

1. **Extraordinaria 2025.** Dada a función:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{4x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{1+x} & \text{se } 0 \leq x \end{cases}$$

pídese responder as seguintes cuestións:

- Estudie a continuidade da función $f(x)$ en $x = 0$.
- Estudie a derivabilidade da función $f(x)$ en $x = 0$.
- Calcule a ecuación da recta tanxente á curva $f(x)$ en $x = -1$.

Solución:

a) Para que sexa continua o límite pola esquerda e o límite pola dereita deben coincidir entre eles e tamén co valor da función no punto.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{4x} = 0 \cdot e^{4 \cdot 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \frac{\ln 1}{1} = 0 \equiv f(0)$$

Polo tanto como os límites laterais en $x = 0$ coinciden e coinciden co valor de $f(0)$ a función é continua neste punto.

b) Para que sexa derivable en $x = 0$ os límites laterais da función derivada no punto teñen que coincidir:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{4x} + 4xe^{4x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{\frac{1}{1+x}(1+x) - \ln(1+x)}{(1+x)^2} & \text{se } 0 < x \end{cases} = \begin{cases} e^{4x}(1+4x) & \text{se } x < 0 \\ \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2} & \text{se } 0 < x \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{4x}(1+4x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2} = 1$$

Os límites laterais da función derivada coinciden, podemos definir $f'(x)$ no punto $x = 0$ logo é derivable nese punto.

c) A ecuación da recta tanxente á curva en $x = -1$ é:

$$\begin{aligned} y - f(-1) &= f'(-1)(x - (-1)) \implies y - (-e^{-4}) = -3e^{-4}(x + 1) \implies \\ \implies y &= -3e^{-4}x - 4e^{-4} \implies y = -e^{-4}(3x + 4) \end{aligned}$$

2. **Ordinaria 2025.** Dada a función:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + 2x & \text{se } x \leq 1 \\ x^2 - m & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

pídese responder as seguintes cuestións:

- a) Que condición deben cumprir k e m para que f sexa continua en $x = 1$?
 b) Para que valores de k e m é f derivable en $x = 1$?

Solución:

a) Para que sexa continua o límite pola esquerda e o límite pola dereita deben coincidir entre eles e tamén co valor da función no punto.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} kx^2 + 2x = k + 2 \equiv f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - m = 1 - m$$

Logo temos que a función é continua cando $k + 2 = 1 - m \implies k = -m - 1 = -(m + 1)$.

b) Para que sexa derivable os límites laterais da función derivada nesas punto teñen que coincidir. E como tamén ten que ser continua, imos facer a derivada coa condición que xa sabemos que se ten que cumprir

$$f'(x) = \begin{cases} 2(-(m+1))x + 2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x & \text{se } 1 < x \end{cases} = \begin{cases} (-2m-2)x + 2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x & \text{se } 1 < x \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-2m-2)x + 2 = -2m - 2 + 2 = -2m$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x = 2$$

Logo para que sexa derivable $-2m = 2 \implies m = -1$

E se $m = -1$, entón $k = -(-1 + 1) = 0$

3. **Extraordinaria 2024.** Dada a función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{k - xe^x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

pídese responder as seguintes cuestións:

- a) Cal é o valor de k que fai que f sexa continua en $x = 0$ para calquera valor de b ?

b) Para que valores de b e k é f derivable en $x = 0$?

Solución:

a) Para que a función sexa continua en $x = 0$ os límites laterais teñen que coincidir entre eles e co valor da función no punto.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 + bx - 1 = -1 \equiv f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{k - xe^x}{x} = \pm\infty \text{ (o signo dependerá do valor de } k\text{), salvo que } k = 0 \text{ que nese caso temos unha indeterminación.}$$

Entón, se $k \neq 0$ a función non é continua porque os límites laterais non coinciden. Vexamos que ocorre no caso de que $k = 0$. Para a resolución desta indeterminación aplicaremos a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-xe^x}{x} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-e^x - xe^x}{1} = -1$$

No caso de que $k = 0$, os límites laterais no punto $x = 0$ coinciden e ademais coinciden con $f(0)$, logo a función é continua nese punto.

b) Para que sexa derivable ten que ser continua, co cal, $k = 0$ e a función queda simplificada deste xeito:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & \text{se } x \leq 0 \\ -e^x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Ambas partes son derivables nos seus intervalos abertos, temos entón:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + b & \text{se } x < 0 \\ -e^x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Para que sexa derivable en $x = 0$ os límites laterais de $f'(x)$ teñen que coincidir.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x + b = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -e^x = -1$$

Os límites laterais coinciden se $b = -1$. Polo tanto para que a función sexa derivable en $x = 0$, ten que ser $k = 0, b = -1$.

4. **Ordinaria 2024.** Responde aos seguintes apartados:

a) Enuncie os teoremas (TEMA REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES) e de Bolzano

b) (TEMA INTEGRAIS)

Solución:

a) Teorema de Bolzano: Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é continua en $[a, b]$ e toma valores de distinto signo nos extremos do intervalo, é dicir, $f(a) \cdot f(b) < 0$, entón existe algún $c \in (a, b)$, tal que $f(c) = 0$.

5. **Ordinaria 2024.** Calcule os seguintes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2}$

Solución:

Nos dous casos temos indeterminacións nos límites de tipo 0/0. Aplicaremos a regra de L'Hôpital para a resolución destes límites.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \ln(1+x)}{x \sin x} &=_{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \frac{1}{1+x}}{\sin x + x \cos x} =_{L'H} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + \frac{1}{(1+x)^2}}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x^2} &=_{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} \cdot \cos x - e^x}{2x} =_{L'H} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} \cdot (\cos x)^2 - e^{\sin x} \cdot \sin x - e^x}{2} = \frac{1 - 0 - 1}{2} = 0 \end{aligned}$$

6. **Ordinaria 2023.** a) Se $f(x) = ae^x + b$, diga que valores deben ter a e b para que se cumpran $f(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$.

b) (TEMA REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES)

Solución:

a) $f(0) = ae^0 + b = a + b = 0 \implies a = -b$

Para o límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ temos unha indeterminación do tipo 0/0, xa que $f(0) = 0$. Aplicamos a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} =_{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} ae^x = a$$

Como queremos que o límite sexa 3, entón $a = 3$, polo tanto $b = -3$.

7. **Extraordinaria 2022.** a) Obteña as coordenadas dos vértices do triángulo rectángulo cuxa hipotenusa é tanxente á gráfica de $f(x) = x^2$ no punto de abscisa $x = 2$ e que, ademais, ten un cateto de lonxitude 2 situado sobre o eixe X . Debuxe a gráfica de $f(x)$, a recta tanxente e o triángulo.

b) Ache os valores de a e b que fan que a función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 1 \\ ax^2 + bx & \text{se } x > 1 \end{cases}$ sexa derivable.

Solución:

a) $f(x) = x^2, f'(x) = 2x$

A recta tanxente en $x = 2$ é:

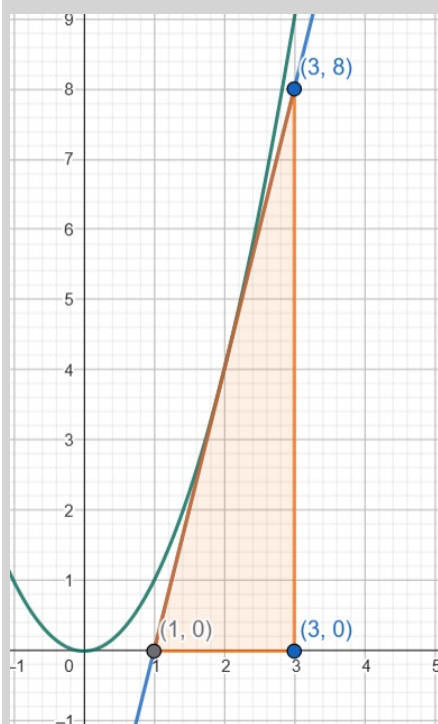
$$y - f(2) = f'(2)(x - 2) \implies y - 4 = 4(x - 2) \implies y = 4x - 4$$

Se o cateto está sobre o eixe X un dos vértices será o punto de corte da recta tanxente co eixe.

Corte da recta co eixe X é: $4x - 4 = 0 \implies x = 1$.

Se o cateto situado no eixe X ten lonxitude dous, é un punto do extremo é $x = 1$ o outro ten que ser $x = 3$.

O que nos da o seguinte debuxo, no que están marcadas as coordenadas do triángulo:



Tamén poderíamos ter o triángulo que se forma se debuxamos o cateto hacia a esquerda do $x = 1$, nese caso o outro vértice estaría en $x = -1$ polo que a coordenada sería $(-1, 0)$ e o terceiro vértice sería o punto da recta tanxente en $x = -1$, que é o punto de coordenadas $(-1, -8)$.

b) A función é derivable en $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$ xa que se trata dunha función constante e unha polinómica e son derivables. Logo so temos que analizar que

pasa en $x = 1$.

Primeiro vexamos para que valores a función é continua en $x = 1$, para iso os límites laterais da función no punto teñen que coincidir:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = 1 \equiv f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 + bx = a + b$$

Para que a función sexa continua en $x = 1$ temos que $1 = a + b \implies b = 1 - a$

Analizamos agora a función derivada tendo en conta iste resultado:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ 2ax + (1 - a) & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Para que sexa derivable os límites laterais de $f'(x)$ teñen que coincidir:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2ax + (1 - a) = 2a + 1 - a$$

Para que os límites laterais sexan iguais $a + 1 = 0 \implies a = -1$, logo teríamos que $b = 1 - (-1) = 2$.

A función é derivable en todo $\mathbb{R}$ para $a = -1$ e $b = 2$.

8. **Ordinaria 2022.** a) Calcule os límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x}$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$, onde $\ln x$ é o logaritmo neperiano de x .

b) (TEMA REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES)

Solución:

a) No caso do primeiro límite temos unha indeterminación do tipo $0/0$, imos aplicar L'Hôpital para a súa resolución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x} =_{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x}{\cos x} = \frac{1 - 0}{1} = 1$$

No segundo caso temos unha indeterminación $0 \cdot \infty$, transformamos o límite para ter unha indeterminación do tipo ∞/∞ e aplicamos L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} =_{L'H} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

9. **Extraordinaria 2021.** a) Enuncie o teorema de Bolzano.

b) (TEMA REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES)

Solución:

a) Teorema de Bolzano: Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é continua en $[a, b]$ e toma valores de distinto signo nos extremos do intervalo, é dicir, $f(a) \cdot f(b) < 0$, entón existe algún $c \in (a, b)$, tal que $f(c) = 0$.

10. **Extraordinaria 2020** Determine os valores de a e b que fan que a función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a - \cos x}{x} & \text{se } x < 0 \\ bx & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{sexa, primeiro continua, e logo derivable.}$$

Solución:

Nos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ a función é continua e derivable posto que no primeiro trozo o denominador non se anula e no segundo trozo a función é polinómica.

Polo que só estudiamos o caso $x = 0$. Para que sexa continua os límites laterais teñen que coincidir e tamén coincidir co valor da función no punto.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a - \cos x}{x} = \pm\infty$, dependendo do valor de a e se $a \neq 1$. Se $a = 1$ temos unha indeterminación.

Nos casos nos que $a \neq 1$ a función non vai ser continua, porque non vai coincidir co valor da función no punto. Analizamos entón que ocorre para $a = 1$. Indeterminación que resolvemos aplicando L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos x}{x} =_{L'H} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{1} = 0$$

Analizamos o límite pola dereita, que é ademais o valor da función no punto.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} bx = 0 \equiv f(0).$$

Logo para que a función sexa continua, b pode tomar calquer valor e $a = 1$.

Para que sexa derivable ten que ser continua, polo que xa consideramos $a = 1$.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\sin x \cdot x - (1 - \cos x)}{x^2} & \text{se } x < 0 \\ b & \text{se } x > 0 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} \frac{x \sin x + \cos x - 1}{x^2} & \text{se } x < 0 \\ b & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Analizamos agora os límites laterais de $f'(x)$ en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \sin x + \cos x - 1}{x^2} =_{L'H} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x + x \cos x - \sin x}{2x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

O límite pola dereita é $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = b$

Para que sexan iguais teñen que coincidir, logo $b = \frac{1}{2}$.

De xeito que para que a función sexa continua e derivable ten que ser $a = 1$ e $b = \frac{1}{2}$.

11. **Ordinaria 2020** a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + 2x - e^{2x}}$.
b) (TEMA REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES)

Solución:

a) Este límite no punto indicado é unha indeterminación do tipo $0/0$, polo que aplicamos L'Hôpital para resolvela.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + 2x - e^{2x}} &=_{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x (-\sin x)}{2 - 2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x \cdot \sin x}{1 - e^{2x}} =_{L'H} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin x + (-\cos x) \cdot \cos x}{-2e^{2x}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

12. **Ordinaria 2020** a) Calcule os valores b e c para que a función

$$f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + bx + c & \text{se } x > 0 \end{cases}$$
 sexa, primeiro continua, e logo derivable en $x = 0$.
 b) (TEMA INTEGRAIS)

Solución:

a) Para que sexa continua en $x = 0$ os límites laterais teñen que coincidir entre eles e coincidir co valor da función no punto.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{2x} = 1 \equiv f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + bx + c = c.$$

Polo tanto para que a función sexa continua en $x = 0$, ten que cumprirse que $1 = c$.

Vexamos agora a derivabilidade:

$$f'(x) = \begin{cases} 2e^{2x} & \text{se } x < 0 \\ 2x + b & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Para que sexa derivable en $x = 0$ os límites laterais da función derivada nese punto teñen que coincidir:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2e^{2x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x + b = b.$$

Polo que para que a función sexa derivable en $x = 0$, ten que ser $b = 2$ e $c = 1$