

DERIVADA DUNHA FUNCIÓN E AS SÚAS APLICACIÓNS

Exercicios autoavaliables

1. Calcula a taxa de variación media da función $f(x) = 5x - x^2$ no intervalo $[1,2]$
2. Determina a derivada da función $f(x) = \frac{3}{x-2}$ usando a definición, no punto $x=4$.
3. Calcula as rectas tanxente a curva $f(x) = \frac{x^3-3x^2}{9}$ que sexan paralelas a bisectriz do primeiro e terceiro cuadrante.
4. Escribe a ecuación da recta tanxente a curva $f(x) = \frac{2x^2}{x+1}$ no punto $x=-3$.
5. Calcula os puntos singulares da función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ e determina os intervalos onde crece e decrece a función.
6. Calcula a función de segundo grao que pase polo punto $(0,2)$, e a súa pendente no punto $(1,-3)$ tome o valor -1 .
7. Calcula a derivada das seguintes funcións:
 - a) $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1$
 - b) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$
 - c) $f(x) = 2^{3x}$
 - d) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$
 - e) $f(x) = \tan\sqrt{x^2 + 1}$
 - f) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$
8. Representa a función polinómica: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.
9. Os beneficios anuais en millóns de euros dunha empresa que fabrica memoria USB ven dado polo prezo en euros da unidade de produción, segundo a fórmula:
$$f(x) = -x^2 + 14x - 13$$
A que prezo débese vender cada memoria USB para obter o máximo beneficio? Calcula tamén dito beneficio.
10. Un móbil móvese sobre unha recta de maneira que a a súa posición x , nun instante t é igual a :
$$f(t) = t^4 - t^3 + 7t^2 - 15t + 8$$
, onde f mídese en metros e t en segundos.
 - a) Determina a posición do móbil no instante $t=0$
 - b) En que instante pasa o móbil pola posición $f=0$?
 - c) Calcula en que instante a velocidade do móbil é nula?

Solucións

1. Calcula a taxa de variación media da función $f(x) = 5x - x^2$ no intervalo $[1,2]$

Aplicamos a fórmula no intervalo indicado e calculamos as imaxe no punto $x=1$ e $x=2$

$$TVM[1,2] = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{6 - 4}{1} = 2$$

2. Determina a derivada da función $f(x) = \frac{3}{x-2}$ usando a definición, no punto $x=4$.

Aplicamos a definición de derivada:

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2+h} - 3/2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3}{4+2h} = -3/4$$

3. Calcula as rectas tanxente a curva $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{9}$ que sexan paralelas a bisectriz do primeiro e terceiro cuadrante.

Buscamos as rectas paralelas a recta $y=x$, é dicir pendente 1.

Calculamos a derivada da función: $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{3}$ a igualamos a 1, xa que estamos a buscar os valores que teñen pendente un. Obtemos unha ecuación de segundo grao: $\frac{x^2 - 2x}{3} = 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1$ e $x = 3$.

Este puntos teñen pendente 1, calculamos as súas ordenadas

$$x = -1 \text{ e } y = -\frac{4}{9} \Rightarrow \text{recta que pasa polo punto e ten } m = 1 \Rightarrow y = x + 5/9$$

$$x = 3 \text{ e } y = 0 \Rightarrow \text{recta que pasa polo punto e ten } m = 1 \Rightarrow y = x - 3$$

4. Escribe a ecuación da recta tanxente a curva $f(x) = \frac{2x^2}{x+1}$ no punto $x=-3$.

Para calcular a recta precisamos un punto e a súa pendente, logo poderemos aplicar a fórmula da ecuación punto pendente.

Calculamos a ordenada do punto $x = -3$ e obtemos $y = -9$.

Calculamos a pendente nese punto, polo que teremos que facer a derivada e logo substituír no punto 3: $f'(x) = \frac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(3) = 3/2$

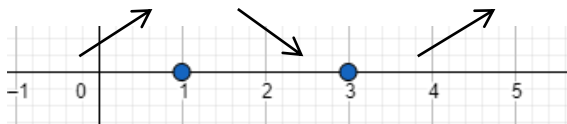
$$\text{Ecuación da recta tanxente } y = -9 + 3/2(x + 3)$$

5. Calcula os puntos singulares da función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ e determina os intervalos onde crece e decrece a función.

Para calcular os puntos singulares temos que resolver a ecuación $f'(x) = 0$, entón, precisamos a derivada da función: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; igualamos a cero:

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ e } x = 3$$

Se estudamos o signo da derivada en cada intervalo obtemos:



A función crece en $(-\infty, 1)$, a función decrece de $(1, 3)$ e crece en $(3, \infty)$

A función ten un máximo no punto $x=1$, este máximo ten por coordenadas $(1, 6)$

E un mínimo no punto de coordenadas $(3, 2)$

6. Calcula a función de segundo grao que pase polo punto $(0, 2)$, e a súa pendente no punto $(1, -3)$ tome o valor -1 .

A ecuación xeral dunha función de segundo grao é: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Como pasa polo punto $(0, 2)$ da ecuación xeral obtemos $c=2$

Calculamos a derivada, xa que no punto 1 a súa pendente deberá ser -1 e obteremos unha ecuación:

$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(1) = 2a + b = -1$$

E por outro lado temos que pasa por $(1, -3)$ obtemos outra ecuación: $a + b + c = -3$

$$\text{Resolvemos o sistema } \begin{cases} 2a + b = -1 \\ a + b = -5 \end{cases}$$

$c=2$ $b=-9$ e $a=4$ a función que nos piden é:

$$f(x) = 4x^2 - 9x + 2$$

7. Calcula a derivada das seguintes funcións:

$$a) f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \quad b) f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$c) f(x) = 2^{3x} \quad d) f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

$$e) f(x) = \tan\sqrt{x^2 + 1} \quad f) f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$$

Deberemos ter claro a táboa das derivadas das funcións e as regras de derivación traballadas na unidade e aplícalas en cada situación:

$$a) f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x + 1 \Rightarrow \text{Derivamos cada sumando } f'(x) = 6x^2 - 4x + 3$$

b) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} \Rightarrow$ Expresamos a función en forma de potencia e logo derivamos: $f'(x) = -\frac{3}{2}x^{-5/2}$

c) $f(x) = 2^{3x} \Rightarrow f'(x) = 8^x \ln 8$ Función exponencial

d) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^4+3x^2}{x^4+2x^2+1}$ Cociente de funciones

e) $f(x) = \tan\sqrt{x^2+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2\sqrt{x^2+1}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}x$

Temos tres funciones a derivar, unha tanxente, unha raíz e logo unha suma de polinomios.

f) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 2\left(\frac{x+1}{x}\right) \frac{x-x-1}{x^2} = \frac{x}{x+1} 2 \frac{-1}{x^2} = \frac{-2}{x(x+1)}$

Temos varias funcións, derivamos primeiro o logaritmo, logo unha potencia e por último un cociente.

8. Representa a función polinómica: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Dominio: Función polinómica todo \mathbb{R}

Simetría: $f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x)$ No simétrica.

Cortes cos eixes:

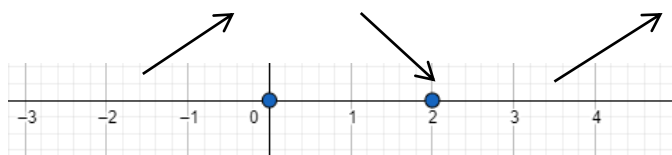
- Eixo OX: resolvemos a ecuación $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ por Ruffini e danos $x=-1$ e $x=2$ dobre. Así que as coordenadas son $(-1,0)$ e $(2,0)$
- Eixe OY: $x=0$ obtemos $f(0) = 4$ $(0,4)$

Asíntotas: As funcións polinómicas non ten.

Monotonía, cálculo de máximos e mínimos: Debemos derivar, igualar a cero e estudar o signo.

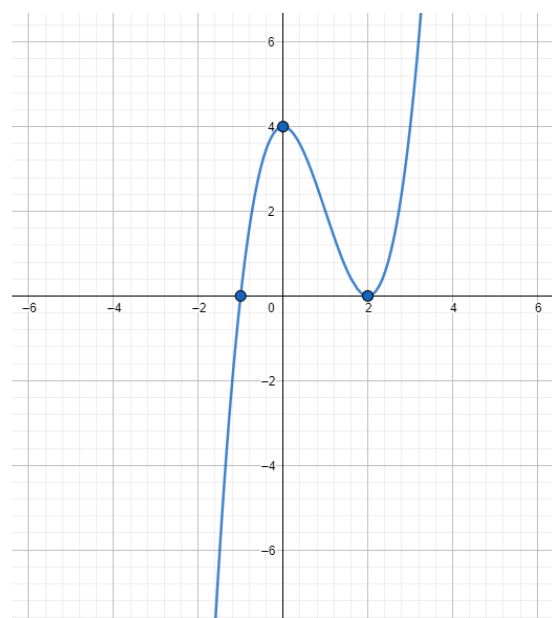
$f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow$ igualamos a cero e obtemos $x = 0$ e $x = 2$

Estudamos o signo nos diferentes intervalos da derivada e obtemos:



No intervalo $(-\infty, 0)$ é crecente, no interevalo $(0, 2)$ é decrecente e $(2, \infty)$ é crecente

Nos puntos onde cambia a monotonía temos un extremo, polo tanto no punto $x=0$ teremos un máximo, as súas coordenadas son $(0,4)$ e no punto $x=2$ temos un mínimo de coordenadas $(2,0)$. Representamos toda a información obtida e:



9. Os beneficios anuais en millóns de euros dunha empresa que fabrica memorias USB ven dado polo prezo en euros da unidade de produción, segundo a fórmula:

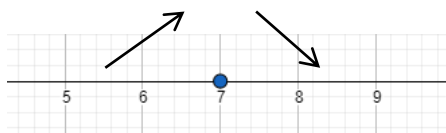
$$f(x) = -x^2 + 14x - 13$$

A que prezo débese vender cada memoria USB para obter o máximo beneficio? Calcula tamén dito beneficio.

Deberemos saber onde ten un máximo a función, polo tanto calculamos a derivada:

$$f'(x) = -2x + 14 = 0 \Rightarrow x = 7$$

Estudamos o signo a dereita e a esquerda do punto $x=7$.



Polo tanto a vista dos resultados, o prezo de venda de cada memoria USB é de 7€.

Para calcular o beneficio máximo deberemos calcular a imaxe de $x=7 \Rightarrow f(7) = 36$ millóns de euros.

10. Un móbil móvese sobre unha recta de maneira que a a súa posición f , nun instante t é igual a :
 $f(t) = t^4 - t^3 + 7t^2 - 15t + 8$, onde f mídese en metros e t en segundos.

- Determina a posición do móbil no instante $t=0$
- En que instante pasa o móbil pola posición $f=0$?
- Calcula en que instante a velocidade do móbil é nula?

A derivada nun punto como xa vimos na unidade, expresa o estado de cambio da función nese punto. Se nos situamos nun movemento rectilíneo, a velocidade media dun móbil, coincide coa taxa de variación media da posición respecto ao tempo. O límite cando o tempo tende a cero denomínase velocidade instantánea. Polo tanto a velocidade instantánea coincide coa derivada da función posición do móbil.

- Para $t=0$ obtemos $f(0)=8$: A posición do móbil nese instante $t=0$ s é $f=8m$
- Para $f=0$ obtemos: $t^4 - t^3 + 7t^2 - 15t + 8 = 0$ Resolvemos a ecuación polinómica de grado catro é a única solución real é $t=1$. Polo que o móbil pasa pola posición $f=0m$ cando $t=1$ s.
- A velocidade instantánea do móbil coincide coa derivada da función posición:
 $v(t) = f'(t) = 4t^3 - 3t^2 + 14t - 15$

Se igualamos a cero $4t^3 - 3t^2 + 14t - 15 = 0 \Rightarrow t = 1$ A velocidade do móbil é nula cando $t=1$ s