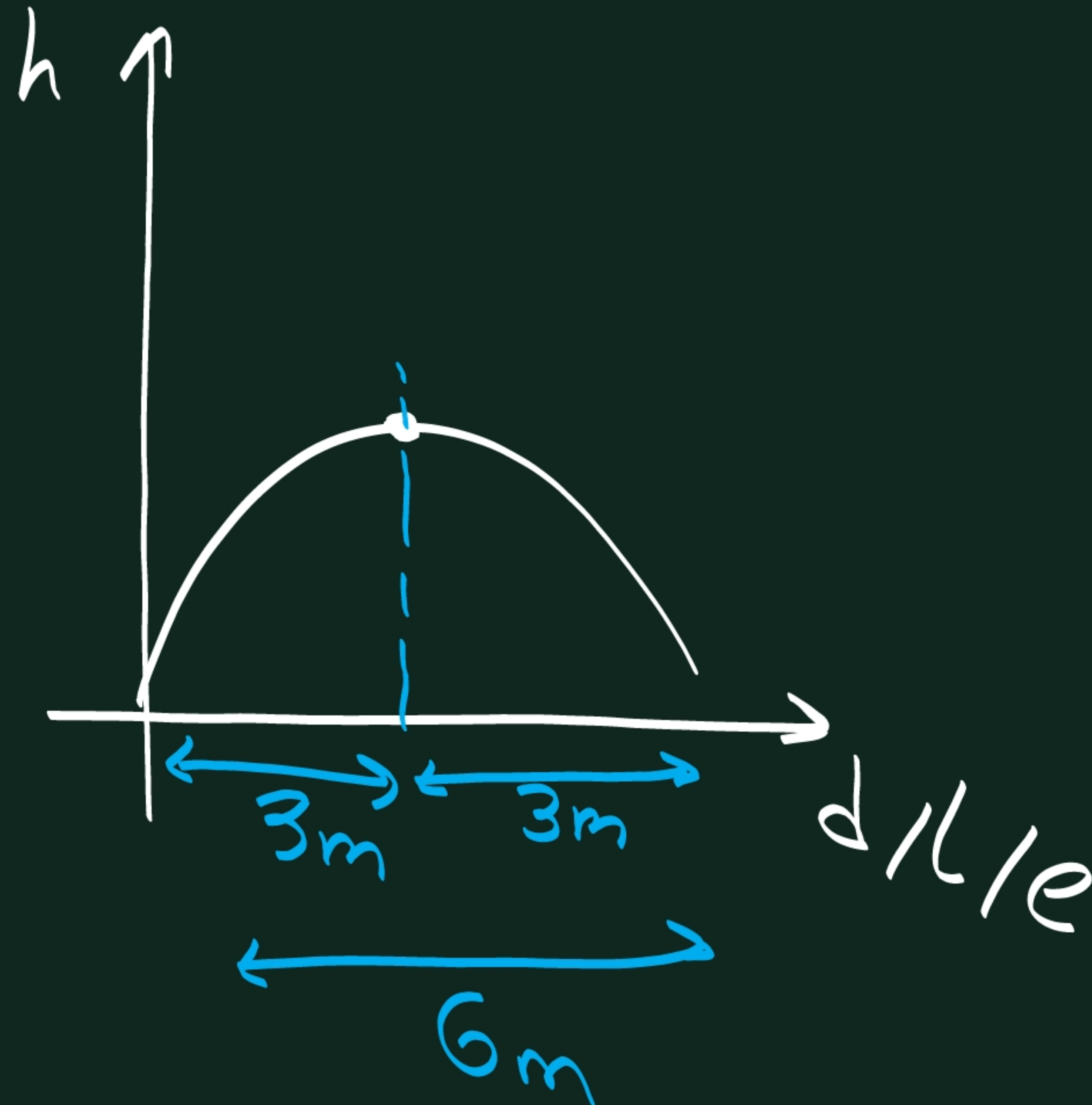


(41) Andrea: $y = -\frac{1}{5}x^2 + 2x \rightarrow V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2 \cdot \frac{1}{5}} = 5 \rightarrow V_y = -\frac{1}{5} \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 = 5$

Cristian: $y = -x^2 + 6x \rightarrow V_x = \frac{-6}{-2} = 3 \rightarrow V_y = -3^2 + 6 \cdot 3 = -9 + 18 = 9$

¿Más lejos?

¿Más alto?



Andrea: Pto corte eje x

$$0 = -\frac{1}{5}x^2 + 2x$$

$$0 = x \cdot \left(-\frac{1}{5}x + 2\right) \begin{matrix} \nearrow x=0 \\ \searrow -\frac{1}{5}x + 2 = 0 \\ \quad +\frac{1}{5}x = +2 \\ \quad x = 10 \end{matrix}$$

P. 244, Ej 50 y 53

50 a) $m = 3$

$$P = (1, -2)$$

$x_0 \quad y_0$

$$y = mx + n$$

$$-2 = 3 \cdot 1 + n$$

$$-n = 3 + 2$$

$$-n = 5$$

$$n = -5$$

$$y = 3x - 5$$

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

$$y - (-2) = 3 \cdot (x - 1)$$

$$y + 2 = 3x - 3$$

$$y = 3x - 5$$

53

$$\Gamma \rightarrow y = mx + n \quad y = m \cdot 2 + 3 \quad \frac{y - 3}{2} = m \quad \frac{1 - 3}{2} = m$$

$$S \rightarrow y = mx + n \quad y = m \cdot 2 - 2 \quad \frac{y + 2}{2} = m \quad 3 = m$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 4}{1 - 2} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$P_1 = (2, 4)$$

$$P_2 = (1, 1)$$

P. 246, Ej 83 (a, b, c) // P. 247, Ej 86

(83) a) $y = (x+1)^2 + 2$ $V = (V_x, V_y) = (-1, 2)$

$$y = x^2 + 2x + 1 + 2$$

$$y = x^2 + 2x + 3$$

$$V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1 \rightarrow V_y = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$$

Ptos. Corte Eje X: ($y=0$) Pto. Corte Eje Y: ($x=0$)

$$0 = x^2 + 2x + 3$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \nexists$$

$$y = 0 + 0 + 3 \rightarrow y = 3 \rightarrow (0, 3)$$

x	y
-4	11
-3	6
-2	3
-1	2
0	3
1	6
2	11

-2

+2

Vert.

