

# DERIVADA DUNHA FUNCIÓN E AS SÚAS APLICACIÓNS

## 1. Derivada dunha función nun punto

En moitas ocasións realizamos cálculos de valores medios. Por exemplo, a velocidade media foi de 110km/h, o consumo medio de auga foi de 50l/día... Os cálculos dos valores medios son importantes, pero moitas veces é máis importante o valor instantáneo, por exemplo a velocidade que leva un coche nun determinado instante durante unha competición. Para resolver este problema é necesario o concepto de variación instantánea dunha magnitude en función doutra, que é o concepto de derivada

### 1.1 Taxa de variación media dunha función

A taxa de variación media dunha función  $f(x)$  nun intervalo  $[a, b]$  é o cociente entre a variación da función  $f(x)$  e a variación da variable independente  $x$ , no intervalo. Representábase por  $TVM[a, b]$  e calcúlase como:

$$TVM[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Este valor coincide coa inclinación, pendente, da recta secante a función que pasa polos puntos  $P(a, f(a))$  e  $Q(b, f(b))$ , como podemos observar na seguinte imaxe, recordade que en unidades anteriores traballouse o concepto de pendente dunha recta e calculábase como:  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(y_1) - f(y_0)}{y_1 - y_0}$

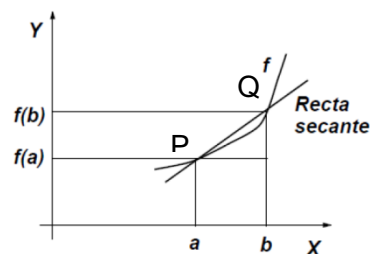


Ilustración 1: Taxa de variación media

### Exemplo

Calcula a taxa de variación media de  $f(x) = \frac{x^2}{4} - 1$  no intervalo  $[2,6]$ :

$$TVM[4,6] = \frac{f(6) - f(4)}{6 - 4} = \frac{8 - 0}{6 - 2} = \frac{8}{4} = 2$$

Podemos ver que a interpretación xeométrica da taxa de variación media coincide coa pendente do segmento que une os puntos  $A(2,0)$  e  $B(6,8)$  de unidades anteriores para calcular a pendente tiñamos que  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8}{4} = 2$ .

O valor da pendente igual a TVM.

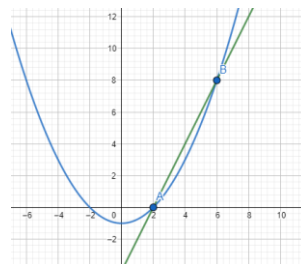


Ilustración 2: Exemplo de Taxa de variación media

## 1.2 Derivada dunha función nun punto

Definimos a derivada dunha función  $y = f(x)$  en  $x = a$  como o límite das taxas de variación media no intervalo  $[a, a + h]$  cando  $h$  tende a cero e represéntase como:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$f'(a)$  lese como  $f$  prima de  $a$ , ou a derivada de  $f$  en  $a$ , se existe este límite e é finito dicimos que a función  $f(x)$  é derivable en  $x = a$ . Calcular a derivada dunha función nun punto supón entón o cálculo dun límite. Se este límite existe, dise que a función é derivable nese punto.

### Exemplo

Calcula a derivada da función  $f(x) = x^2 - 6x + 11$  no punto  $x=4$ , é dicir  $f'(4)$ .

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^2 - 6(4+h) + 11 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{16 + h^2 + 8h - 24 - 6h + 8}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \frac{0}{0} \text{ IND simplifícamos a expresión } \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2) = 2$$

Entón  $f'(4) = 2$

Tendo en conta que a derivada nun punto é o límite da TVM chámase tamén, taxa de variación instantánea.

## 1.3 Derivadas laterais

Definimos as derivadas laterais de  $f$  en  $x = a$  como os seguintes límites:

- Derivada á esquerda:  $f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- Derivada á dereita:  $f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Deducimos que para que a función sexa derivable as derivadas laterais deberán ser iguais.

## 1.4 Interpretación xeométrica da derivada. Recta tanxente e normal

Xeometricamente a derivada dunha función nun punto é a pendente da recta tanxente a gráfica nese punto. Se nos fixamos na gráfica do debuxo seguinte, podemos ver que a taxa de variación da función  $f(x)$  no intervalo  $[a, a + h]$  é a pendente da recta secante a curva que pasa polos puntos  $P$  e  $Q$ .

Cando  $h$  tende a cero, tense:

- O punto  $Q$  deslízase sobre a curva acercándose ao punto  $P$ , e as rectas secantes que se van debuxando tende a recta tanxente a curva no punto  $P$ , con abscisa  $x=a$ .

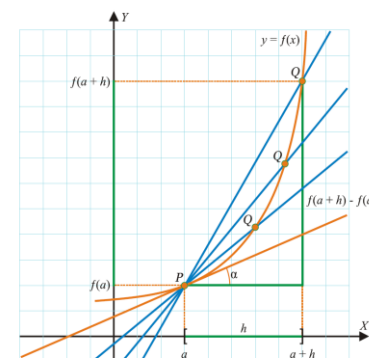


Ilustración 3: Interpretación da derivada

b) As TVM tenden, por definición, a derivada da función no punto, é dicir, a  $f'(a)$ .

Polo tanto, a pendente da recta tanxente da función  $f(x)$  no punto de abscisa  $x=a$  é a derivada da función nese punto, é dicir,  $f'(a)$ . A vista da imaxe, tamén se pode concluír que se a derivada é positiva e a gráfica crece e se a derivada é negativa a gráfica é decrecente.

### Recta tanxente e normal

Unha das formas de calcular a ecuación dunha recta é utilizar a ecuación punto pendente:

$y - y_0 = m(x - x_0)$ , onde  $m$  é a pendente e  $(x_0, y_0)$  un punto da recta. Polo visto na interpretación gráfica a derivada coincide coa pendente, entón a ecuación dunha recta tanxente a unha función  $f(x)$  no punto  $x=a$ , transfórmase na seguinte expresión:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Polo visto en cursos inferiores a recta normal a  $f$  en  $x = a$  é unha recta perpendicular a recta tanxente en dito punto. Dado que as rectas son perpendiculares, a pendente da normal,  $m'$ , verifica que  $m' = \frac{-1}{m}$  tendo en conta que  $m = f'(a)$  a ecuación da recta normal de  $f$  en  $x = a$  será:

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a)$$

#### **Exemplo**

Calcula as rectas tanxente e normal a gráfica da función  $f(x) = x^2 - 6x + 11$  no punto  $x=4$

- Calculamos o punto P, neste caso  $(4, f(4)) \Rightarrow (4, 3)$
- A derivada da función no punto  $x=4$ , o calculamos no exercicio anterior  $\Rightarrow f'(4) = 2$
- Ecuación da recta tanxente:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \Rightarrow y - 3 = 2(x - 4) \Rightarrow y = 2x - 5$$

- Ecuación da recta normal:

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x - a) \Rightarrow y - 3 = \frac{-1}{2}(x - 4) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 5$$

## 2. Función derivada

No apartado anterior calculamos a derivada dunha función nun punto, no obstante, o procedemento para calcular a derivada é un tanto tedioso, polo tanto é lóxico que tratemos de atopar unha fórmula ou función que nos proporcione a derivada dunha función nun punto calquera, xorde entón o concepto de función derivada.

A función derivada dunha función  $f(x)$  é a que asocia a cada valor da variable  $x$  o valor da derivada nese punto e calcúlase como:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Representátese por  $f'(x)$ ,  $y'$ ,  $\frac{df}{dx}$ .

Xa que a derivada dunha función ven definida por un límite para que exista deberán de existir os límites laterais e coincidir, polo tanto a función deberá ser continua, isto é, unha condición necesaria pero non suficiente, o que quere dicir, é que unha función deberá ser continua para que sexa derivable, pero poderá ser continua e non derivable. O que se pode escribir como:

Se  $f$  é derivable en  $x = a$ , entón  $f$  é continua en  $x = a$

### Exemplo

Calcula a derivada da función  $f(x) = x^2 - 3$  nos puntos  $x=-2$  e  $x=1$ .

$$\text{Calculamos a función derivada } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 3 - (x^2 - 3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} = \frac{0}{0} \text{ IND}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h + 2x) = 2x$$

Polo tanto a función derivada é:  $f'(x) = 2x$ , con dita expresión podemos calcular a derivada en calquera punto sen máis que substituír e non ter que facer de novo o límite.

$$\text{No punto } x=-2 \Rightarrow f'(-2) = 2(-2) = -4$$

$$\text{No punto } x=1 \Rightarrow f'(1) = 2(1) = 2$$

## 2.1 Táboa da derivada das funcións máis usuais

Do mesmo xeito que no exemplo anterior, podemos obter a derivada de todas as funcións elementais. Sen embargo, sería moi laborioso utilizar a definición cada vez que temos que calcular unha derivada. Por elo, elaborouse unha táboa coas derivadas das funcións máis usuais, que se debe de memorizar, para obter a derivada de calquera función sen ter que recorrer continuamente á definición.

Funcións	Derivadas	Exemplo	Exemplo
<b>Polinómicas</b>			
$y = k$	$y' = 0$	$y = 7$	$y = 0$
$y = x$	$y' = 1$	$y = x$	$y' = 1$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	$y = x^5$	$y' = 5x^4$
<b>Exponenciais</b>			
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$	$y = 3^x$	$y' = 3^x \ln 3$
<b>Logarítmicas</b>			
$y = \ln x$	$y' = 1/x$	$y = \ln x$	$y' = 1/x$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$y = \log_8 x$	$y' = \frac{1}{x \ln 8}$

### Trigonométricas

$y = \operatorname{sen}x$	$y' = \operatorname{cos}x$	$y = \operatorname{sen}x$	$y' = \operatorname{cos}x$
$y = \operatorname{cos}x$	$y' = -\operatorname{sen}x$	$y = \operatorname{cos}x$	$y' = -\operatorname{sen}x$
$y = \operatorname{tan}x$	$y' = \frac{1}{\operatorname{cos}^2x}$	$y = \operatorname{tan}x$	$y' = \frac{1}{\operatorname{cos}^2x}$

## 2.2 Regras de derivación

Xa coñecemos as derivadas das funcións elementais. Agora estudemos algunhas regras de derivación que nos permitan calcular a derivada das funcións que derivaban das da táboa anterior.

- Derivada da suma ou resta de funcións: é a suma ou a resta das derivadas de ditas funcións:

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

- Derivada do produto dun número por unha función: é o produto do número pola derivada da función:

$$[kf(x)] = kf'(x)$$

- Derivada do produto de funcións: é a derivada da primeira función pola segunda sen derivar máis a primeira sen derivar pola derivada da segunda función:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- Derivada dun cociente de funcións: é outro cociente tal que no numerador é a derivada do numerador polo denominador sen derivar menos o numerador sen derivar pola derivada do denominador. E no denominador o cadrado do denominador sen derivar.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

### Exemplos

Calcula a derivada das seguintes funcións:

$$a) f(x) = -3 \quad b) f(x) = x^3 \quad c) f(x) = \frac{1}{x} \quad d) f(x) = \sqrt{x^3} \quad e) f(x) = 6^x$$

$$f) f(x) = x^2 + \operatorname{sen}x \quad g) f(x) = 3x^4 \quad h) f(x) = x \operatorname{cos}x \quad i) f(x) = \frac{e^x}{x^2}$$

$$a) f(x) = -3 \Rightarrow f'(x) = 0; \text{ derivada dunha constante}$$

$$b) f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2; \text{ derivada dunha potencia}$$

$$c) f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -1x^{-2} = \frac{-1}{x^2}; \text{ derivada dunha potencia}$$

$$d) f(x) = \sqrt{x^3} = x^{3/2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}; \text{ derivada dunha potencia}$$

e)  $f(x) = 6^x \Rightarrow f'(x) = 6^x \ln 6$ ; derivada dunha exponencial

f)  $f(x) = x^2 + \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = 2x + \operatorname{cos} x$ ; derivada dunha suma

g)  $f(x) = 3x^4 \Rightarrow f'(x) = 12x^3$ ; derivada dunha constante por unha función

h)  $f(x) = x \operatorname{cos} x \Rightarrow f'(x) = \operatorname{cos} x + x(-\operatorname{sen} x) = \operatorname{cos} x - x \operatorname{sen} x$ ; derivada dun produto

i)  $f(x) = \frac{e^x}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{e^x x^2 - e^x 2x}{x^4} = \frac{x e^x (x-2)}{x^4} = \frac{e^x (x-2)}{x^3}$ ; derivada dun cociente.

### 2.3 Derivada da función composta: Regra da cadea

A regra da cadea é sen dúbida a regra máis importante das derivadas. A regra da cadea permite calcular a derivada da función composta, é dicir, a derivada dunha función que a súa vez é unha función doutra función, isto é para derivar unha función da forma  $y = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$

$$[(f \circ g)(x)]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

#### **Exemplo**

Calcula a derivada de  $f(x) = \operatorname{sen} x^3$

Aplicaremos a regra da cadea  $\Rightarrow f'(x) = \operatorname{cos} x^3 \cdot 3x^2 = 3x^2 \operatorname{cos} x^3$

### 2.4 Derivadas sucesivas

As derivadas sucesivas dunha función  $f(x)$  represéntase por:

$$f'(x), f''(x), f'''(x), f^{IV}(x) \dots$$

#### **Exemplo**

Calcula as derivadas sucesivas de  $f(x) = 3x^4$

$$f'(x) = 12x^3 \quad f''(x) = 36x^2 \quad f'''(x) = 72x \quad f^{IV}(x) = 72 \quad f^V(x) = 0, f^{VI}(x) = 0 \dots$$

## 3. Aplicacións das derivadas

A derivada dunha función nun punto é a variación instantánea desa función, a pendente da recta tanxente a curva nese punto. Isto permite estudar o crecemento e decrecemento dunha función o que nos vai facilitar o trazo da súa gráfica.

Hai que ter presente que as funcións precisan ser derivables nos puntos de estudo. Pero en que puntos unha función é derivable? O que se dixo na unidade de continuidade e límites en relación coa continuidade segue sendo certo. As funcións usuais: polinómicas, racionais, con radicais, exponenciais, logarítmicas son continuas e derivables en todos os puntos do seu dominio. As funcións definidas a anacos serán derivables se cada función o é no seu intervalo de definición e nos puntos de cambio de definición precisamos estudar as derivadas laterais estas deberán coincidir para que exista a derivada.

### Conclusión:

Para que unha función sexa derivable nun punto  $x=a$  son precisa dúas condicións:

- Que a función sexa continua en dito punto.
- Que as derivadas laterais existan e sexan continuas.

Respecto a continuidade e derivabilidade temos que ter presente:

- Si unha función é derivable en  $x=a \Rightarrow f(x)$  é continua en  $x = a$
- Si unha función é continua en  $x=a \not\Rightarrow f(x)$  é derivable en  $x = a$

### 3.1 Crecemento e decrecemento dunha función

Como xa vimos na interpretación xeométrica da derivada, o seu valor está relacionado coa pendente da recta tanxente, e podemos concluír que se a pendente é positiva, a derivada é positiva e a función é crecente. Se a pendente é negativa, a derivada é negativa e a función é decrecente.

Chamamos puntos singulares dunha función aos puntos de tanxente horizontal, é dicir, aos puntos nos que a derivada é cero, neste puntos a función nin crece nin decrece. Entre eles estudaremos este curso os máximos e os mínimos.

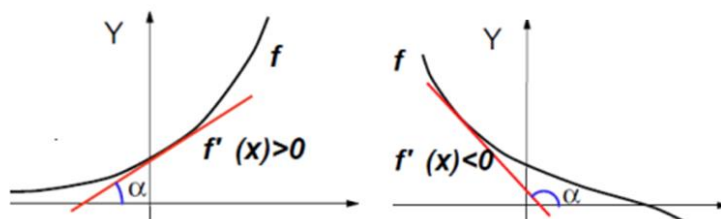


Ilustración 4: Comportamento da derivada dunha función

Entón, estudar o crecemento e decrecemento dunha función mediante a súa derivada consiste en estudar o seu signo. Vexamos como se calcularán os intervalos de crecemento e decrecemento coa axuda da derivada, o procedemento será o seguinte:

- Resolvemos a ecuación  $f'(x) = 0$ . As súas solucións son os posibles máximos e mínimos relativos da función.
- Realizamos un esquema para estudar o signo da derivada nos intervalos que definen os puntos calculados anteriormente.
- En cada intervalo estudamos o signo da derivada que determinará a monotonía da función, isto é o crecemento ou decrecemento se:

*Se  $f'(x) > 0$  a función é crecente*

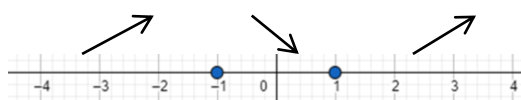
*Se  $f'(x) < 0$  a función é decrecente*

- Nos puntos onde cambie a monotónia teremos un extremo máximo ou mínimo segundo pase de crecente a decrecente ou ben de decrecente a crecente, respectivamente.

### Exemplo

Calcula os puntos singulares de  $f(x) = x^3 - 3x$ . Monotonía e extremos da función.

- Resolvemos  $f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$  Este puntos son os puntos singulares, os posibles máximos ou mínimos.
- Estudamos os signo dos intervalos nos que queda dividida a recta real:



Intervalos	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
Signo de $f'$	$f'(-2) > 0$	$f'(0) < 0$	$f'(2) > 0$
Monotonía	f crecente	f decrecente	f crecente

- No punto de abscisa  $x = -1$  temos un máximo, as coordenadas son  $(-1, 2)$   
No punto de abscisa  $x = 1$  temos un mínimo, as coordenadas son  $(1, -2)$

### 3.2 Representación gráfica das funcións coa axuda da derivada.

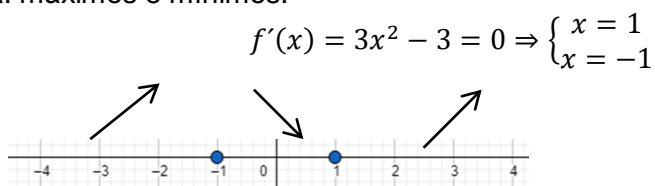
Coa axuda das derivadas a representación das funcións vólvese máis sinxela, neste curso veremos soamente a representación das funcións polinómicas e deixaremos as funcións racionais para cursos superiores. Vexamos os pasos a seguir para a representación dunha función e logo vexamos un exemplo onde faremos uso de moitos dos contidos aprendidos. O proceso para o cálculo deste pasos traballáronse nas unidades anteriores relacionadas coas funcións.

- Domino de definición
- Simetrías: pode ser par, impar ou non simétrica.
- Cortes cos eixes: cortes co eixo OX e corte co eixo OY.
- Asíntotas: asíntotas verticais, horizontais e oblicuas.
- Monotonía da función: crecemento e decrecemento da función. Calcularemos neste apartado os posibles extremos da función: máximos e mínimos.
- Representación gráfica: recolleremos nunha gráfica toda a información obtida antes, se é preciso poderase completar calculando algúns valores.

**Exemplo**

Representa a función polinómica  $f(x) = x^3 - 3x$

1. Dominio:  $Dom f = \mathbb{R}$ , por ser un polinomio é continua en todo o seu dominio.
2. Simetría:  $f(x) = x^3 - 3x$ ;  $-f(-x) = -(-x^3 + 3x) = x^3 - 3x$  deducimos que é impar.
3. Cortes co eixe OX, resolvemos a ecuación:  $x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{3}$   
Os puntos son  $(0,0)$   $(\sqrt{3}, 0)$  e  $(-\sqrt{3}, 0)$ . Entre estes puntos atópase o corte co eixe OY.
4. Asíntotas: as funcións polinómicas non teñen ningún tipo de asíntotas.
5. Monotonía: máximos e mínimos:



As frechas indican o signo da derivada en cada un dos intervalos, visto no exemplo anterior:

$(-\infty, -1)$  *crecente*,  $(-1, 1)$  *decrecente*,  $(1, \infty)$  *crecente*

No punto de abscisa  $x=-1$  temos un máximo, as coordenadas son  $(-1, 2)$

No punto de abscisa  $x=1$  temos un mínimo, as coordenadas son  $(1, -2)$

6. Representamos toda a información é obtemos:

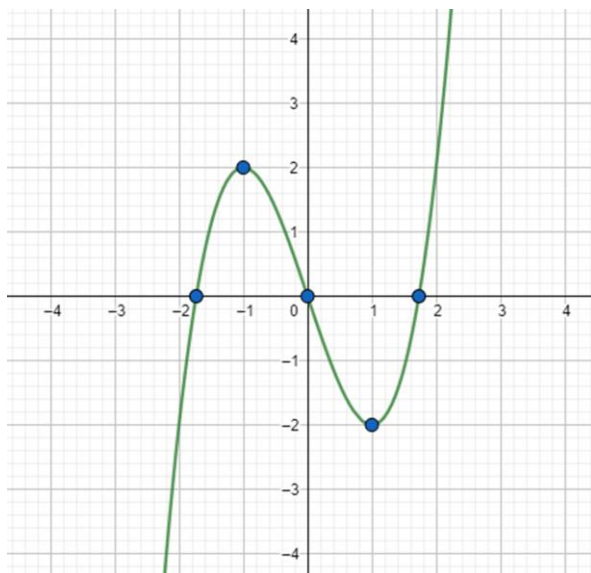


Ilustración 5: Representación función polinómica

## 4. Recursos informáticos

Todos os gráficos desta unidade están realizados co programa GeoGebra. Como xa mencionamos en unidades anteriores é un programa sinxelo de manexar, onde podemos representar calquera tipo de funcións. Ademais tamén se poden calcular as derivadas das funcións e así comprobar os resultados obtidos, teremos que usar o comando Derivada que podemos atopar na calculadora do programa, teremos que introducir a función. Tamén se pode calcular a derivada nun punto, co comando axeitado.

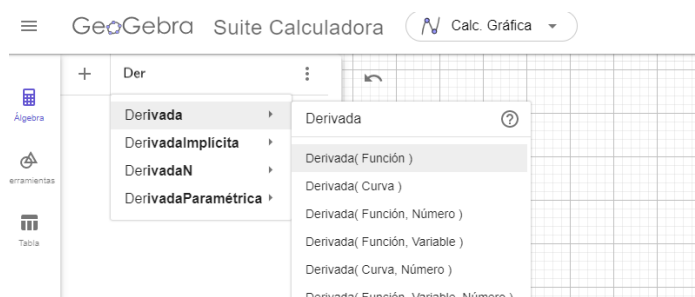


Ilustración 6: Programa Geogebra

### Licenzas das ilustracións

Ilustración	Recurso
Ilustración 1: Taxa de variación media.	Autoría: Licenza: Pública Procedencia: Guías para o bacharelato(LOMCE). Consellería de cultura e Educación, formación Profesional e Universidades.
Ilustración 2: Exemplo de Taxa de variación media	Autoría: Elaboración Propia
Ilustración 3: Interpretación da derivada	Autoría: Elaboración Propia
Ilustración 4: Comportamento da derivada dunha función	Autoría: Licenza: Pública Procedencia: Guías para o bacharelato(LOMCE). Consellería de cultura e Educación, formación Profesional e Universidades.
Ilustración 5: Representación función polinómica	Autoría: Elaboración Propia
Ilustración 6: Programa Geogebra	Autoría: elaboración Propia