

1) Andalucía. Extraordinaria 2025. EJERCICIO 2 (2.5 puntos)

Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

-No numerador non hai nada que sexa derivada do denominador. Non é cuasi inmediata ou cambio de variable

-É unha fracción alxebrica, pero se factorizamos o denominador, non temos raíces reais. Descartamos método.

-Só quedan unhas que temos con fraccións que son as arco pero a que non ten raíz no denominador é da forma $1 + (\)^2$.

Vexamos que podemos facer.

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 2} = \frac{1}{x^2 + 2x + \underbrace{1+1}} = \frac{1}{1 + (x+1)^2}$$

Xa teño o +1 que buscaba.

Agora boto unha ollada ao que queda

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$



Esto xa ten aspecto de

arcotangente

e ademais a derivada do termo
ao cadrado é 1,

logo vale o numerador que temos

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx = \int \frac{1}{1 + (x+1)^2} dx = \arctan(x+1) + C$$

Como pasa por $(0, \pi/4)$, quere dicir que $F(0) = \pi/4$

$$F(0) = \arctan(0+1) + C = \frac{\pi}{4} + C = \frac{\pi}{4} \Rightarrow C=0$$

A primitiva da función é:

$$F(x) = \arctan(x+1)$$

3) Aragón Ordinaria 2025. 3.1 Queremos aproximar la función $f(x) = e^x$, con x en el intervalo $[0, 1]$, por otra función $g_m(x) = mx$ con m un parámetro en $\mathbb{R}$. Definimos como error de la aproximación la expresión

$$\text{err}(m) = \int_0^1 (f(x) - g_m(x))^2 dx$$

a) (1,5 puntos) Comprueba que $\text{err}(m) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} - 2m + \frac{m^2}{3}$ con $m \in \mathbb{R}$.

b) (1 punto) ¿Cuál es el valor de $m \in \mathbb{R}$ que minimiza el error? ¿Cuál será el valor mínimo del error?

a) Escribimos a integral

$$\begin{aligned} \int_0^1 (e^x - mx)^2 dx &= \int_0^1 (e^{2x} + m^2 x^2 - 2e^x mx) dx = \\ &= \int_0^1 e^{2x} dx + \int_0^1 m^2 x^2 dx - \int_0^1 2mx e^x dx = \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_0^1 + m^2 \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - 2m \int_0^1 x e^x dx = \\ &\quad \underbrace{u=x \Rightarrow du=dx}_{dv=e^x dx \Rightarrow v=e^x} \\ &\quad \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = \\ &\quad = x e^x - e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e^0 + m^2 \frac{1}{3} - m^2 \frac{0^3}{3} - 2m [x e^x - e^x]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} + \frac{m^2}{3} - 2m (e^1 - e^1 - (-e^0)) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{m^2}{3} - 2m \end{aligned}$$

Efectivamente da o indicado

b) Se a función error ten un mínimo, cúmprese que $\text{err}'(m) = 0$

$$\text{err}(m) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{m^2}{3} - 2m \Rightarrow \text{err}'(m) = \frac{2}{3}m - 2$$

$$\text{err}'(m) = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow m = 3$$

$$\text{err}(3) = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{9}{3} - 6 = 0,19$$

23) Asturias. EBAU Ordinaria 2021. Bloque 2.A. Sean las parábolas

$$y_1 = x^2 - 2x + 3 \text{ e } y_2 = ax^2 + b.$$

- a) Calcula los valores de a y b para que en el punto de abscisa $x = 2$ las dos parábolas tengan la misma recta tangente. Calcula dicha recta tangente. (1 punto)
- b) Para $a = 1$, $b = 1$ esboza el recinto limitado por las parábolas entre el eje Y y el punto de corte entre ellas. Calcula el área del mismo. (1.5 puntos)

a) Recta tangente en $x = 2$: $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$ (1)

$$y - g(2) = g'(2)(x - 2)$$
 (2)

$$f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 3 \quad f'(x) = 2x - 2 \quad f'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2$$

$$g(2) = a \cdot 2^2 + b = 4a + b \quad g'(x) = 2ax \quad g'(2) = 4a$$

$$(1) \quad y - 3 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 1$$

$$(2) \quad y - (4a + b) = 4a(x - 2) \Rightarrow y = 4ax - 8a + 4a - b \Rightarrow y = 4ax - 4a - b$$

$$\Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$-4a - b = -1 \Rightarrow -4 \cdot \frac{1}{2} - b = -1 \Rightarrow b = -1$$

b) Parábola $f(x) = x^2 - 2x + 3 \rightarrow$ É convexa. Ten mínimo

$$f'(x) = 2x - 2, \quad f'(x) = 0$$

$$2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Mínimo en (1, 2)

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

Non ten raíces

Non corta ao eixe X

(Ten sentido, é convexa e o mínimo está por

Calculamos un par de puntos a dereita e esquerda do mínimo $f(0) = 3$ $f(2) = 3$

$g(x) = x^2 + 1 \rightarrow$ É convexa. Ten mínimo

$$g'(x) = 2x \rightarrow g'(x) = 0$$

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Mínimo en (0, 1)

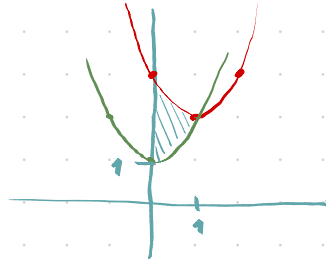
Calculamos un par de puntos a dereita e esquerda do mínimo $g(-1) = 2$ $g(1) = 2$

Puntos onde se cortan as parábolas $f(x)=g(x)$

$$x^2 - 2x + 3 = x^2 + 1$$

$$-2x + 2 = 0$$

$$x = -1$$



$$A = \left| \int_0^1 [x^2 - 2x + 3 - (x^2 + 1)] dx \right| = \left| \int_0^1 (-2x + 2) dx \right| =$$

$$= \left| -x^2 + 2x \right|_0^1 = |-1 + 2 - 0| = 1 \text{ u}^2$$

26) Balears. PBAU Julio 2019. OPCIÓN B. 2. Considere la región delimitada por la función

$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, el eje de abscisas o eje OX y las rectas verticales $x = -1$ y $x = 1$. Haz un esbozo de la región (6 puntos) y calcula el área de la región. (4 puntos)

Dom $f = \mathbb{R}$ (non hai puntos que anulen o denominador)

Puntos de corte cos eixes:

- Eixe Y: $x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0}{1+0^2} = 0$ (0,0)

- Eixe X: $y = 0 \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

Extremos:

$f'(x) = \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ $f'(x) = 0 \Rightarrow 1-x^2 = 0$ Hai mínimo en $x = -1$
 $x = \pm 1$

$f' < 0$ $f' > 0$ $f' < 0$
 -1 $+1$

Asíntotas

- Non hai asíntotas verticais

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$$



$$A = \left| \int_{-1}^0 \frac{x}{1+x^2} dx \right| + \left| \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2} \ln |1+x^2| \right|_{-1}^0 + \left| \frac{1}{2} \ln |1+x^2| \right|_0^1 =$$

$$= \left| \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \ln 2 \right| + \left| \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 \right| = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = \ln 2 \quad \checkmark$$

Observa que pasa se calculamos a integral de -1 a 1 directamente, sen ter en conta os puntos de corte co eixe X.

$$A = \left| \int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2} dx \right| = \left| \frac{1}{2} \ln |1+x^2| \right|_{-1}^1 = \left| \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 2 \right| = 0$$

Saë que non ten área, cónsa bastante absurda porque como vemos no debuxo si que hai área