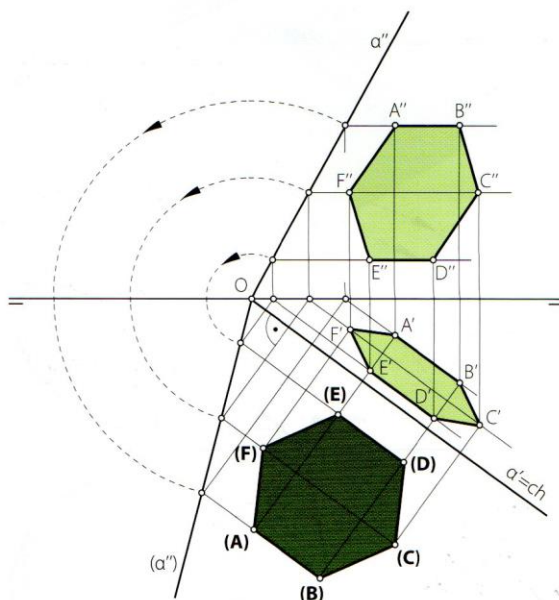


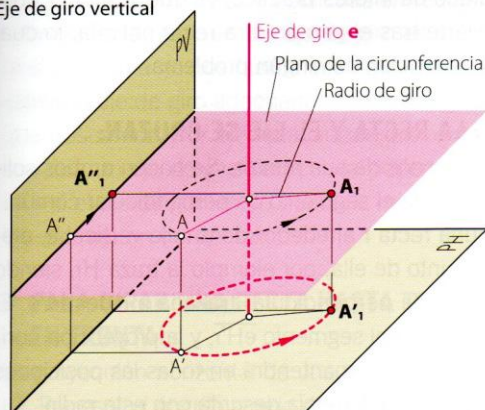
Este diagrama ilustra la construcción de las proyecciones de un hexágono en un sistema de ejes de coordenadas. El hexágono original está en una posición oblicua. Se muestran sus proyecciones sobre el plano horizontal de referencia ($\alpha' = ch$) y el plano vertical de referencia (α''). Las líneas de construcción, como las líneas de abatimiento y las líneas de proyección, están representadas por líneas punteadas y sólidas. Los puntos de vértice están etiquetados con letras mayúsculas y primadas para indicar sus respectivas proyecciones.



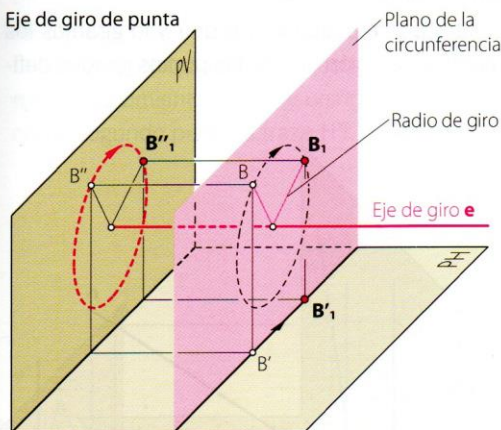
108

- Eje vertical, que es una recta vertical (perpendicular al PH).
- Eje de punta, que es una recta de punta (perpendicular al PV).

Eje de giro vertical



Eje de giro de punta



e Eje de giro

A₁ Punto girado

A₂ Punto girado

r₁ Recta girada

r₂ Recta girada

a₁ Plano girado

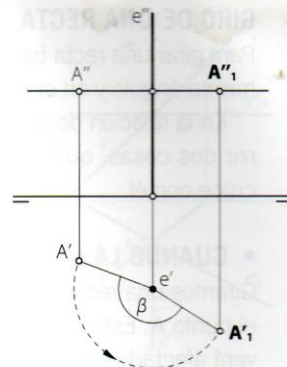
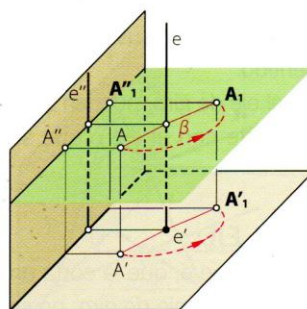
a₂ Plano girado

Y lo mismo ocurre con las proyecciones de puntos rectas y trazas: **A'₁, r'₁, H'r₁, a''₁**, etc

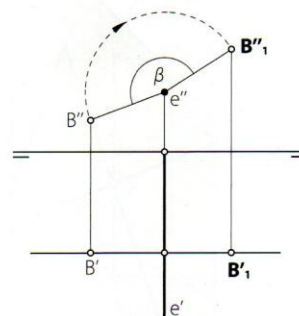
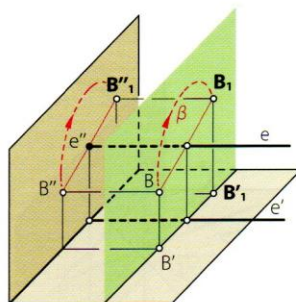
Si en un mismo ejercicio o problema realizamos más de un giro, indicaremos con el subíndice 2 el segundo giro.

GIRO DE UN PUNTO

Si giramos un punto alrededor de un eje vertical, la proyección horizontal se mueve según una circunferencia de radio la distancia del eje al punto. La proyección vertical se mueve paralelamente a LT.

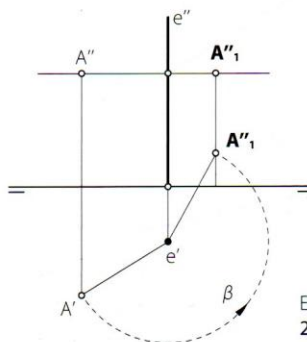


Si giramos un punto alrededor de un eje de punta, la proyección vertical se mueve según una circunferencia de radio la distancia del eje al punto. La proyección horizontal se desplaza paralelamente a LT.



En ambos tipos de giro, el radio, que es la distancia del eje al punto a girar, se tiene en verdadera magnitud; si usamos un eje vertical, en su proyección sobre el PH, y si se trata de un eje de punta en su proyección sobre el PV.

Girando puntos podemos pasar sus proyecciones de un cuadrante a otro.



En este giro el punto A pasa del 1ºD al 2ºD mediante el uso de un eje vertical.

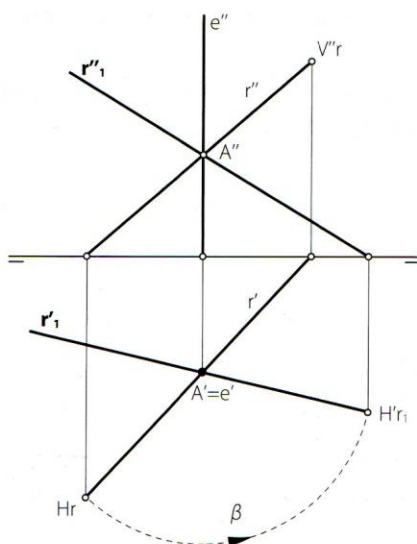
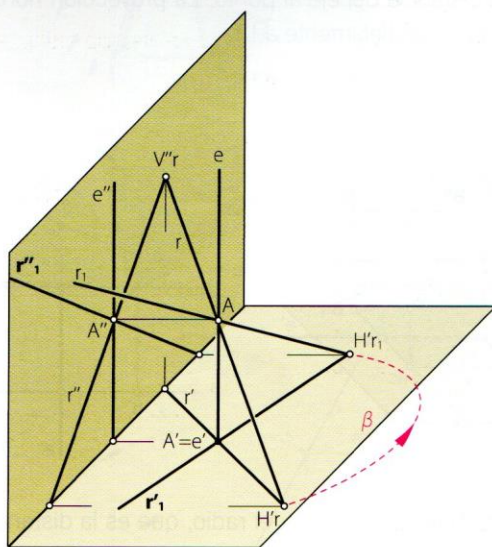
GIRO DE UNA RECTA

Para girar una recta bastará con girar dos de sus puntos, el mismo ángulo y en el mismo sentido.

En la relación de la recta con el eje de giro, pueden ocurrir dos cosas; que la recta se corte con el eje o que se cruce con él.

• CUANDO LA RECTA CORTA EL EJE:

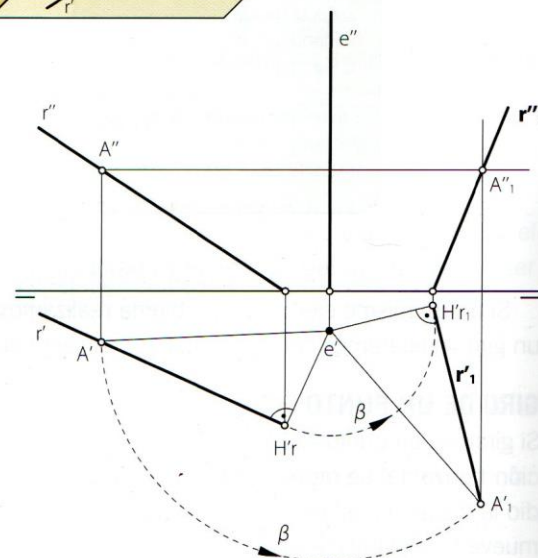
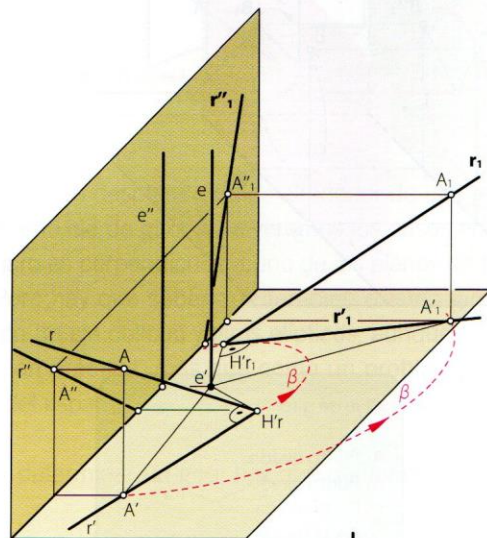
Giramos una recta r alrededor de un eje e , que la corta en el punto A . Este punto, por pertenecer al eje de giro, no se verá afectado por el movimiento y permanecerá en la misma posición, así que basta con girar otro punto cualquiera de la recta, que bien puede ser una traza, en la dirección y los grados que se indiquen, para que la recta girada r''_1 - r'_1 quede definida.



Este giro carece de interés práctico, ya que la recta r oblicua se convierte tras el giro en otra recta oblicua, lo cual no facilita la resolución de ningún problema.

• CUANDO LA RECTA Y EL EJE SE CRUZAN:

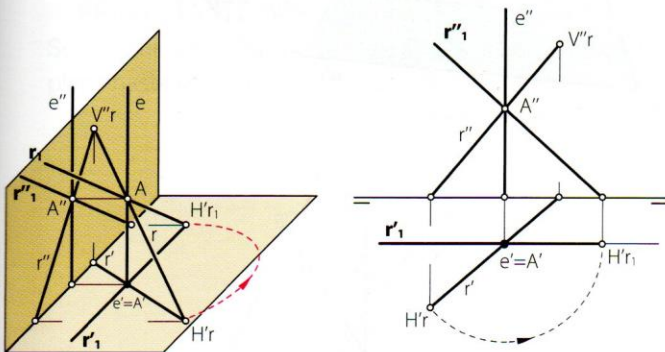
- Hay que girar dos de sus puntos. Se hacen ambos solidarios, mediante el segmento de perpendicular común.
- Giramos una recta r alrededor de un eje vertical e , elegimos un punto de ella, por ejemplo la traza Hr , siendo ésta el pie de la perpendicular trazada a r desde e . El radio de giro será el segmento $e'H'r$, y la proyección horizontal de la recta se mantendrá en todas las posiciones tangente a la circunferencia descrita con este radio.
- Luego la proyección horizontal de la recta girada ha de ser perpendicular al radio $e'H'r_1$.
- Tomamos otro punto cualquiera A de r y lo giramos los mismos grados. La unión de los dos puntos girados define la recta.



Para transformar rectas oblicuas en rectas horizontales o frontales la elección del eje de giro es muy importante. Si el problema no nos facilita ese dato, debemos elegir nosotros el eje de giro adecuado para conseguir el resultado que buscamos. Por ejemplo, supongamos una recta oblicua con un eje de giro vertical, la podemos colocar frontal y si el eje de giro es de punta, la misma recta se puede transformar en horizontal.

• PARA GIRAR UNA RECTA HASTA TRANSFORMARLA EN FRONTAL:

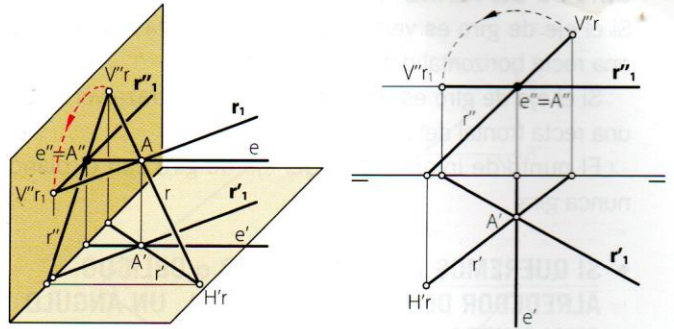
La proyección horizontal de una recta frontal es paralela a LT. Por eso, el ángulo girado debe ser el que permita colocar la proyección horizontal de la recta paralela a LT. En el dibujo consideramos un eje de giro e vertical que corta a la recta dada r en un punto A que permanecerá inmóvil; basta con girar otro punto de la recta, hasta que quede con el mismo alejamiento que A , y unirlos. En este caso tomamos como segundo punto la traza $H'r$.



Recta oblicua transformada en frontal mediante un giro con eje vertical.

• PARA GIRAR UNA RECTA HASTA TRANSFORMARLA EN HORIZONTAL:

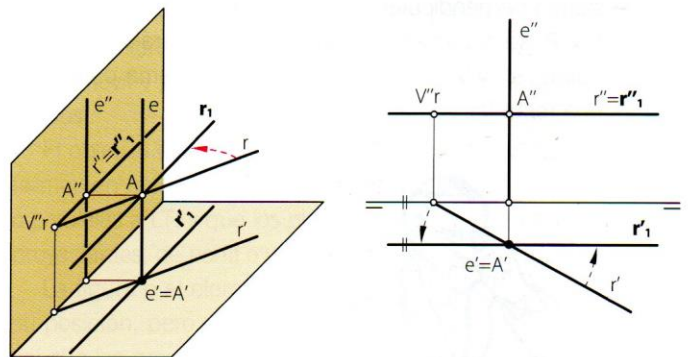
La proyección vertical de una recta horizontal es paralela a LT, así que debemos girar la recta dada el ángulo que permite colocar la proyección vertical paralela a LT. Necesitamos un eje perpendicular al PV, es decir, un eje de punta, que cortará a la recta en un punto A . Se girará otro punto de la recta hasta que alcance la misma cota que A ; en este caso, la traza vertical $V''r$. Se unen ambos puntos y la recta horizontal queda determinada.



Recta oblicua transformada en horizontal mediante un giro con eje de punta.

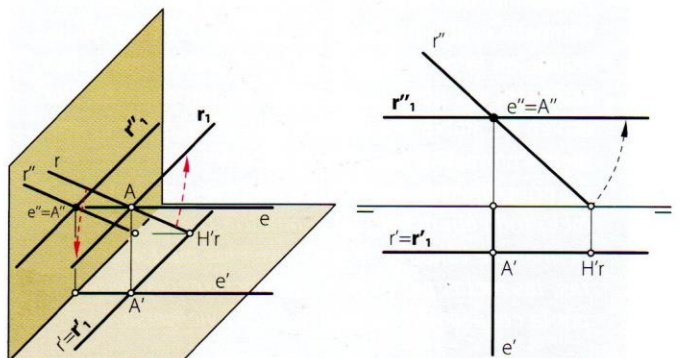
• TRANSFORMAR UNA RECTA HORIZONTAL EN PARALELA A LT:

Las proyecciones de r''_1 y r'_1 deben ser paralelas a LT y pasar por A'' y A' respectivamente.



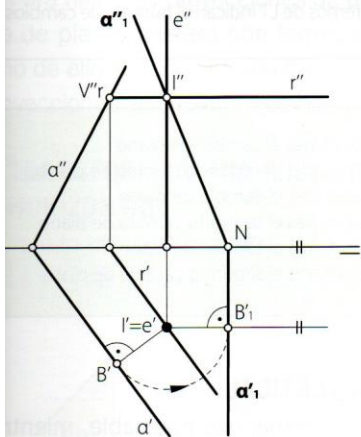
• TRANSFORMAR UNA RECTA FRONTAL EN PARALELA A LT:

Las proyecciones de r''_1 y r'_1 deben ser paralelas a LT y pasar por A'' y A' respectivamente.



PARA TRANSFORMAR UN PLANO OBLICUO α EN PROYECTANTE VERTICAL:

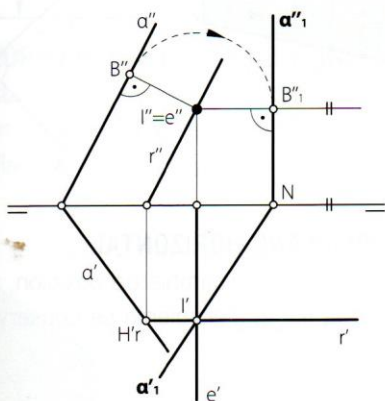
se toma un eje vertical y se gira la traza horizontal del plano α hasta que adopte la posición perpendicular a LT.



El radio de giro se coloca paralelo a LT para que el plano α quede perpendicular al PV.

PARA TRANSFORMAR UN PLANO OBLICUO α EN PROYECTANTE HORIZONTAL:

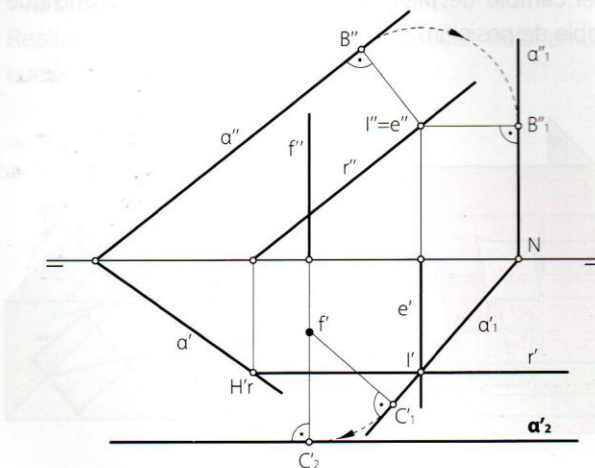
se toma un eje de giro de punta y se gira la traza vertical del plano hasta situarla perpendicular a LT.



El radio de giro se coloca paralelo a LT para que el plano α sea perpendicular al PH.

PARA TRANSFORMAR UN PLANO OBLICUO EN PARALELO A UNO DE LOS PLANOS DE PROYECCIÓN:

Serán necesarios dos giros. El primero para colocar el plano oblicuo como plano proyectante con un eje de giro de punta y el segundo, con un eje de giro vertical, para colocarlo como plano paralelo al PV en este caso.



7.2.3. CAMBIOS DE PLANO

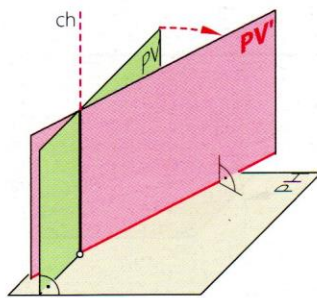
Las operaciones de cambios de plano consisten en cambiar de un lugar a otro uno de los planos de proyección, colocándolo de la forma más útil para nuestros fines, quedando el otro inmóvil y guardando siempre la perpendicularidad entre los dos.

El objetivo es conseguir que las rectas oblicuas se transformen en horizontales, frontales, rectas de punta, verticales o paralelas a LT, y que los planos oblicuos se transformen en proyectantes, de perfil o paralelos a los planos de proyección.

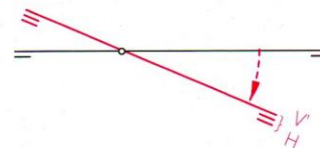
La figura o el elemento que hay en el espacio mantiene su posición, pero uno de los planos de proyección cambia, así que las proyecciones sobre este plano también cambiarán. Los planos de proyección se cambian uno a uno y nunca los dos a la vez.

CAMBIO DE PLANO VERTICAL

En el cambio de plano vertical es el PV el plano que cambia de posición.



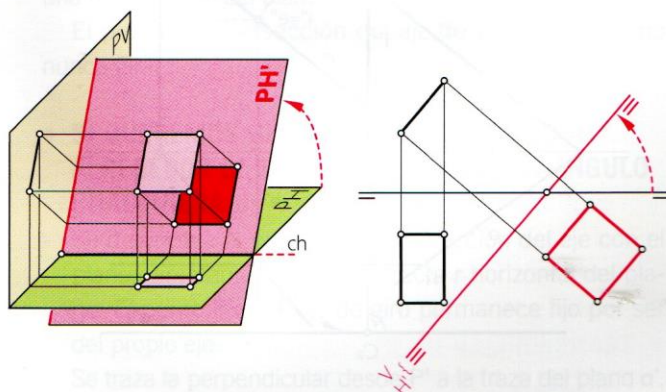
Ejemplo de cambio de PV



Nueva LT tras el cambio de plano

CAMBIO DE PLANO HORIZONTAL

En el cambio de plano horizontal es el PH el plano que cambia de posición.

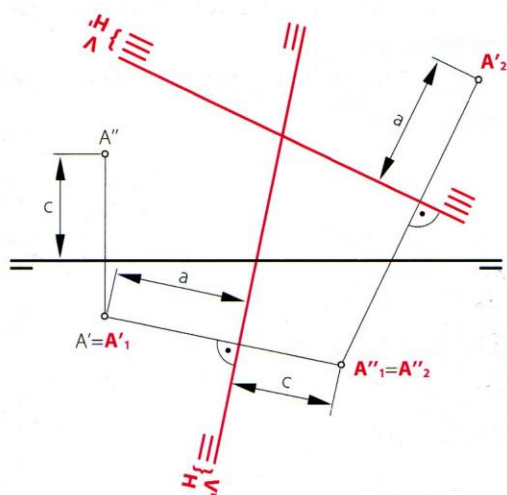


Con este cambio de PH conseguimos colocar el PH paralelo al cuadrado y obtener su nueva proyección horizontal en verdadera magnitud.

NOTACIÓN

La nueva LT se designa con dos particularidades:

- 1.º En el primer cambio de plano tiene dos trazos en sus extremos en lugar de uno. Si se hiciera un segundo cambio de plano, serían necesarios tres trazos, y así sucesivamente. Aunque es poco común necesitar más de dos cambios de plano para la resolución de un ejercicio.
- 2.º El cambio de plano se indica con una llave } en un lado de LT, seguida de V sobre H y un apóstrofe sobre la letra del plano cambiante (V'H para el PV o VH' para el PH).



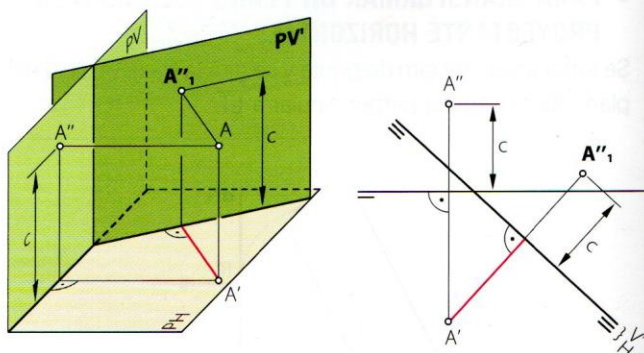
	en el PV	en el PH
1º cambio plano	$\equiv \text{V}'_H$	$\equiv \text{V}'_H$
2º cambio plano	$\equiv \text{V}'_H$	$\equiv \text{V}'_H$

• El plano cambiado es el que tiene el símbolo prima.
• Los trazos debajo y a los extremos de LT indican el número de cambios de plano.

A'_1 y A''_1 Nuevas proyecciones tras el cambio de plano
 A'_2 y A''_2 Nuevas proyecciones tras el segundo cambio de plano
 r'_1 y r''_1 Nuevas proyecciones tras el cambio de plano
 r'_2 y r''_2 Nuevas proyecciones tras el segundo cambio de plano
 α'_1 y α''_1 Nuevas proyecciones tras el cambio de plano
 α'_2 y α''_2 Nuevas proyecciones tras el segundo cambio de plano

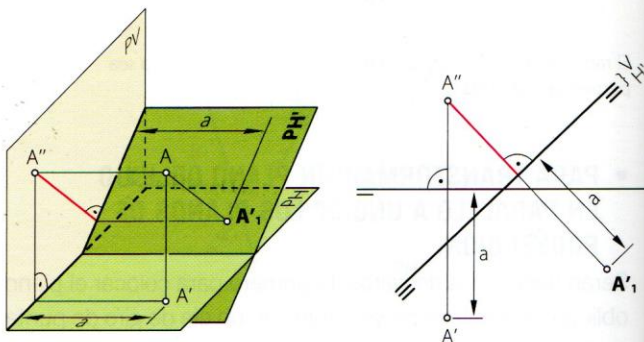
• CAMBIO DE PLANO VERTICAL:

La proyección horizontal permanece invariable, mientras que la vertical cambia de posición. De esta manera, la cota se conserva y el alejamiento cambia.



• CAMBIO DE PLANO HORIZONTAL:

La proyección vertical no cambia de posición, pero la horizontal sí. Por tanto, el alejamiento se conserva y la cota varía.



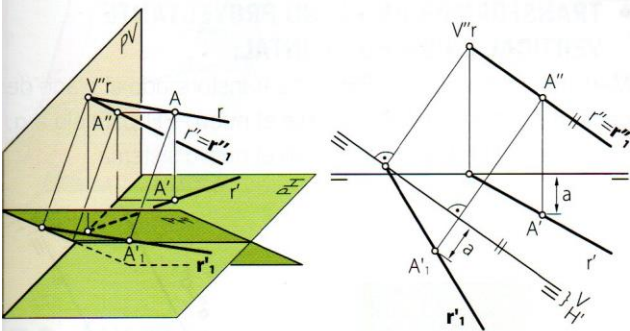
LOS CAMBIOS DE PLANO EN LA RECTA

Los cambios de plano nos sirven para transformar rectas oblicuas en rectas horizontales, frontales, de punta, verticales y paralelas a LT, y poder trabajar así con verdaderas magnitudes.

Para hallar las proyecciones de una recta r tras un cambio de plano, bastará con tomar dos puntos de la recta (uno de ellos puede ser una traza), y encontrar sus nuevas proyecciones en el plano que ha cambiado.

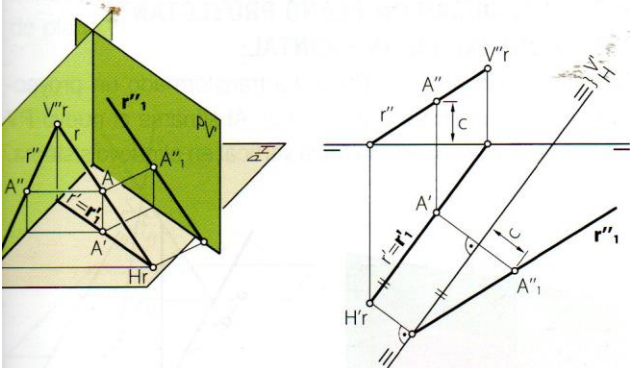
• TRANSFORMAR UNA RECTA OBLICUA EN HORIZONTAL:

Se realiza un cambio de PH, tal que, la nueva LT sea paralela a r'' y se hallan las nuevas proyecciones horizontales.



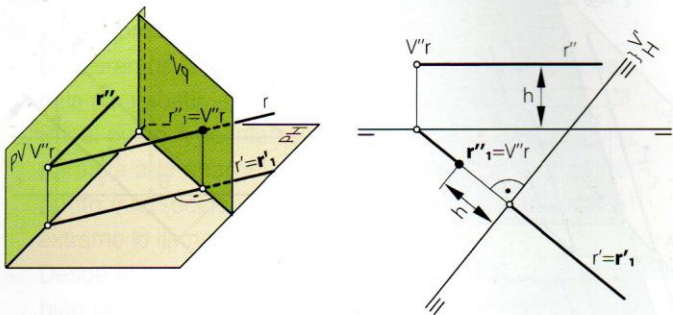
• TRANSFORMAR UNA RECTA OBLICUA EN FRONTAL:

Se realiza un cambio de PV, tal que la nueva LT sea paralela a r' y se hallan las nuevas proyecciones verticales.



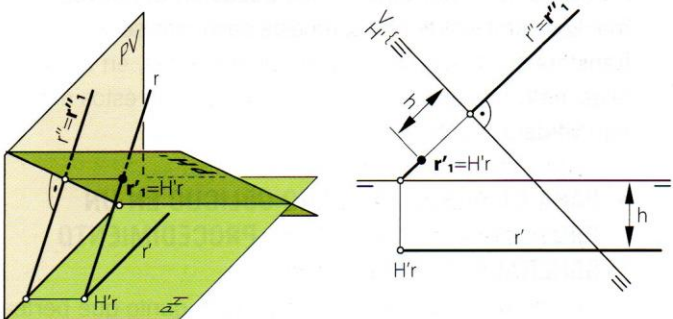
• TRANSFORMAR UNA RECTA HORIZONTAL EN UNA DE PUNTA:

Realizaremos un cambio del plano vertical. Colocamos la nueva LT perpendicular a r' .



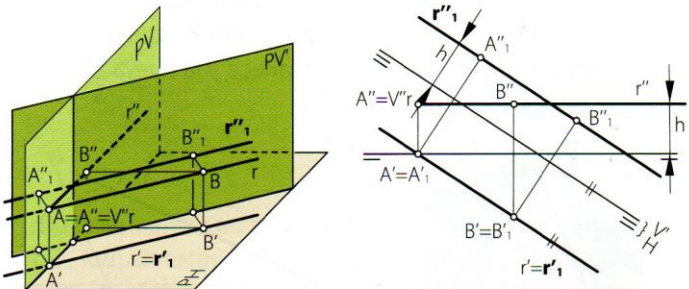
• TRANSFORMAR UNA FRONTAL EN UNA VERTICAL:

Realizamos un cambio de plano horizontal. La nueva LT será perpendicular a r'' .



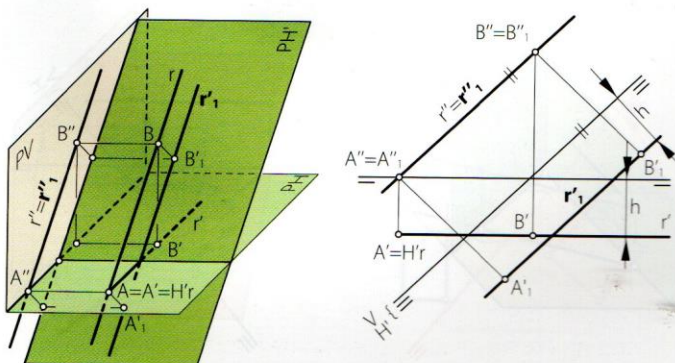
• TRANSFORMAR UNA RECTA HORIZONTAL EN UNA PARALELA A LT:

Mediante un cambio de PH situaremos la nueva LT paralela a r' .



• TRANSFORMAR UNA RECTA FRONTAL EN UNA PARALELA A LT:

Mediante un cambio de PH situaremos la nueva LT paralela a r'' .

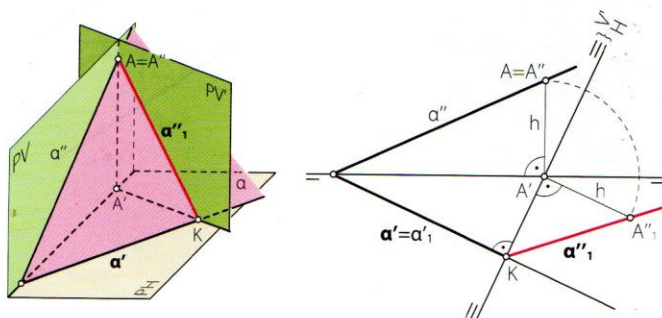


LOS CAMBIOS DE PLANOS EN LOS PLANOS

La representación de un plano viene dada por sus trazas. Si modificamos el sistema de planos de proyección, es preciso determinar otra vez las trazas en el nuevo sistema. Los cambios de plano, en este caso, nos servirán para transformar planos oblicuos en proyectantes, en horizontales, en frontales y en paralelos a LT, ya que éstos muestran verdaderas magnitudes.

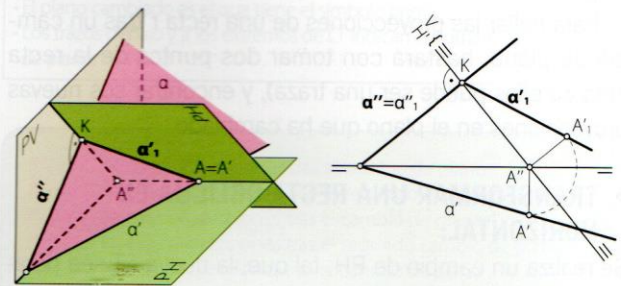
• PARA CAMBIAR UN PLANO OBLICUO EN UN PROYECTANTE VERTICAL EL PROCEDIMIENTO GENERAL ES EL SIGUIENTE:

- Se determina un punto A (es el único punto que pertenece a las dos trazas verticales α'' y α''_1) contenido en la traza del plano que varía, y a partir de su proyección horizontal A' se traza la nueva LT perpendicular a la traza horizontal del plano.
- Se determina la nueva proyección vertical del punto A tras el cambio de plano tal y como hemos visto anteriormente.
- La nueva traza del plano pasará por esa nueva proyección del punto, partiendo del punto K, que es la intersección de la traza que permanece y la nueva LT.



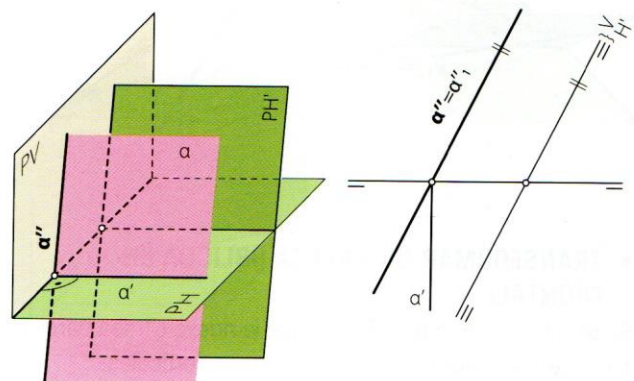
• TRANSFORMAR UN PLANO OBLICUO EN UN PROYECTANTE HORIZONTAL

Se efectuará en este caso un cambio de PH con la nueva LT perpendicular a la traza α'' del plano.



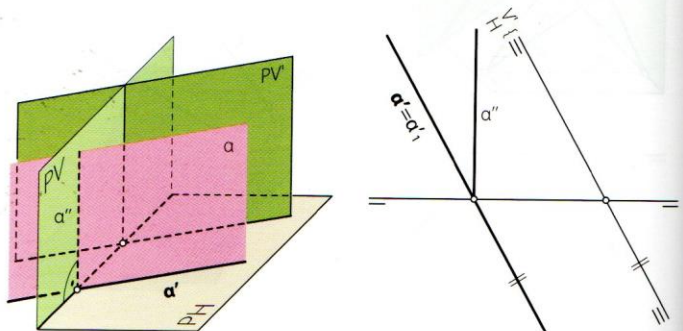
• TRANSFORMAR UN PLANO PROYECTANTE VERTICAL EN UN HORIZONTAL:

Mediante un cambio de PH se ha transformado el plano de canto α en horizontal. Al situarse el nuevo PH paralelo a α , desaparece la traza horizontal en el nuevo sistema.



• TRANSFORMAR UN PLANO PROYECTANTE HORIZONTAL EN UN FRONTAL:

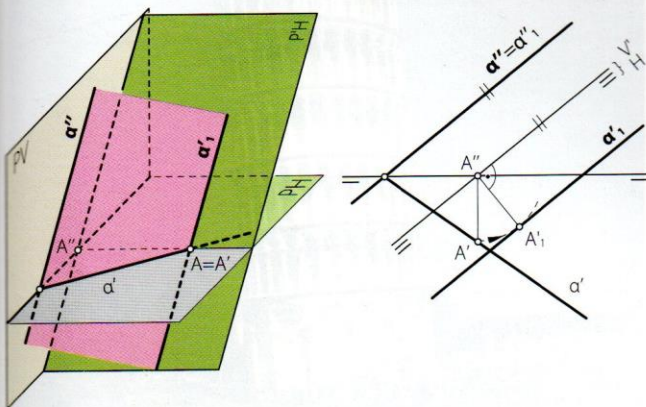
Mediante un cambio de PV se ha transformado un proyectante horizontal en un plano frontal. Al situarse el nuevo PV paralelo a α , desaparece la traza vertical en el nuevo sistema.



• TRANSFORMAR UN PLANO OBLICUO EN UNO PARALELO A LT:

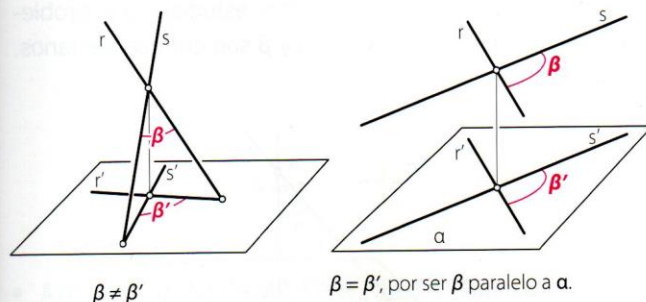
Mediante un cambio de PH hemos transformado el plano oblicuo α , en paralelo a LT, situando la nueva línea de tierra paralela a α'' .

También podemos transformar un plano oblicuo en paralelo a LT con un cambio de PV, situando la nueva LT paralela a α' .



7.3. ÁNGULOS

Salvo en el caso de que un ángulo esté contenido en un plano paralelo al de proyección, no resulta proyectado en su verdadera magnitud. Por ello, hay que realizar un cambio de posición para situarlo paralelo o contenido en uno de los planos de proyección. Esto se consigue casi exclusivamente por medio de los abatimientos, aunque en determinados casos puede resolverse aplicando giros o cambios de plano.



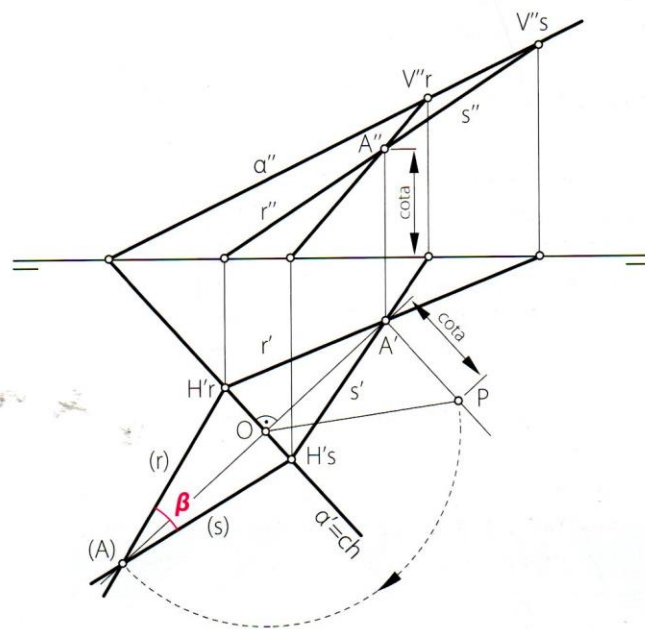
7.3.1. ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

Como ya sabemos dos rectas pueden cruzarse o cortarse.

• ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS QUE SE CORTAN:

Para hallar el ángulo β que forman dos rectas r y s que se cortan, basta con dibujar un plano α que las contenga y abatirlo sobre un plano de proyección.

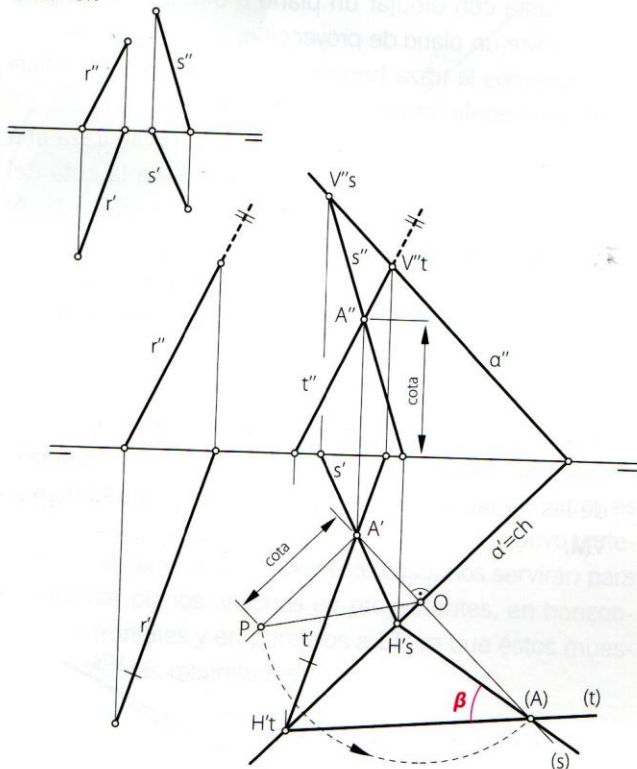
- Utilizaremos la traza horizontal del plano α como charnela para abatir las rectas dadas sobre PH.
- Por el punto A de intersección de las rectas se traza una paralela a la charnela y sobre ella se lleva la cota del punto intersección, hacia la derecha o la izquierda. Al extremo lo llamaremos P.
- Desde el mismo punto A de intersección se traza también una perpendicular a la charnela que cortará a ésta última en el punto O.
- Con centro en O y radio $\overline{OP}$ se traza un arco que corta a la perpendicular anterior en el punto (A) abatido.
- Uniendo el punto (A) abatido con las trazas horizontales de las rectas dadas, se verá el ángulo β que forman en VM.



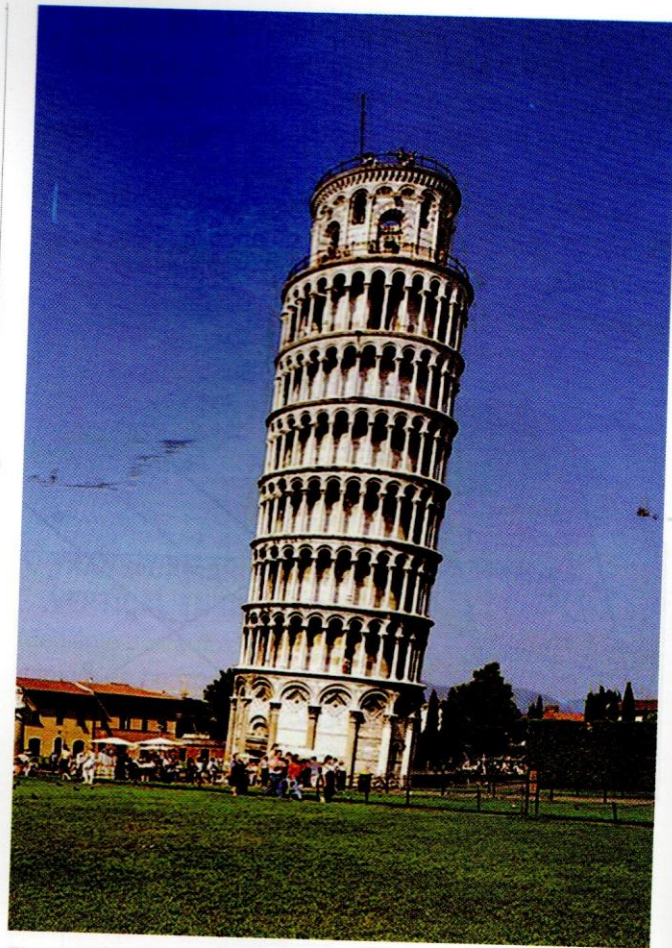
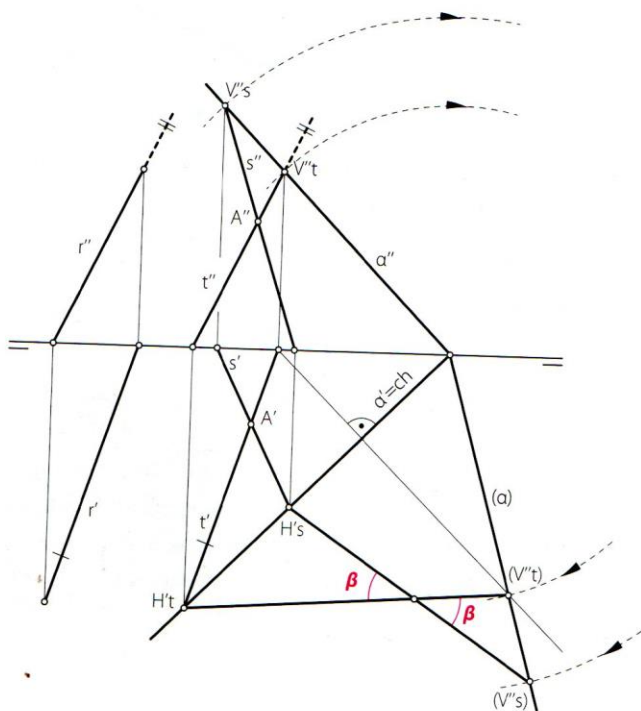
De esta manera se podrá obtener la bisectriz del ángulo que forman estas dos rectas, trazándola sobre el ángulo abatido. Si las trazas del plano que contiene a las rectas no se pudieran hallar, se abatirían las dos rectas sobre un plano horizontal auxiliar.

• ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS r Y s QUE SE CRUZAN:

Por un punto cualquiera A de una de las rectas trazamos la paralela a la otra, siendo el ángulo que forman el requerido, hallándose la verdadera magnitud como en el caso anterior.



También podemos abatir α y junto con él las rectas s y t , para observar el ángulo que forman en VM.

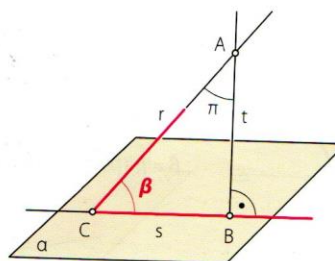


TORRE DE PISA.

7.3.2. ÁNGULO ENTRE RECTA Y PLANO

El ángulo que forma una recta r con un plano α es el ángulo agudo que forma la recta r con su proyección ortogonal sobre dicho plano.

Para hallar el ángulo β que forman r con α , por un punto cualquiera A de la recta r , se traza una perpendicular a α ; así se formará el triángulo rectángulo $A-B-C$. Se halla el ángulo π por el procedimiento antes estudiado y el problema queda resuelto puesto que π y β son complementarios. $\beta = 90^\circ - \pi$.

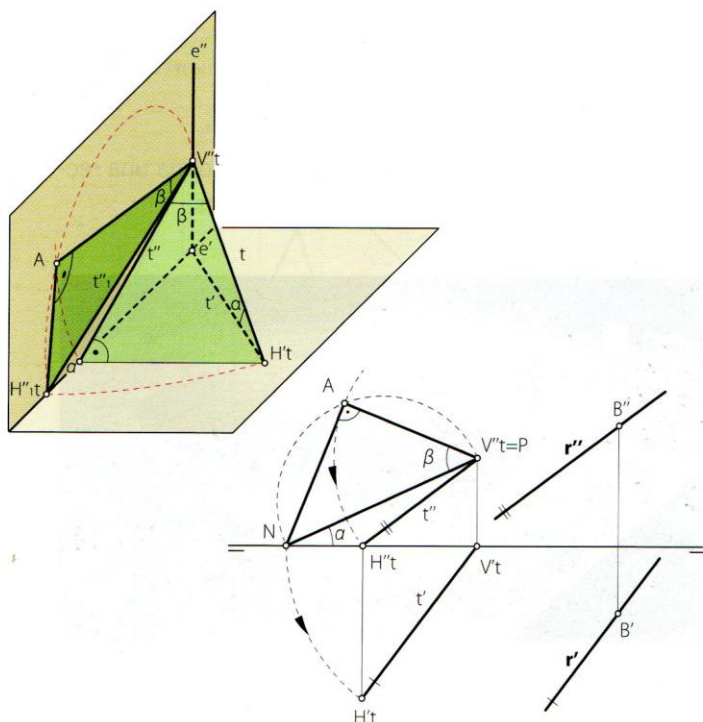


• TRAZAR UNA RECTA QUE FORME UN ÁNGULO α CON EL PH Y UN ÁNGULO β CON EL PV:

- Para trazar una recta t que forme un ángulo α con el PH y un ángulo β con el PV se gira la recta alrededor del eje vertical e hasta el PV
- El ángulo que forma la recta t girada, t'' , con la línea de tierra es el ángulo α que forma la recta t con el PH.
- El ángulo β es el formado por t y la proyección vertical de la recta t'' , que se observa en el triángulo rectángulo $A-H''t-V''t$. Como conocemos los tres lados de este triángulo, se puede dibujar sobre el PV y así ver el ángulo β en verdadera magnitud (tomamos como hipotenusa t'').

Si sobre el plano de trabajo tenemos que trazar por un punto B una recta r que forme los ángulos α y β con los planos de proyección, el proceso a seguir es el siguiente:

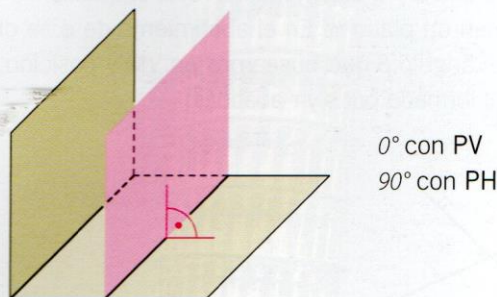
- Por un punto N de la línea de tierra se traza un segmento $\overline{NP}$ que forme con ella un ángulo α (de longitud arbitraria). P es la proyección vertical de la traza vertical de una recta t que formará un ángulo α con el PH y un ángulo β con el PV.
- Trazamos el arco capaz de 90° del segmento $\overline{NP}$ y por P se construye el ángulo β hasta cortar al arco en el punto A.
- Con centro en P y radio $\overline{PA}$ se traza un arco hasta cortar a LT en $H''t$.
- Con centro en la proyección horizontal de la traza vertical $V't$ y radio hasta N se traza un arco, y donde este corte con la perpendicular trazada por $H''t$ (hallada previamente) encontramos $H't$.
- La recta t hallada forma los ángulos α y β con los planos de proyección. Trazamos por último una paralela r a la recta t por el punto B; r es la solución.



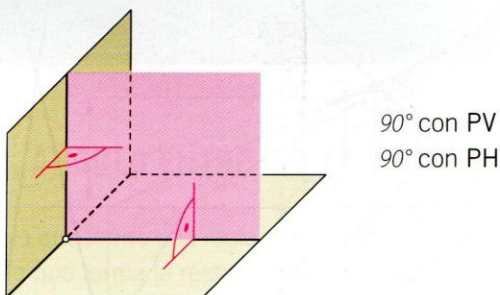
ÁNGULO QUE FORMA UN PLANO CON LOS DE PROYECCIÓN

La suma de los ángulos que forma un plano cualquiera con los de proyección está comprendida entre 0° y 90° (teniendo en cuenta que siempre hacemos referencia al ángulo agudo). Como casos extremos tenemos los siguientes:

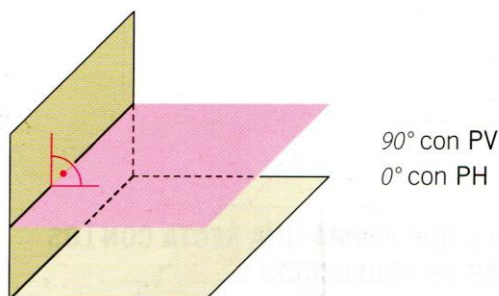
• PLANO PARALELO AL PV:



• PLANO DE PERFIL:



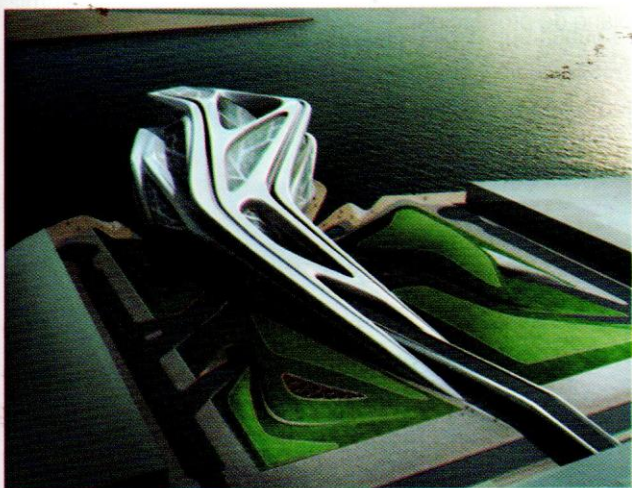
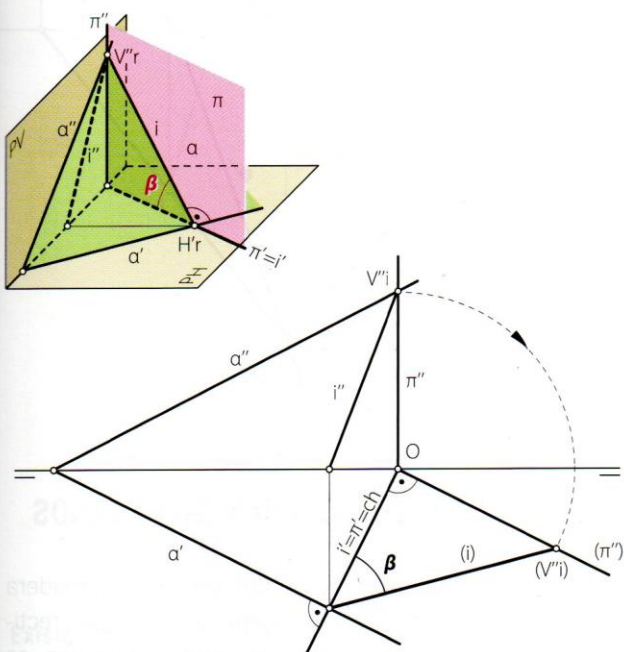
• PLANO DE PARALELO AL PH:



• ÁNGULO QUE FORMA UN PLANO OBLICUO CON EL PH:

Dado el plano α :

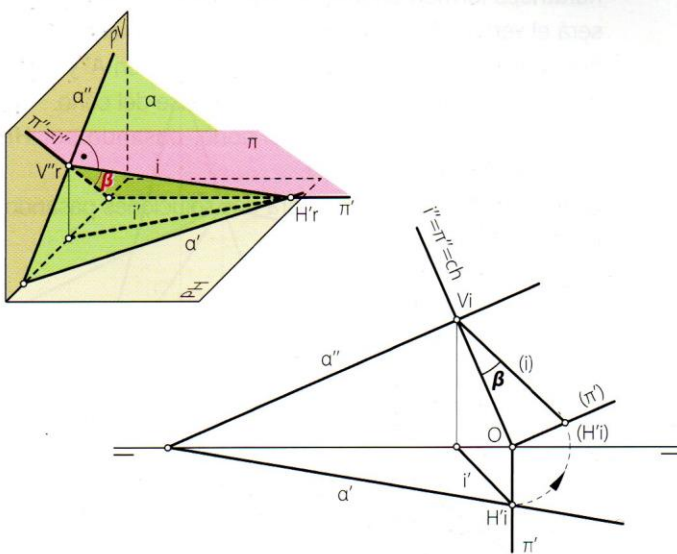
- Se traza un plano π proyectante horizontal cuya traza horizontal sea perpendicular a la traza horizontal de α , y se halla la intersección entre ambos, que será la recta i .
- La recta i es una recta de máxima pendiente (r.m.p.) del plano α y si la abatimos sobre PH junto con el plano π hallaremos el ángulo que forma con PH, que es el mismo que forma el plano α con PH en VM. En realidad, lo que se hace es dibujar una recta de máxima pendiente (r.m.p.) de α y hallar el ángulo que esta forma con el PH mediante un abatimiento.



EL CENTRO DE ARTES ESCÉNICAS QUE SE ESTÁ CONSTRUYENDO EN EL EMIRATO DE ABU DHABI, OBRA ARQUITECTA ZAHA HADID.

• ÁNGULO QUE FORMA UN PLANO OBLICUO CON EL PV:

Se determina de la misma forma pero usando una recta de máxima inclinación (r.m.i.) del plano. En el dibujo, el plano α forma un ángulo β con el PV.



• PLANO QUE FORMA UN ÁNGULO DETERMINADO CON EL PH:

Para trazar un plano α que forme un ángulo β con el PH supondremos una recta r , que estará contenida en el plano solución, y consideraremos un punto A cualquiera de r como vértice de un cono de altura $\overline{AA'}$, con base situada sobre el PH (esta base será tangente a la futura α').

La recta s , generatriz que pasa por el punto de tangencia T entre la base y α' , es la recta de máxima pendiente del plano α ; así, los planos tangentes al cono son planos que forman con el PH el mismo ángulo que forman las generatrices del cono con la base, como el plano solución α .

