## CAMBIO DE VARIABLE

1. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x} dx$

**Solución:**

Cambio de variable: $\ln x = t \implies \frac{1}{x} dx = dt$

Solución: $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C$

2. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$

**Solución:**

Cambio de variable: $\sin x = t \implies \cos x dx = dt$

Solución: $F(x) = -\frac{1}{\sin x} + C$

3. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2\sin x + 3} dx$

**Solución:**

Cambio de variable: $2\sin x + 3 = t \implies 2\cos x dx = dt, \cos x dx = \frac{dt}{2}$

Solución: $F(x) = \frac{1}{2} \ln |2\sin x + 3| + C$

4. $\displaystyle\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

**Solución:**

Cambio de variable: $1 - x^2 = t \implies -2x dx = dt, x dx = \frac{-dt}{2}$

Solución: $F(x) = -\sqrt{1 - x^2} + C$

5. $\displaystyle\int \frac{k dx}{ax+b} dx$

**Solución:**

Cambio de variable: $ax + b = t \implies adx = dt, dx = \dfrac{dt}{a}$

Solución: $F(x) = \dfrac{k}{a} \ln|ax+b| + C$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+k^2} dx$

**Solución:**

Cambio de variable: $x = kt \implies dx = kdt$

Solución: $F(x) = \dfrac{1}{k} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{k} + C$

## INTEGRACIÓN POR PARTES

7. $\displaystyle\int x e^x dx$

**Solución:**

Por partes: $\begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{bmatrix}$

Solución: $F(x) = xe^x - e^x + C$

8. $\displaystyle\int x \sin x dx$

**Solución:**

Por partes: $\begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{bmatrix}$

Solución: $F(x) = -x\cos x + \sin x + C$

9. $\displaystyle\int \ln x\, dx$

**Solución:**

Por partes: $\left[\begin{array}{ll} u = \ln x & du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx & v = x \end{array}\right]$

Solución: $F(x) = x\ln x - x + C$

10. $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\, dx$

**Solución:**

Por partes: $\left[\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx & v = x \end{array}\right]$

Solución: $F(x) = x\operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$

11. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x} dx$

**Solución:**

Por partes: $\left[\begin{array}{ll} u = \ln x & du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = \dfrac{1}{x}dx & v = \ln x \end{array}\right]$

Solución: $F(x) = \dfrac{\ln^2 x}{2} + C$

12. $\displaystyle\int \sin^4 x\, dx$

**Solución:**

Por partes: $\left[\begin{array}{ll} u = \sin^3 x & du = 3\sin^2 x\cos x\, dx \\ dv = \sin x\, dx & v = -\cos x \end{array}\right]$

Seguinte paso: $\int \sin^4 x dx = -\sin^3 x \cos x + 3\int \sin^2 x \cos^2 x dx =$

$= -\sin^3 x \cos x + 3\int \sin^2 x \left(1 - \sin^2 x\right) dx =$

$= -\sin^3 x \cos x + 3\int \sin^2 x dx - 3\int \sin^4 x dx$

Resolvemos a integral do $\sin^2 x$ usando as igualdades trigonométricas:

$-\sin^3 x \cos x + 3\int \sin^2 x dx - 3\int \sin^4 x dx =$

$= -\sin^3 x \cos x + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\sin 2x - 3\int \sin^4 x dx$

Esta última integral é precisamente a que queríamos calcular, logo se a pasamos ao primeiro membro temos:

$4\int \sin^4 x dx = -\sin^3 x \cos x + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}\sin 2x \implies$

$\implies \int \sin^4 x dx = -\frac{1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}\sin 2x + C$

13. $\int e^x \sin x dx$

**Solución:**

Por partes primeira vez: $\begin{bmatrix} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{bmatrix}$

Por partes segunda vez: $\begin{bmatrix} u = e^x & du = e^x dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{bmatrix}$

Como no caso da integral do $\sin^4 x$ imos chegar a un punto en que volvemos ter a integral que queremos calcular, logo reorganizamos a igualdade:

Solución: $F(x) = \dfrac{e^x(\cos x - \sin x)}{2} + C$

14. $\int \arcsin x dx$

**Solución:**

Por partes: $\left[\begin{array}{ll} u = \arcsin x & du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv = dx & v = x \end{array}\right]$

Solución: $F(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

15. $\displaystyle\int \arccos x \, dx$

**Solución:**

Por partes: $\left[\begin{array}{ll} u = \arccos x & du = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv = dx & v = x \end{array}\right]$

Solución: $F(x) = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

## FUNCIÓNS RACIONAIS

16. $\displaystyle\int \frac{x+5}{x+1}dx$

**Solución:**

$$\int \frac{x+5}{x+1}dx = \int \left(1 + \frac{4}{x+1}\right) dx = x + \ln|x+1| + C$$

17. $\displaystyle\int \frac{2x+8}{x-4}dx$

**Solución:**

$$\int \frac{2x+8}{x-4}dx = \int \left(2 + \frac{16}{x-4}\right) dx = 2x + 16\ln|x-4| + C$$

18. $\displaystyle\int \frac{x^3+2x+8}{x+2}dx$

**Solución:**

$$\int \frac{x^3+2x+8}{x+2}dx = \int \left(x^2-2x+6+\frac{0}{x+2}\right)dx = \frac{1}{3}x^3-x^2+6x+C$$

19. $\displaystyle\int \frac{5}{x^2-9}dx$

**Solución:**

$$\int \frac{5}{x^2-9}dx = \int \left(\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-3}\right)dx$$

Resolvemos e temos que: $A=-\frac{5}{6}, B=\frac{5}{6}$

Solución: $F(x)=\frac{5}{6}\left(-\ln(x+3)+\ln(x-3)\right)+C=\frac{5}{6}\ln\frac{x-3}{x+3}+C$

20. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-4x}dx$

**Solución:**

$$\int \frac{1}{x^3-4x}dx = \int \left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}\right)dx$$

Resolvemos e temos que: $A=\frac{1}{4}, B=\frac{1}{8}, C=\frac{1}{8}$

Solución: $F(x)=\frac{1}{4}\ln x+\frac{1}{8}\ln(x+2)+\frac{1}{8}\ln(x-2)+C$

21. $\displaystyle\int \frac{3}{x^2(x+4)}dx$

**Solución:**

$$\int \frac{3}{x^2(x+4)}dx = \int \left(\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+4}\right)dx$$

Resolvemos e temos que: $A=\frac{3}{4}, B=-\frac{3}{16}, C=\frac{3}{16}$

Solución: $F(x)=\frac{3}{4x}-\frac{3}{16}\ln x+\frac{3}{16}\ln(x+4)+C$

22. $\displaystyle\int \frac{5x^2}{x^2-8}dx$

**Solución:**

$$\int \frac{5x^2}{x^2-8}dx = \int \left(5+\frac{40}{x^2-8}\right)dx =$$
$$= 5x + \int \frac{40}{x^2-8}dx = 5x + \int \left(\frac{A}{x+\sqrt{8}} + \frac{B}{x-\sqrt{8}}\right)dx$$

Resolvemos e temos que: $A=-5\sqrt{2}$, $B=5\sqrt{2}$

Solución: $F(x) = 5x - 5\sqrt{2}\ln(x+\sqrt{8}) + 5\sqrt{2}\ln(x-\sqrt{8}) + C =$

$= 5\left(x - \sqrt{2}\left(\ln(x+\sqrt{8}) + \ln(x-\sqrt{8})\right)\right) + C =$

$= 5\left(x - \sqrt{2}\left(\ln\left(x^2-8\right)\right)\right) + C$