



Nome: _____

1 2 ptos	2 2 pto	3 2 ptos	4 2 ptos	5 2 ptos	Nota

(Se non hai indicacións, todos os apartados valen o mesmo)

1. Dada a seguinte función:

$$f(x) = \begin{cases} a - \cos x & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 - b \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- Estudia a súa continuidade en $\mathbb{R}$ segundo os valores de a e b .
- Para $a = 1$, calcula o valor de b para que, no punto $x = \frac{\pi}{2}$, a función teña recta tanxente $y = \frac{\pi}{2}x$

Aragón Extraordinaria 2024

2. Atopar o valor de k para que sexa certa a seguinte igualdade:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{kx^2 - 4k}{x^2 + 6x + 8} = \frac{3}{2}$$

Canarias Extraordinaria 2023

3. Dada la función $f(x) = x^2(x + 3)$, determinar o seu dominio de definición, puntos de corte da gráfica cos eixes, intervalos de crecemento e decrecemento e extremos relativos.

Castilla y León Extraordinaria 2023

4. De entre todos os triángulos rectángulos cuia hipotenusa mide 4 metros, determine as dimensións do que ten área máxima. Cal é o valor de dita área máxima?

Murcia Ordinaria 2020

5. Calcula as seguintes integrais:

a) $\int e^{\cos 3x} \sin 3x dx$

b) $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 2x} dx$

Navarra Xuño 2018

1. Dada a seguinte función:

$$f(x) = \begin{cases} a - \cos x & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 - b \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

a) Estudia a súa continuidade en $\mathbb{R}$ segundo os valores de a e b .

b) Para $a = 1$, calcula o valor de b para que, no punto $x = \frac{\pi}{2}$, a función teña recta tanxente $y = \frac{\pi}{2}x$

Aragón Extraordinaria 2024

a) A función é continua en $(-\infty, 0)$ e tamén en $(0, +\infty)$ posto que se trata de sumas e restas de funcións continuas. Analizamos que pasa no punto $x = 0$.

Para que a función sexa continua en $x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} (a - \cos x) &= a - 1 \equiv f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - b \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -b \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Para que sexa continua} \\ &a - 1 = -b \Rightarrow b = 1 - a \end{aligned}$$

b) Éc da recta tanxente en $x = \frac{\pi}{2}$: $y - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Como $x = \frac{\pi}{2} > 0$, estamos no trozo $f_2(x) = x^2 - b \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$f_2'(x) = 2x - b \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} - b \cdot 0 = \frac{\pi^2}{4} \quad f_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - b \cdot (-1) = \pi + b$$

Substituíndo na ecuación da recta: $y - \frac{\pi^2}{4} = (\pi + b) \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$$y = (\pi + b) \cdot x - (\pi + b) \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}$$

Para que coincida coa recta dada:

$$\pi + b = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$$

Comprobamos que con ese valor o término independente é 0:

$$-\left[\pi + \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} = 0$$

Logo o valor buscado é $b = -\frac{\pi}{2}$

2. Atopar o valor de k para que sexa certa a seguinte igualdade:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{kx^2 - 4k}{x^2 + 6x + 8} = \frac{3}{2}$$

Canarias Extraordinaria 2023

v2 1

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{kx^2 - 4k}{x^2 + 6x + 8} = \frac{0}{0} \text{ INDETERMIN.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{k(x^2 - 4)}{(x+2)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{k(x+2)(x-2)}{(x+2)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{k(x-2)}{x+4} = \frac{-4k}{2} = \frac{3}{2}$$

Enunciado

$$\text{Polo que } -4k = 3 \Rightarrow k = -\frac{3}{4}$$

3. Dada la función $f(x) = x^2(x + 3)$, determinar o seu dominio de definición, puntos de corte da gráfica cos eixes, intervalos de crecemento e decrecemento e extremos relativos.

Castilla y León Extraordinaria 2023

Dom $f = \mathbb{R}$ posto que se trata dunha función polinómica.

Puntos de corte:

$$\text{Eixe } X: y=0 \Rightarrow x^2(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ x+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-3 \end{cases}$$

Ten dous puntos de corte co eixe X : $(0,0)$, $(-3,0)$

$$\text{Eixe } Y: x=0 \Rightarrow 0^2(0+3)=0$$

Punto de corte $(0,0)$

Para analizar a monotonía e os extremos, calculamos a función derivada.

$$f'(x) = 2x(x+3) + x^2 = 2x^2 + 6x + x^2 = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

Se hai extremos compreu que $f'(x)=0 \Rightarrow 3x(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$

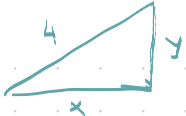
$$\begin{array}{c} f'(x) > 0 & f'(x) < 0 & f'(x) > 0 \\ \hline & -2 & 0 & \\ \swarrow & & \searrow & \swarrow \end{array}$$

Temos que $x=-2$ é un máximo e $x=0$ é un mínimo.

A función crece en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ e decrece en $(-2, 0)$.

4. De entre todos os triángulos rectángulos cuia hipotenusa mide 4 metros, determine as dimensións do que ten área máxima. Cal é o valor de dita área máxima?

Murcia Ordinaria 2020


$$\rightarrow x^2 + y^2 = 4^2 \Rightarrow y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{16 - x^2}$$

$$A = \frac{x \cdot y}{2} \rightarrow A(x) = \frac{x \sqrt{16 - x^2}}{2}$$

Para analizar los extremos de la función $A'(x) = 0$

$$A'(x) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{16 - x^2} + x \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} \right] = \frac{16 - x^2 - x^2}{2\sqrt{16 - x^2}} = \frac{16 - 2x^2}{2\sqrt{16 - x^2}} = \frac{2(8 - x^2)}{2\sqrt{16 - x^2}} = \frac{8 - x^2}{\sqrt{16 - x^2}}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{8 - x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \Rightarrow 8 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm \sqrt{8}$$

Comprobamos que es máximo:

$$\frac{f'(x) > 0 \quad f'(x) < 0}{\sqrt{8}}$$

Descartamos la solución negativa por contexto

Effectivamente é máximo

$$y = \sqrt{16 - (\sqrt{8})^2} = \sqrt{16 - 8} = \sqrt{8}$$

$$A = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}}{2} = 4 \text{ m}^2$$

As medidas que fan a área máxima son os catetos iguais de $\sqrt{8}$ m e a área máxima é 4 m².

5. Calcula as seguintes integrais:

a) $\int e^{\cos 3x} \sin 3x dx$

b) $\int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 2x} dx$

Navarra Xuño 2018

a) $t = \cos 3x \Rightarrow dt = -\sin 3x \cdot 3 \cdot dx \Rightarrow -\frac{dt}{3} = \sin 3x dx$

Logo a integral queda:

$$\int e^t \left(-\frac{dt}{3}\right) = -\frac{1}{3} \int e^t dt = -\frac{1}{3} e^t + C = -\frac{1}{3} e^{\cos 3x} + C$$

b) $t = \cos 2x \Rightarrow dt = -\sin 2x \cdot 2 \cdot dx \Rightarrow -\frac{dt}{2} = \sin 2x dx$

Logo a integral queda:

$$\int \frac{1}{1+t^2} \left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2} dt = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\cos 2x) + C$$