

DERIVADA DUNHA FUNCIÓN E AS SÚAS APLICACIÓNS

Exercicios autoavaliabes

- Calcula a taxa de variación media da función $f(x) = 3x^2 - 2$ no intervalo $[-1,2]$
- Determina a derivada da función, $f(x) = \frac{2}{x-1}$ nos puntos $x = -1$ e $x = 0$, aplicando a definición.
- Calcula a función derivada, $f(x) = 2x^2$ pola definición. Cánto vale no punto $x=-4$?
- Calcula as seguintes derivadas, aplicando as regras de derivación:
 - $f(x) = x^3$
 - $f(x) = \frac{1}{x}$
 - $f(x) = \sqrt{x}$
 - $f(x) = 6x^5$
 - $f(x) = 3x^2 - 4x^5$
 - $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$
- Calcula a derivada da función $f(x) = 1 - 3x^2$. Calcula a ecuación da recta tanxente e normal que pasa polo punto $x=-1$.
- Calcula as seguintes derivadas, aplicando as regras de derivación:
 - $f(x) = 5$
 - $f(x) = 3x^6$
 - $f(x) = 7^x$
 - $f(x) = \log_4 x$
 - $f(x) = (x^2 + 1)\ln x$
 - $f(x) = \frac{x + \operatorname{sen} x}{3\cos x}$
 - $f(x) = (x^3 - 2x)^4$
 - $f(x) = \sqrt[4]{\ln x}$
 - $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}^4 x}$
 - $f(x) = 3^{\operatorname{sen}^2 x}$
 - $f(x) = \ln(3x^2 + 1)$
 - $f(x) = \operatorname{sen}(3x^2 + 1)$
 - $f(x) = \ln \operatorname{sen} \sqrt{3x^5}$
- Determina os puntos da función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, onde a súa tanxente sexa horizontal.
- Calcula as derivadas primeira, segunda e terceira de $f(x) = -3x^2 + \ln x$
- Calcula os coeficientes a, b, c da función $f(x) = ax^3 + bx + c$ para que pase polo punto $(0,5)$ e teña un punto singular no $(2,-3)$.
- Estuda os puntos singulares e o crecemento das funcións:
 - $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
 - $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$
- Representa a seguinte función:
 $f(x) = x^4 - 4x^2$
- Sexa a función $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. Estuda a derivabilidade en $x=0$ utilizando as derivadas laterais.

Solucións

1. Calcula a taxa de variación media da función $f(x) = 3x^2 - 2$ no intervalo $[-1, 2]$

Aplicamos a fórmula no intervalo indicado e calculamos as imaxe no punto $x=-1$ e $x=2$

$$TVM[-1, 2] = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{10 - 1}{3} = 3$$

2. Determina a derivada da función, $f(x) = \frac{2}{x-1}$ nos puntos $x = -1$ e $x = 0$, aplicando a definición.

Aplicamos a definición de derivada:

No punto $x=-1$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{-2+h} - \frac{2}{-2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{-2+h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h-2} = -\frac{1}{2}$$

No punto $x=0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{h-1} - \frac{2}{-1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2h}{h-1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h-1} = -2$$

3. Calcula a función derivada, $f(x) = 2x^2$ pola definición. Canto vale no punto $x=-4$?

Aplicamos a definición de derivada:

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 - 2x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \frac{0}{0} \text{ IND}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \Rightarrow f'(x) = 2x$$

Como $f'(x) = 2x$, agora substituímos a x polo punto que no mandan:

$$\text{En } x = -4; f'(-4) = -8$$

4. Calcula as seguintes derivadas, aplicando as regras de derivación:

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

d) $f(x) = 6x^5$

e) $f(x) = 3x^2 - 4x^5$

f) $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$

Aplicamos as regras de derivación e temos en conta a táboa das derivadas das funcións máis usuais:

a) $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$; derivada dunha potencia

b) $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x^2}$; derivada dunha potencia



$$c) f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \text{ derivada dunha potencia}$$

$$d) f(x) = 6x^5 \Rightarrow f'(x) = 30x^4; \text{ derivada dunha constante por unha potencia}$$

$$e) f(x) = 3x^2 - 4x^5 \Rightarrow f'(x) = 6x - 20x^4; \text{ derivada dunha resta de funcións e logo de potencias}$$

$$f) f(x) = \frac{x-3}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1(x+2)-(x-3)1}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}; \text{ derivada dun cociente de funcións polinómicas}$$

5. Calcula a derivada da función $f(x) = 1 - 3x^2$. Calcula a ecuación da recta tanxente e normal que pasa polo punto $x=-1$.

Calculamos a derivada coa axuda das regras derivación: $f'(x) = -6x$

Calculamos a derivada no punto onde temos que calcular a recta tanxente e normal: $f'(-1) = 6$

Calculamos as coordenadas do punto por onde vai pasara a recta: $x=-1$ e $f(-1)=-2$

Ecuación punto pendente da recta tanxente:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - (-2) = 6(x - (-1)) \Rightarrow y + 2 = 6(x + 1) \Rightarrow y = 6x - 8$$

A ecuación normal ten pendente inversa e oposta:

$$y - (-2) = \frac{-1}{6}(x - (-1)) \Rightarrow y + 2 = -\frac{1}{6(x + 1)} \Rightarrow y = \frac{-x - 13}{6}$$

6. Calcula as seguintes derivadas, aplicando as regras de derivación:

$$a) f(x) = 5 \quad b) f(x) = 3x^6 \quad c) f(x) = 7^x \quad d) f(x) = \log_4 x \quad e) f(x) = (x^2 + 1)\ln x$$

$$g) f(x) = \frac{x + \sin x}{3\cos x} \quad h) f(x) = (x^3 - 2x)^4 \quad i) f(x) = \sqrt[4]{\ln x} \quad j) f(x) = \frac{1}{\sin^4 x}$$

$$k) f(x) = 3^{\sin^2 x} \quad l) f(x) = \ln(3x^2 + 1) \quad m) f(x) = \sin(3x^2 + 1) \quad n) f(x) = \ln \sin \sqrt{3x^5}$$

$$a) f(x) = 5 \Rightarrow f'(x) = 0; \text{ función constante}$$

$$b) f(x) = 3x^6 \Rightarrow f'(x) = 18x^5; \text{ produto dunha constante por unha potencia}$$

$$c) f(x) = 7^x \Rightarrow f'(x) = 7^x \ln 7; \text{ función exponencial}$$

$$d) f(x) = \log_4 x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \ln 4}; \text{ función logarítmica}$$

$$e) f(x) = (x^2 + 1)\ln x \Rightarrow f'(x) = 2x \ln x + (x^2 + 1)\frac{1}{x}; \text{ produto de dúas funcións unha polinómica e o outra logarítmica}$$

$$g) f(x) = \frac{x + \sin x}{3\cos x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(1 + \cos x)3\cos x - (x + \sin x)(-3\sin x)}{(3\cos x)^2} = \frac{1 + \cos x + x\sin x}{3\cos x}; \text{ cociente de funcións trigonométricas}$$

$$h) f(x) = (x^3 - 2x)^4 \Rightarrow f'(x) = 4(x^3 - 2x)^3(3x^2 - 2); \text{ aplicamos a regra da cadea unha potencia e logo unha resta de potencias}$$

$$i) f(x) = \sqrt[4]{\ln x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4} \ln x^{-3/4} \frac{1}{x} = \frac{1}{4x} \frac{1}{\sqrt[4]{\ln x^3}}; \text{ regra da cadea unha potencia e logo un logaritmo}$$



j) $f(x) = \frac{1}{\sin^4 x} = \sin x^{-4} \Rightarrow f'(x) = -4(\sin x)^{-5} \cos x = \frac{-4 \cos x}{(\sin x)^5}$; o poñemos coma potencia para derivar

k) $f(x) = 3^{\sin^2 x} \Rightarrow f'(x) = 3^{\sin^2 x} \ln 3 \cdot 2 \sin x \cos x$; derivar unha función exponencial

l) $f(x) = \ln(3x^2 + 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3x^2 + 1} 6x$; regra da cadea unha función logarítmica e logo unha suma

m) $f(x) = \sin(3x^2 + 1) \Rightarrow f'(x) = \cos(3x^2 + 1) 6x$; regra da cadea unha función trigonométrica e logo unha suma de funcións elementais

n) $f(x) = \ln \sin \sqrt{3x^5} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sin \sqrt{3x^5}} \cos \sqrt{3x^5} \cdot \frac{5}{2} \sqrt{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{5\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}} \cos \sqrt{3x^5}}{2 \sin \sqrt{3x^5}}$; regra da cadea, derivamos a función logaritmo, a continuación unha función trigonométrica e por último unha constante por unha potencia

7. Determina os puntos da función $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, onde a súa tanxente sexa horizontal.

Que a tanxente sexa horizontal, o que nos di é que a derivada neses puntos toma o valor cero. Calculamos a derivada:

$$f'(x) = \frac{1(x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

A derivada a debe ser igual a cero $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

En $x = 1$ $f(1) = 1/2 \Rightarrow (1, 1/2)$

En $x = -1$ $f(-1) = -1/2 \Rightarrow (-1, -1/2)$

8. Calcula as derivadas primeira, segunda e terceira de $f(x) = -3x^2 + \ln x$

$$f'(x) = -6x + \frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = -6 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'''(x) = 2 \frac{1}{x^3}$$

9. Calcula os coeficientes a,b,c da función $f(x) = ax^3 + bx + c$ para que pase polo punto (0,5) e teña un punto singular no (2,-3).

Se f pasa polo punto (0,5) obtemos $c=5$

Se (2,-3) é un punto singular entón $f'(2) = 0$ calculemos a derivada.

$$f'(x) = 3ax^2 + b \Rightarrow f'(2) = 12a + b = 0$$

Como o punto (2,-3) tamén pertence a función obtemos:

$$8a + 2b + c = -3$$

$$12a + b = 0$$

$$c = 5$$

E resolvemos o sistema formado polas tres ecuacións $c=5$, $b=-6$ e $a=1/2$.

10. Estuda os puntos singulares e o crecemento das funcións:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

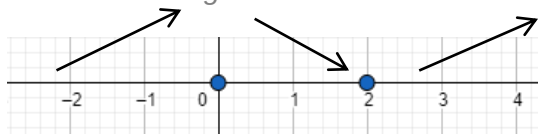
a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

Calcúlase a derivada primeira e igualamos a cero para obter os puntos singulares e posibles extremos da función:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ e } x = 2$$

Temos dous puntos singulares dividimos a recta nos intervalos que marcan ditos puntos e estudamos o signo da derivada:



$$f'(-1) > 0 \quad f'(1) < 0 \quad f'(4) > 0$$

A función é crecente $(-\infty, 0)$ e $(2, \infty)$ e decrecente $(0, 2)$

A función ten un máximo no punto $x=0$, este máximo ten por coordenadas $(0, 1)$

E un mínimo no punto de coordenadas $(2, -3)$

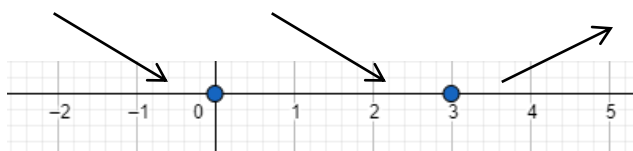
b) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

Calcúlase a derivada primeira e igualamos a cero para obter os puntos singulares e posibles extremos da función:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 12x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2(x - 3) = 0 \begin{cases} 4x^2 = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, x = 3$$

Temos dous puntos singulares dividimos a recta nos intervalos que marcan ditos puntos e estudamos o signo da derivada:



$$f'(-1) < 0 \quad f'(1) < 0 \quad f'(4) > 0$$

A función é decrecente $(-\infty, 0)$ e $(0, 3)$ e crecente $(3, \infty)$

A función ten un mínimo en $x=3$. No $x=0$ non hai nada. O mínimo atópase no punto de coordenadas: $(3, -17)$

11. Representa a seguinte función:

$$f(x) = x^4 - 4x^2$$

Dominio: $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, función polinómica

Simetría: $f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 = x^4 - 4x^2 = f(x)$. Polo tanto a función é par.

Corte cos eixes:

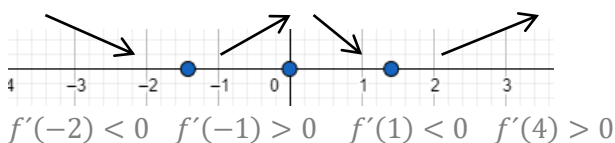
- Eixe OX: $x^4 - 4x^2 = 0$ resolvemos e obtemos $x^2(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ e $x = \pm 2$
Polo tanto os puntos de corte son $(0,0)$ $(-2,0)$ e $(2,0)$
- Eixe OY: $(0,0)$

Asíntotas: por ser unha función polinómica non ten asíntotas

Monotonía:

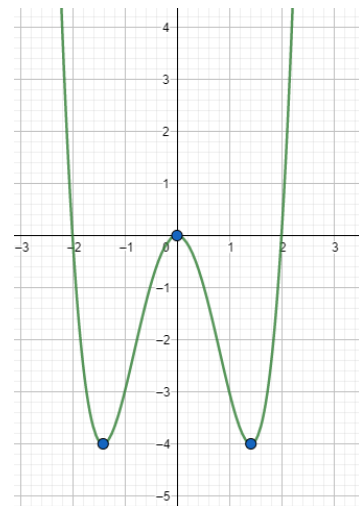
$$f'(x) = 4x^3 - 8x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 8x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ e } x = \pm\sqrt{2}$$

Estudamos o signo da derivada nos intervalos determinados polos puntos singulares:



Entón, función é decrecente en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, 2)$ e crecente en $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, \infty)$. Ten un mínimo en $(-\sqrt{2}, -4)$ e en $(\sqrt{2}, -4)$ e un máximo en $(0, 0)$

Representemos toda a información graficamente:



12. Sexa a función $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. Estuda a derivabilidade en $x=0$ utilizando as derivadas laterais.

Calculamos as derivadas laterais en $x=0$, xa que é o punto onde cambia a función.

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{0+h-0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(0+h)^2 - 0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h = 0$$

Como non coinciden as derivadas laterais, non existe $f'(0)$ e polo tanto, a función non é derivable en $x=0$.