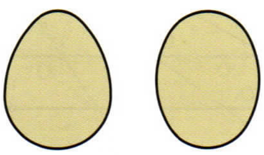
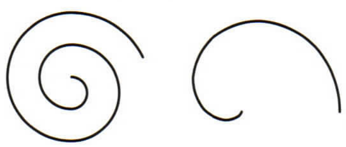
Dentro del diseño industrial, arquitectónico o gráfico, las curvas técnicas tienen muchas aplicaciones en la resolución de problemas de dibujo técnico.

Las curvas técnicas se obtienen mediante la unión de arcos de circunferencia que son tangentes entre sí, dando lugar a la formación de figuras planas que pueden ser abiertas como las espirales, la evolvente del círculo, etc., o cerradas como el óvalo o el ovoide.



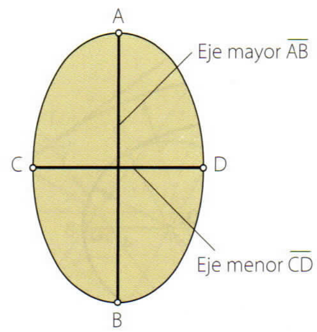
Curvas técnicas cerradas

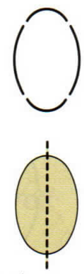


Curvas técnicas abiertas

10.1. DEFINICIÓN Y TRAZADO DE ÓVALOS

El óvalo es una curva cerrada y plana, formada por cuatro arcos de circunferencia iguales dos a dos, es simétrica respecto a dos ejes perpendiculares. Su aplicación más importante en el dibujo está en el trazado de perspectivas, ya que se puede sustituir el trazado de elipses por el de óvalos de forma aproximada.



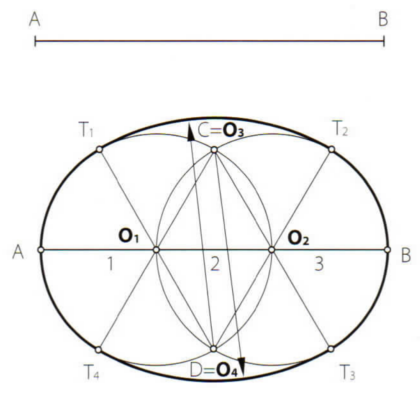


Eje de simetría

• CONSTRUCCIÓN DE UN ÓVALO CONOCIENDO EL EJE MAYOR (1[er] PROCEDIMIENTO):

Dado el eje mayor $\overline{AB}$.

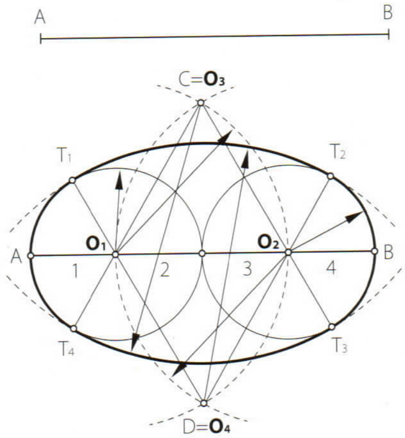
- Dividimos el segmento $\overline{AB}$ en tres partes iguales, así obtenemos los puntos O_1 y O_2.
- Con centros en O_1 y O_2 trazamos dos circunferencias de radios $\overline{O_1A}$ y $\overline{O_2B}$ respectivamente.
- Los puntos de intersección de estas dos circunferencias, O_3 y O_4 son los centros de los dos arcos que faltan para construir el óvalo.
- Al unir los centros de las soluciones obtendremos los puntos de tangencia T_1, T_2, T_3 y T_4.



• CONSTRUCCIÓN DE UN ÓVALO CONOCIENDO EL EJE MAYOR (2° PROCEDIMIENTO):

Dado el eje mayor $\overline{AB}$.

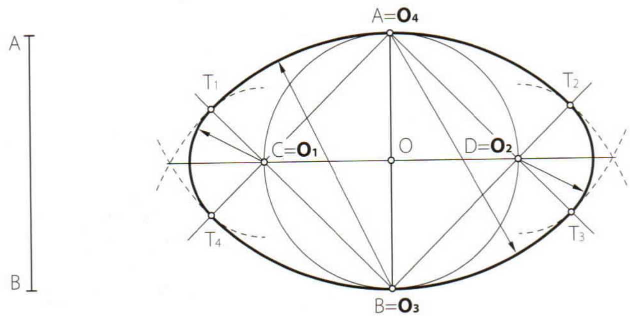
- Dividimos el segmento $\overline{AB}$ en cuatro partes iguales, numerándolos del 1 al 4, el punto número 1 será O_1 y el número 3 será O_2.
- Con centro en O_1 y radio $\overline{O_1O_2}$ trazamos un arco.
- Con centro en O_2 y radio $\overline{O_2O_1}$ trazamos un arco que corta al anterior en los puntos O_3 y O_4, centros de los dos arcos que faltan para construir el óvalo.
- Al unir los centros de las soluciones obtendremos los puntos de tangencia T_1, T_2, T_3 y T_4.



• CONSTRUCCIÓN DE UN ÓVALO CONOCIENDO EL EJE MENOR:

Dado el eje menor $\overline{AB}$.

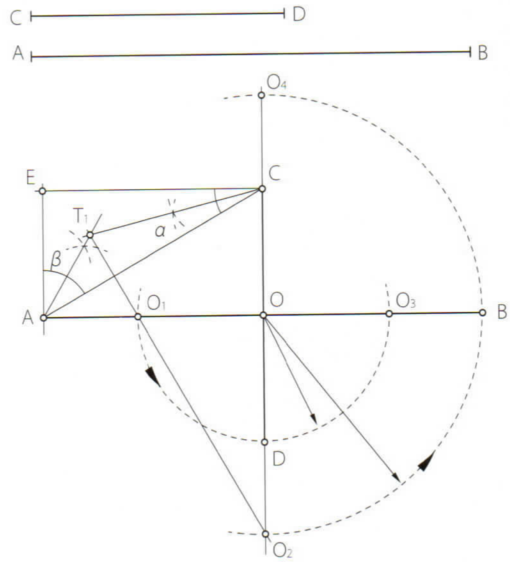
- Dibujamos una circunferencia cuyo diámetro sea igual al eje $\overline{AB}$ y se traza el diámetro perpendicular a este $\overline{CD}$.
- El punto A será igual a O_4, el punto B a O_3, el C a O_1 y el D a O_2.
- Con centro en estos puntos, O_1, O_2, O_3 y O_4 se trazan los cuatro arcos tangentes que forman el óvalo.
- Al unir los centros de las soluciones obtendremos los puntos de tangencia T_1, T_2, T_3 y T_4.

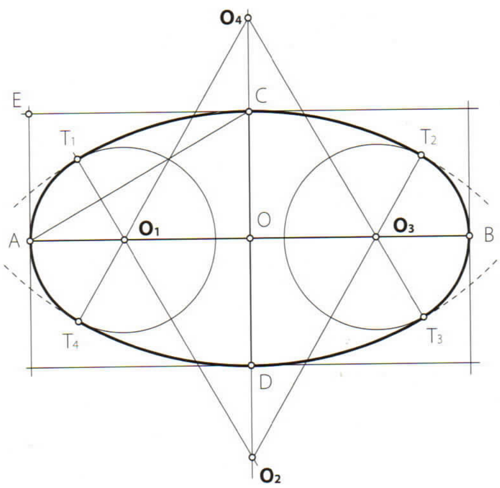


• CONSTRUCCIÓN DE UN ÓVALO DE CUATRO CENTROS CONOCIENDO LOS DOS EJES (1er MÉTODO):

Dados los ejes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

- Se dibujan los ejes dados perpendiculares entre sí cortándose en su punto medio O.
- Con centro en el punto medio O y radio el semieje mayor $\overline{OB}$ trazamos un arco que corta a la prolongación del eje menor en los puntos O_2 y O_4, centros de dos de los arcos del óvalo.
- Por el punto C trazamos la paralela al semieje $\overline{OA}$ y por el punto A la paralela al semieje $\overline{OC}$, éstas se cortan en E.
- Unimos A con C y trazamos la bisectriz del ángulo α y del ángulo β, estas bisectrices se cortan en T_1, punto de tangencia de los arcos del óvalo.
- Unimos T_1 con O_2 y obtenemos O_1, sobre el eje mayor, otro de los centros de los arcos del óvalo.
- El último centro del arco que nos falta, O_3, será el simétrico de O_1 respecto del centro O.

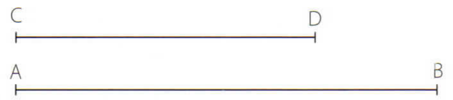


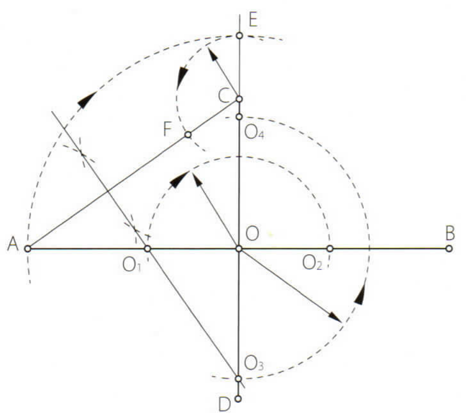


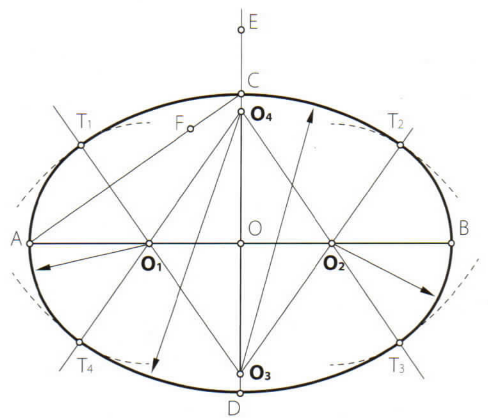
• CONSTRUCCIÓN DE UN ÓVALO DE CUATRO CENTROS CONOCIENDO LOS DOS EJES (2° MÉTODO):

Dados los ejes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

- Se dibujan los ejes dados perpendiculares entre sí cortándose en su punto medio O.
- Con centro en el punto medio O y radio el semieje mayor $\overline{OA}$, trazamos un arco que corta a la prolongación del eje menor en el punto E.
- Con centro en C y radio $\overline{CE}$ trazamos un arco que corta al segmento $\overline{AC}$ en F.
- Trazamos la mediatriz del segmento $\overline{AF}$ y donde ésta corta a los ejes dados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, obtenemos los puntos O_1 y O_3, centros de dos de los arcos buscados.
- Los otros dos arcos que faltan, O_2 y O_4, serán los simétricos de los anteriores.



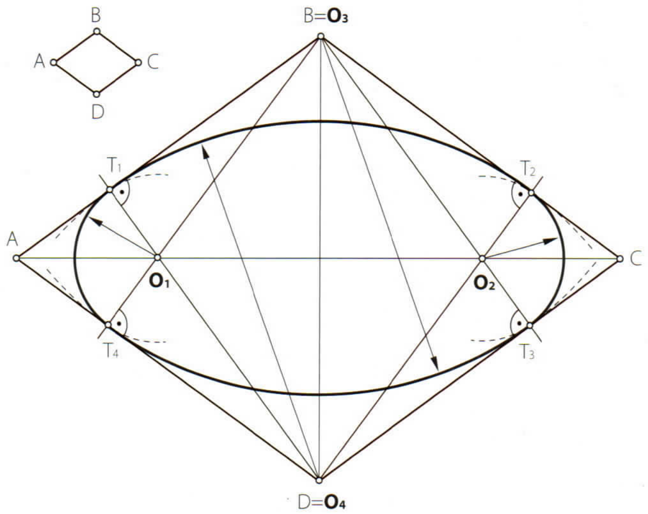




• CONSTRUCCIÓN DE UN ÓVALO INSCRITO EN UN ROMBO:

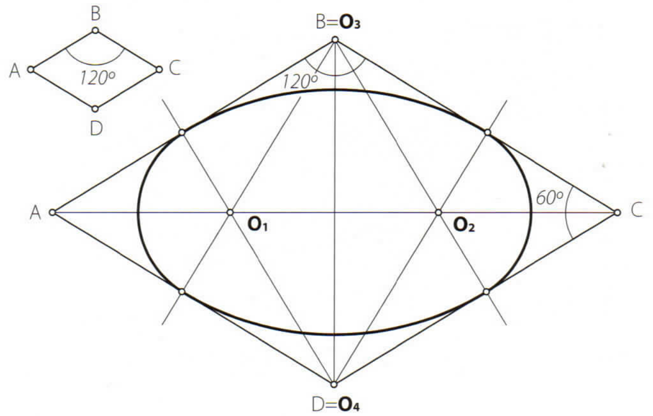
Dado el rombo A-B-C-D.

- Desde el punto D se trazan rectas perpendiculares a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.
- Desde el punto B se trazan rectas perpendiculares a los lados $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$, estas perpendiculares cortan al eje $\overline{AC}$ en los puntos O_1 y O_2, centros de dos de los arcos del óvalo.
- Los otros dos centros que faltan, O_3 y O_4, serán los puntos B y D, que unidos con los puntos O_1 y O_2 nos darán, sobre los lados del rombo, los puntos de tangencia T_1, T_2, T_3 y T_4.



• CONSTRUCCIÓN DE UN ÓVALO ISOMÉTRICO:

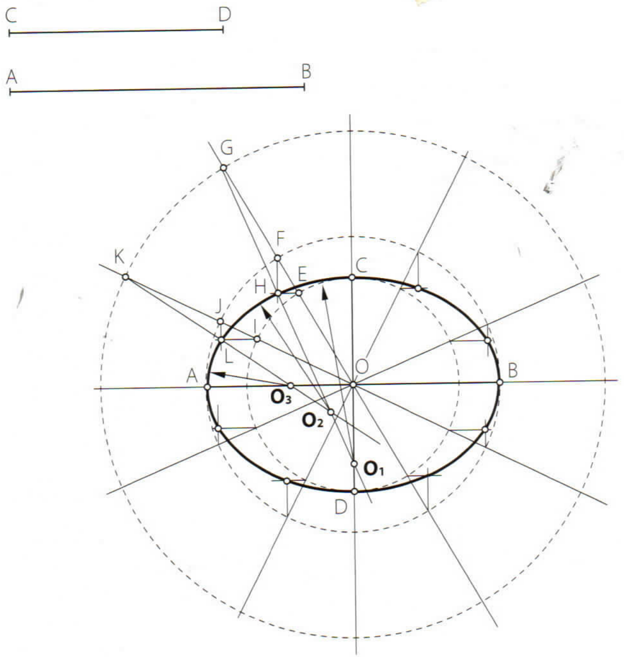
Si los ángulos mayores del rombo donde se ha de inscribir el óvalo valen *120°*, y por tanto los menores *60°*, el óvalo inscrito en él se llama isométrico. Su construcción se realiza de igual manera que en el caso anterior. Adopta este nombre porque esta figura se utiliza en dibujo isométrico para sustituir, de manera aproximada, a la elipse que tenga el mismo valor de ejes que el óvalo.



• CONSTRUCCIÓN DE UN ÓVALO DE VARIOS CENTROS CONOCIENDO LOS EJES:

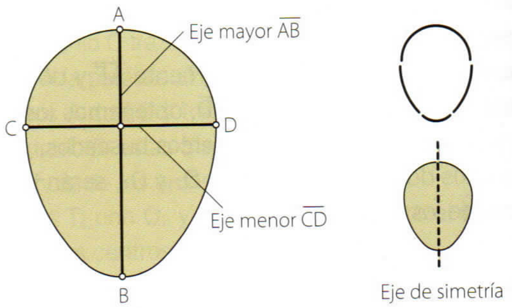
Dados los ejes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

- Se dibujan los ejes dados perpendiculares entre sí cortándose en su punto medio O.
- Con centro en O se traza una circunferencia de radio el semieje mayor, otra circunferencia concéntrica de radio el semieje menor y otra circunferencia de radio la suma de los dos anteriores.
- Se trazan diámetros arbitrarios que corten a las tres circunferencias, por ejemplo en los puntos E, F y G.
- Por E trazamos una paralela al eje mayor, y por F se traza una paralela al eje menor. Éstas se cortan en el punto H.
- Unimos el punto G con el punto H hasta cortar al eje $\overline{CD}$ en O_1. Con centro en O_1 y radio $\overline{O_1C}$, trazamos un arco hasta el punto H, [illegible] arcos que formen el óvalo buscado.
- Otro de los diámetros [illegible] circunferencias en los puntos I, J y K. [illegible] I y J trazaremos paralelas a los ejes como [illegible] anteriormente. Éstas se cortan en el punto L.
- Unimos el punto K con L y donde ésta recta corta a la recta $\overline{GH}$ obtenemos el punto O_2, otro de los centros buscados. Con centro en O_2 y radio $\overline{O_2H}$ trazaremos un arco hasta L.
- Donde la recta $\overline{KL}$ corta al eje mayor $\overline{AB}$ obtendremos O_3.
- Repitiendo esta operación obtenemos el resto de centros de los arcos que forman el óvalo.



10.2. DEFINICIÓN Y TRAZADO DE OVOIDES

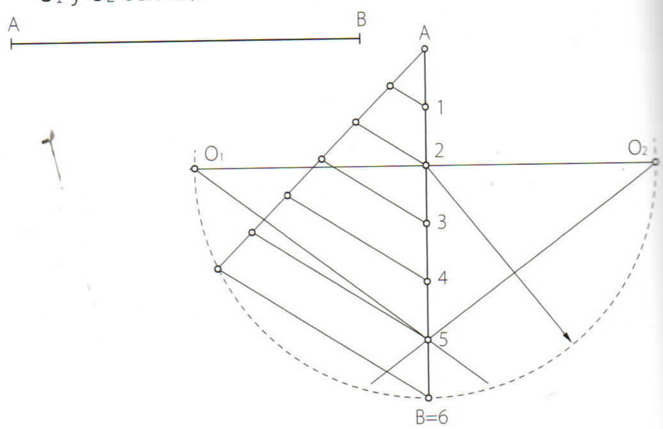
El ovoide es una curva cerrada y plana, formada por cuatro arcos de circunferencia, de los cuales dos son simétricos y uno de ellos es una semicircunferencia. El ovoide tiene un eje, llamado eje mayor, y un diámetro llamado eje menor. Es simétrico respecto al eje mayor.

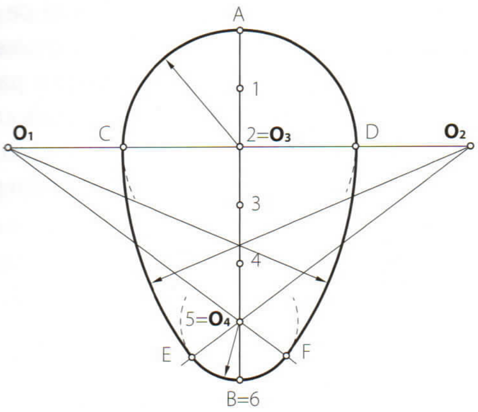


• CONSTRUCCIÓN DE UN OVOIDE CONOCIENDO EL EJE MAYOR:

Dado el eje $\overline{AB}$. Mostramos el proceso en dos dibujos para mayor claridad.

- Dividimos el eje $\overline{AB}$ en seis partes iguales, numerándolas del 1 al 6.
- Por el punto 2 trazamos una perpendicular al eje. Con centro en el punto 2 y radio $\overline{B2}$ trazamos un arco que corta a la perpendicular trazada por 2 en O_1 y O_2, centros de dos de los arcos del ovoide.
- Con centro en $2{=}O_3$ y radio $\overline{A2}$ trazamos una semicircunferencia que corta a la perpendicular citada anteriormente en los puntos C y D, puntos de tangencia de los arcos del ovoide.
- El punto 5 será el centro O_4 del arco que falta para construir el ovoide.
- Para hallar los puntos de tangencia E y F basta con unir O_1 y O_2 con O_4.

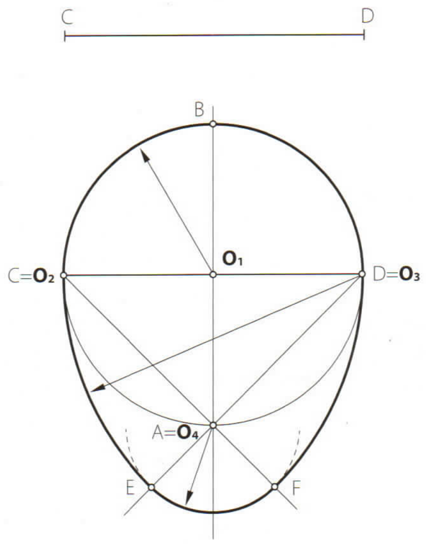




• CONSTRUCCIÓN DE UN OVOIDE CONOCIENDO EL DIÁMETRO:

Dado el diámetro $\overline{CD}$.

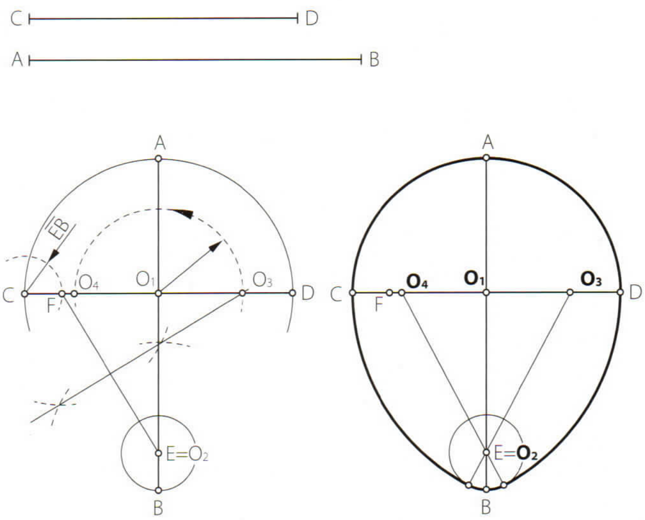
- Dibujamos una circunferencia de diámetro $\overline{CD}$ y centro O_1. Los puntos C y D serán O_2 y O_3, respectivamente, a la vez que puntos de tangencia.
- Para hallar el cuarto centro O_4, trazamos el diámetro $\overline{AB}$ perpendicular al dado. El punto A será el centro buscado.
- Para hallar los puntos de tangencia E y F basta con unir los centros O_2 y O_3. con O_4.



• CONSTRUCCIÓN DE UN OVOIDE CONOCIENDO EL EJE Y EL DIÁMETRO:

Dado el eje $\overline{AB}$ y el diámetro $\overline{CD}$.

- Trazamos una semicircunferencia de centro O_1 y diámetro $\overline{CD}$.
- Por O_1 se traza la perpendicular al diámetro $\overline{CD}$, que corta a la semicircunferencia en A.
- A partir de A y sobre la perpendicular anterior se lleva la medida del eje mayor $\overline{AB}$.
- Desde los puntos C y B, y hacia el interior, se lleva el segmento $\overline{CF}$ y $\overline{BE}$, respectivamente, igual al radio del arco menor del ovoide, que se elige arbitrariamente. el punto E será O_2.
- Trazamos la mediatriz del segmento $\overline{EF}$, que corta al diámetro $\overline{CD}$ en O_3, el punto O_4 será el simétrico de O_3 respecto a O_1.
- Los puntos O_1, O_2, O_3 y O_4 son los centros buscados de los arcos del ovoide.



Arquímedes de Siracusa

"¡Eureka!"

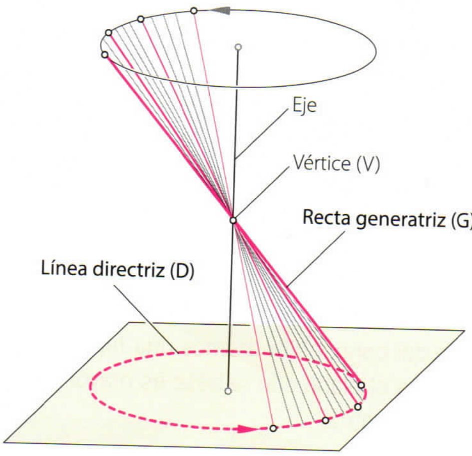
(287-212 a. C.) Considerado uno de los científicos más importantes de la antigüedad clásica. Fue un matemático, físico, ingeniero, astrónomo e inventor. Poco se sabe de su vida. Es famoso por su explicación del principio de la palanca, y por sus máquinas, incluyendo armas de guerra y por el tornillo, la espiral y el principio que llevan su nombre.

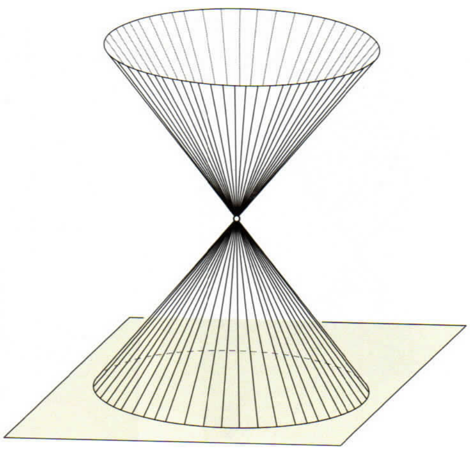
Las curvas cónicas se obtienen a partir de la intersección de una superficie cónica por un plano.

La superficie cónica de revolución está engendrada por una recta que gira alrededor de otra a la que corta. Esta segunda recta es el **eje de la superficie** y la recta que gira es la **generatriz**.

El punto de intersección de ambas es el **vértice de la superficie**.

La **directriz** es la línea recta o curva sobre la cual se apoya continuamente la generatriz.





Johannes Kepler

"Yo deseaba ser teólogo, pero ahora me doy cuenta a través de mi esfuerzo de que Dios puede ser celebrado también por la astronomía".

(1571-1630). Astrónomo, matemático y físico alemán. Dedicó grandes esfuerzos y vocación al estudio del movimiento orbital de los planetas. Escribió tres leyes, llamadas de Leyes de Kepler.

1.ª Los planetas tienen movimientos elípticos alrededor del Sol, estando éste situado en uno de los 2 focos que contiene la elipse.
2.ª Las áreas barridas por los radios de los planetas, son proporcionales al tiempo empleado por éstos en recorrer el perímetro de dichas áreas.
3.ª El cuadrado de los períodos de la órbita de los planetas es proporcional al cubo de la distancia promedio al Sol.

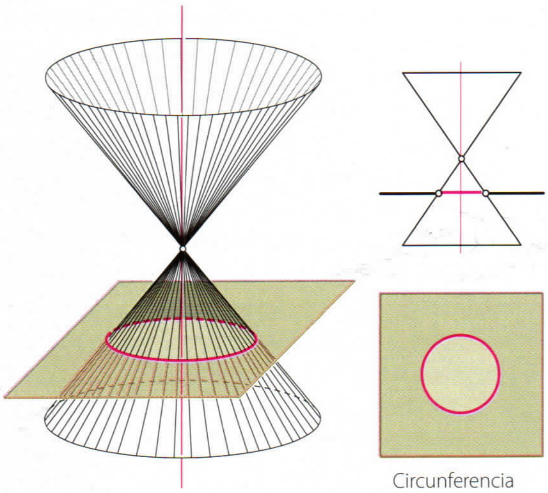
Estas leyes permitían ya unificar, predecir y comprender los movimientos de los astros y supuso un enorme hito en la historia de la ciencia.

Pierre de Fermat

(Beaumont-de-Lomagne, Francia, 17 de agosto de 1601 - Castres, Francia, 12 de enero de 1665) fue un jurista y matemático y junto con René Descartes, uno de los principales matemáticos de la primera mitad del siglo XVII. Descubrió el principio fundamental de la geometría analítica.

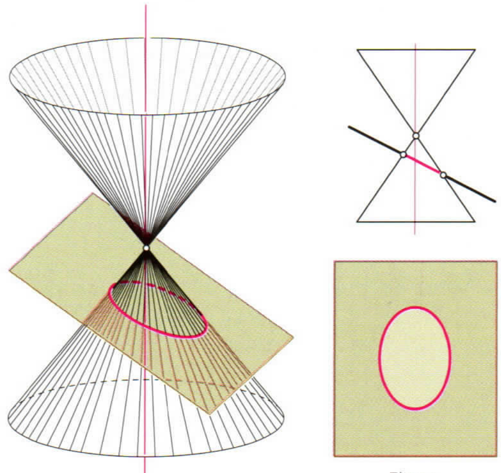
Supongamos un cono de revolución de dos ramas, según sea la posición del plano secante respecto del eje del cono, en relación con el ángulo de vértice se obtienen las siguientes curvas:

- Si el plano de corte es perpendicular al eje, la curva obtenida (cerrada) es una **circunferencia**.



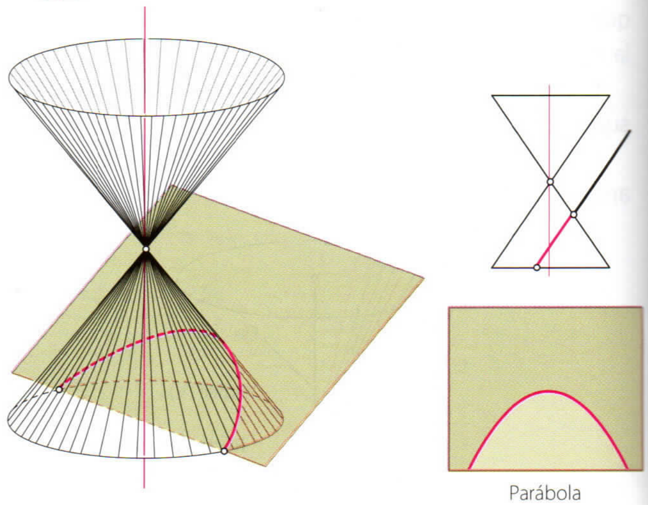
Circunferencia

- Si el plano corta a todas las generatrices pero no es perpendicular al eje la curva que se obtiene (cerrada) es la **elipse**. El ángulo que forma el plano con la base es menor que el ángulo que forma el plano con la generatriz.



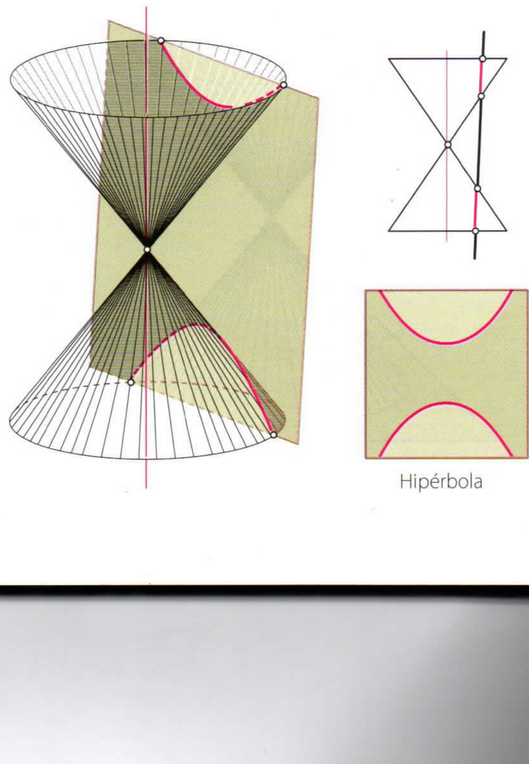
Elipse

- Si el plano es paralelo a una sola generatriz del cono la curva resultante (abierta, con una sola rama) es la **parábola**.



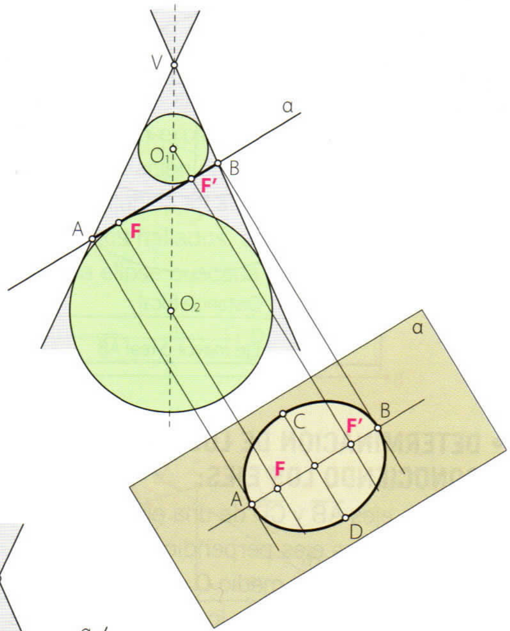
Parábola

- Si el plano corta a las generatrices en ambos lados del vértice del cono, obtendremos una **hipérbola**. El ángulo que forma el plano con la base es mayor del que forma con la generatriz.

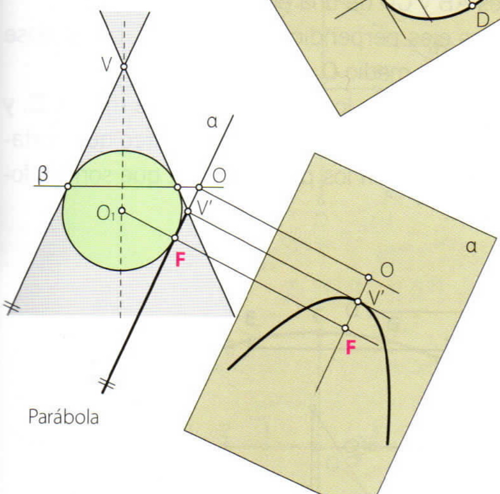


Hipérbola

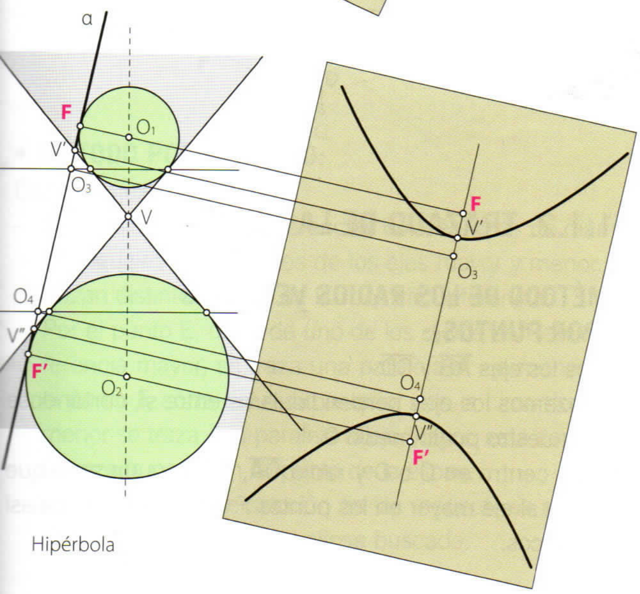
Si en cada uno de los casos descritos inscribimos esferas tangentes interiores al cono y al plano de corte, los puntos de contacto, con este último, de dichas esferas reciben el nombre de focos.



Elipse



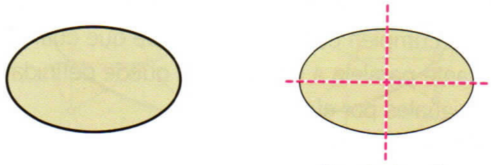
Parábola



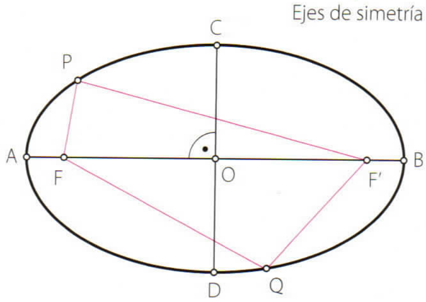
Hipérbola

11.1. DEFINICIÓN Y TRAZADO DE LA ELIPSE

La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a otros dos fijos, llamados focos, es constante. El valor de dicha suma es igual a la longitud del eje mayor de la elipse. La elipse es una curva cerrada con dos ejes de simetría.

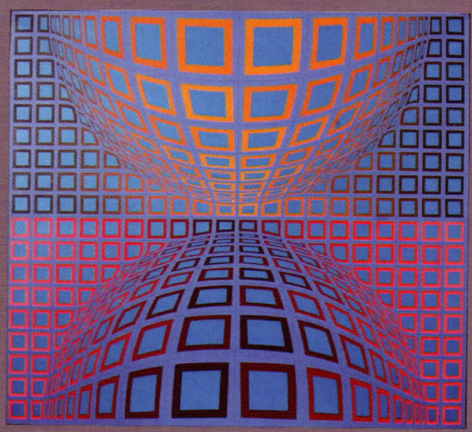


Ejes de simetría



$\overline{PF} + \overline{PF'} = \overline{AB}$ $\quad$ $\overline{QF} + \overline{QF'} = \overline{AB}$

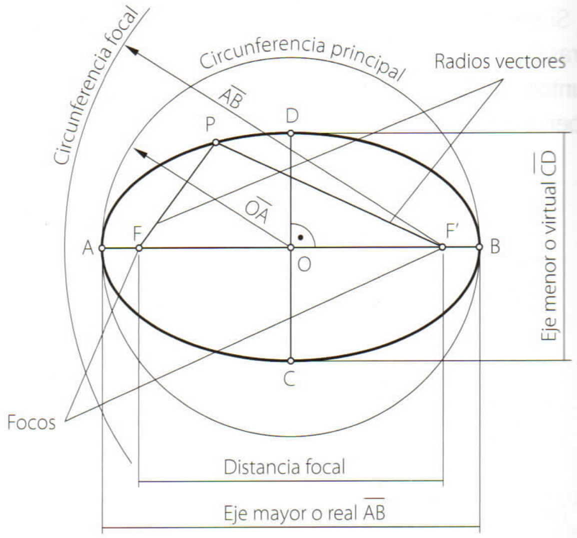
El Op Art (*Optical Art*), es un movimiento artístico contemporáneo que alcanzó su auge en la década de 1960. Se centra en los efectos cromáticos y formales dinámicos. Su finalidad es la de producir la ilusión de vibración o movimiento en la superficie del cuadro. El Op Art tiene profundas raíces en la Bauhaus, y es consecuencia del tipo de experimentos que allí se desarrollaron.



PINTURA DE VICTOR VASARELY

11.1.1. ELEMENTOS DE LA ELIPSE

- **Ejes mayor y menor:** son perpendiculares entre sí y se cortan en su punto medio. Al eje mayor se le llama real y al eje menor virtual.
- **Distancia focal:** es la longitud entre los dos focos F y F', estos se encuentran siempre en el eje real.
- **Radios vectores:** son los segmentos que unen cada punto de la elipse con los focos.
- **Diámetros conjugados:** se llama así a todo par de diámetros que cumplen con la condición de que cualquier recta secante paralela a uno de ellos quede definida en dos partes iguales por el otro.
- **Circunferencia focal:** existen dos, una por cada foco, se trazan con centro en éstos y radio igual a la longitud del eje mayor.
- **Circunferencia principal:** comparte centro O con la elipse (cruce de los ejes). Su radio es el semieje mayor.



Isaac Newton

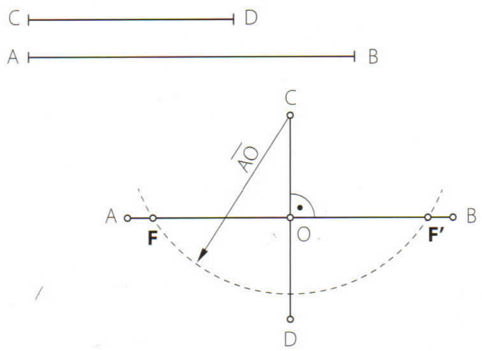
"Newton fue el más grande genio que ha existido y también el más afortunado dado que sólo se puede encontrar una vez un sistema que rija el mundo."
Joseph Louis Lagrange

(1642-1727). Isaac Newton fue un físico, filósofo, teólogo, inventor, alquimista y matemático inglés, autor de los *Philosophiae naturalis principia mathematica*, más conocidos como los "Principia", donde describió la ley de la gravitación universal y estableció las bases de la mecánica clásica mediante las leyes que llevan su nombre. Entre sus otros descubrimientos científicos destacan los trabajos sobre la naturaleza de la luz y la óptica y el desarrollo del cálculo matemático.
Newton fue el primero en demostrar que las leyes naturales que gobiernan el movimiento en la Tierra y las que gobiernan el movimiento de los cuerpos celestes son las mismas. Es, a menudo, calificado como el científico más grande de todos los tiempos.

- **DETERMINACIÓN DE LOS FOCOS DE UNA ELIPSE CONOCIENDO LOS EJES:**

Dados los ejes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de una elipse.

- Trazamos los ejes perpendiculares entre sí, cortándose en nuestro punto medio O.
- Con centro en uno de los extremos del eje menor, C, y radio el semieje mayor $\overline{AO}$, trazamos un arco que cortará al eje mayor $\overline{AB}$, en los puntos F y F', que son los focos buscados.



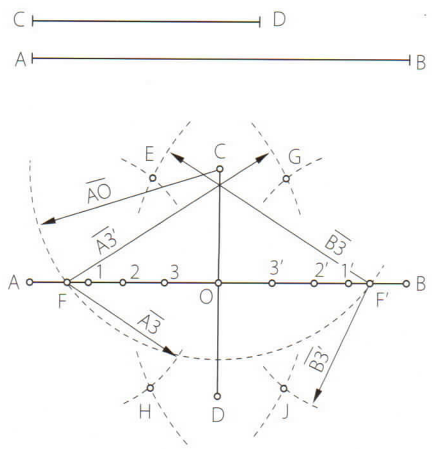
11.1.2. TRAZADO DE LA ELIPSE

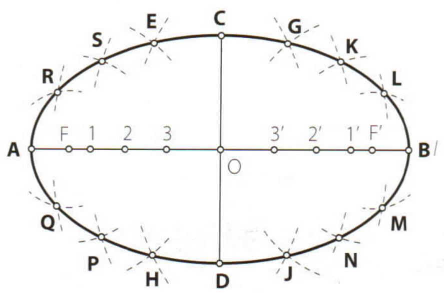
- **MÉTODO DE LOS RADIOS VECTORES (POR PUNTOS):**

Dados los ejes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

- Trazamos los ejes perpendiculares entre sí, cortándose en nuestro punto medio O.
- Con centro en C o D y radio $\overline{OA}$, se traza un arco que corta al eje mayor en los puntos F y F', y obtenemos así los focos.

- Se divide en un número de partes la distancia focal 1, 2, 3, etc.
- Con centro en F y radio $\overline{A3'}$, se trazan dos arcos; con radio $\overline{B3'}$ y centro en F', se trazan otros dos arcos que cortan a los dos anteriores en G y J, puntos de la elipse.
- Con centro en F y radio $\overline{A3}$ se vuelven a trazar dos arcos; con radio $\overline{B3}$ y centro en F', se trazan otros dos arcos que cortan a los anteriores en los puntos E y H, otros dos puntos de la elipse.
- Repetimos esta operación con los puntos en los que hemos dividido la distancia focal.
- Se unen los puntos hallados, a mano o con plantilla, y así obtenemos la elipse buscada.

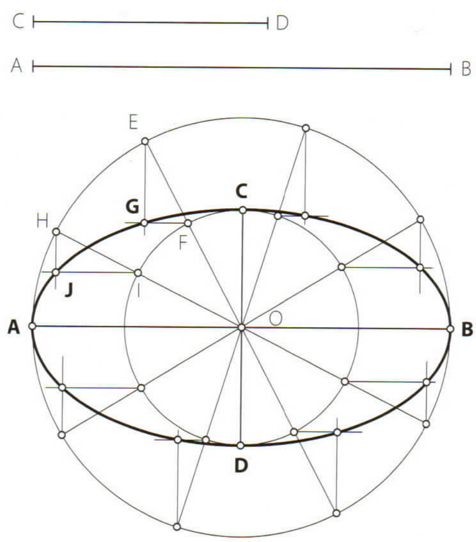




• MÉTODO POR AFINIDAD:

Dados los ejes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

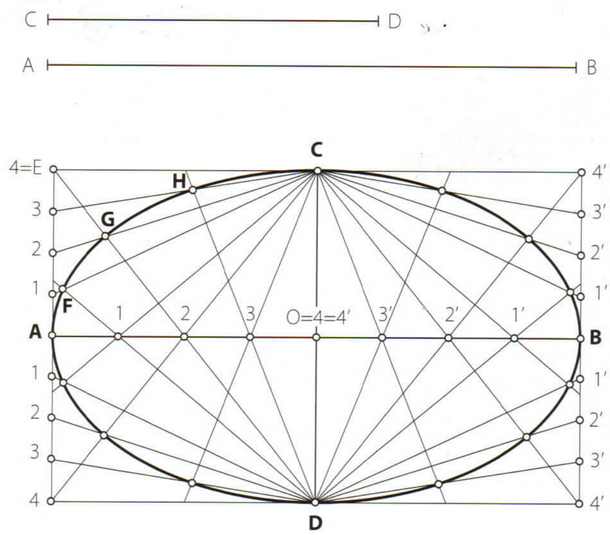
- Se dibujan dos circunferencias concéntricas de diámetros iguales a los valores de los ejes mayor y menor. Se trazan distintos radios de las dos circunferencias.
- Por el punto E, corte de uno de los radios con la circunferencia mayor, se traza una paralela al eje menor. Por el punto F, corte del radio anterior con la circunferencia menor se traza una paralela al eje mayor, esta corta con la trazada por E en G, punto de la elipse.
- Los puntos de intersección de las respectivas paralelas determinan puntos de la elipse buscada.



• MÉTODO DE LOS HACES PROYECTIVOS:

Dados los ejes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

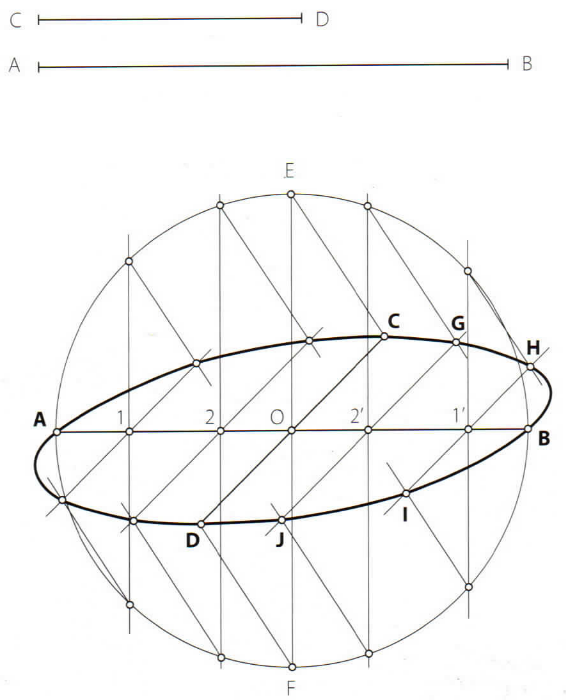
- Se dibuja un rectángulo de lados igual al valor de los ejes de la elipse.
- Se trazan los ejes dentro de dicho rectángulo, por los puntos medios de los lados.
- Se dividen los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{AE}$ en el mismo número de partes iguales. En este ejemplo, en cuatro.
- Las intersecciones de los rayos C1, C2 y C3 con los rayos D1, D2 y D3 respectivamente, determinan los puntos de la elipse F, G y H.
- En los otros tres cuadrantes de la elipse obtenemos los puntos aplicando el mismo método.
- Unimos los puntos para completar la elipse.



• CONOCIDOS DOS DIÁMETROS CONJUGADOS:

Dado un diámetro cualquiera $\overline{AB}$ de una elipse y su conjugado $\overline{CD}$.

- Se dibuja una circunferencia de diámetro igual al mayor de los diámetros conjugados $\overline{AB}$. Sobre ella se traza otro diámetro $\overline{EF}$ perpendicular a $\overline{AB}$.
- Se divide $\overline{AB}$ en n partes, por ejemplo 6, y se trazan por estas divisiones paralelas a $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$.
- Se unen los puntos E con C, y D con F.
- Por los puntos donde las paralelas a $\overline{EF}$ cortan a la circunferencia, se trazan paralelas a $\overline{EC}$ y $\overline{DF}$, que cortan a las paralelas al diámetro conjugado $\overline{CD}$ en los puntos G, H, I, J, etc., y así sucesivamente, estos determinan los puntos de la elipse buscada.

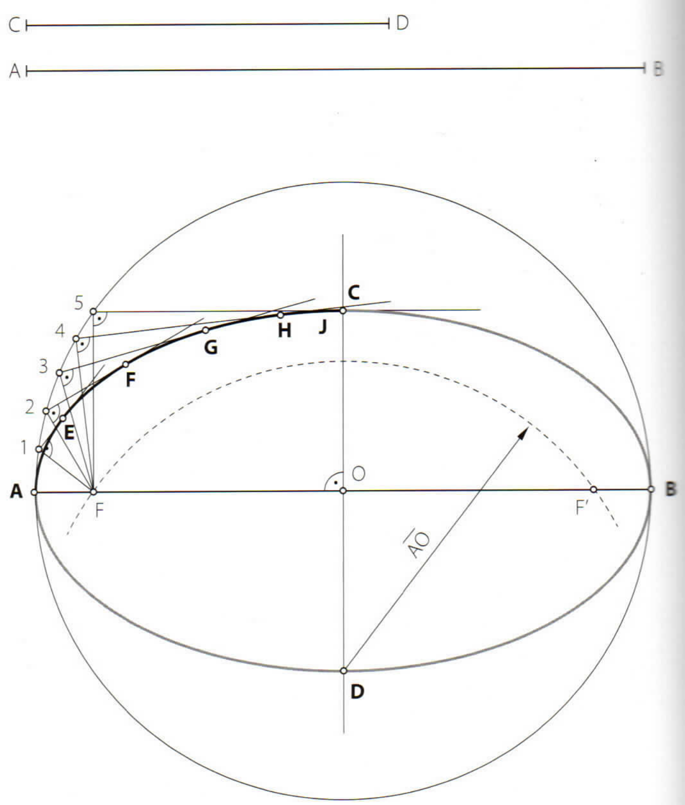


• TRAZADO DE LA ELIPSE POR ENVOLVENTES:

Dados los ejes $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

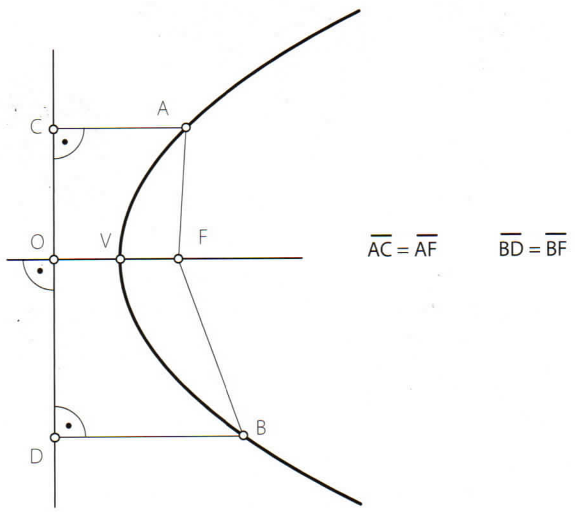
Esta construcción se basa en el hecho de que la circunferencia principal de una elipse, es el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde los focos a las tangentes a la elipse.

- Para este trazado partiremos de puntos de la circunferencia principal, como 1, 2, 3, 4,....
- Unimos dichos puntos con el foco F, y trazamos por ellos perpendiculares al segmento $\overline{1F}$, $\overline{2F}$, $\overline{3F}$,..., obteniendo rectas tangentes a la elipse que irán definiendo la curva envolviendo a la elipse.



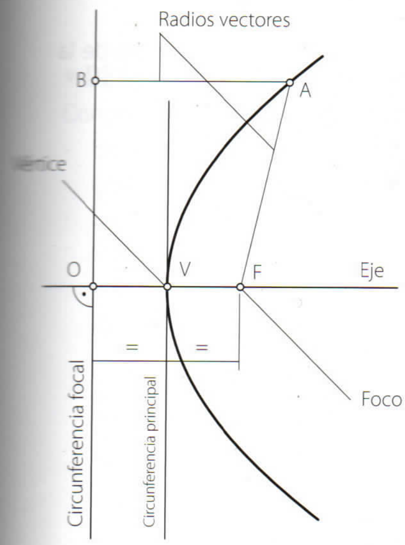
11.2. DEFINICIÓN Y TRAZADO DE LA PARÁBOLA

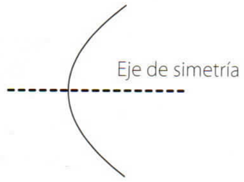
La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de uno fijo llamado foco, y de una recta fija denominada directriz. Es una curva abierta con una sola rama y un único eje de simetría.

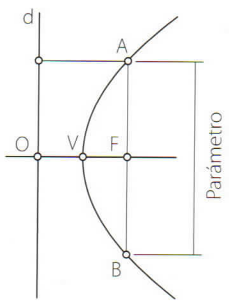


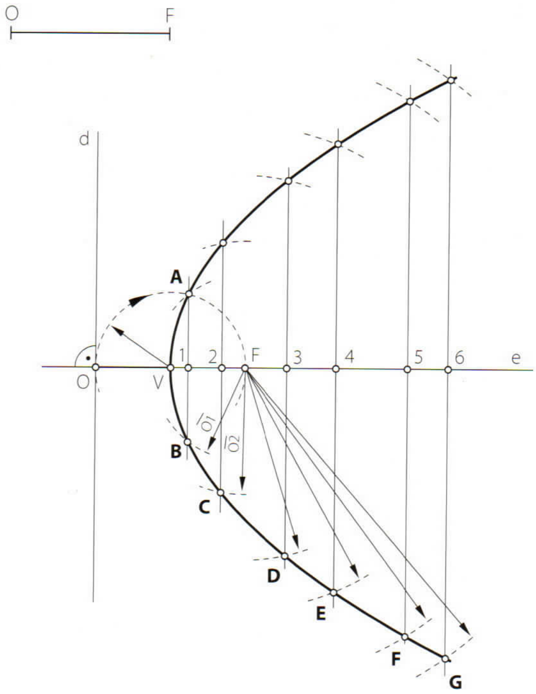
11.2.1. ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA

- **Eje:** perpendicular a la directriz, situados en él se encuentran un foco y un vértice. El vértice se encuentra siempre equidistante de la directriz y del foco (como cualquier otro punto de la parábola). La parábola es simétrica respecto del eje.
- **Radios vectores:** son las rectas que unen un punto con el foco y con la directriz.
- **Circunferencia focal:** es la directriz, tiene por lo tanto, radio infinito.
- **Circunferencia principal:** recta tangente en el vértice.
- **Parámetro:** es la longitud de la cuerda perpendicular al eje en el foco.









11.2.2. TRAZADO DE LA PARÁBOLA

• CONOCIDOS EL FOCO Y LA DIRECTRIZ:

Dados la directriz **d**, el foco F y el eje **e**.

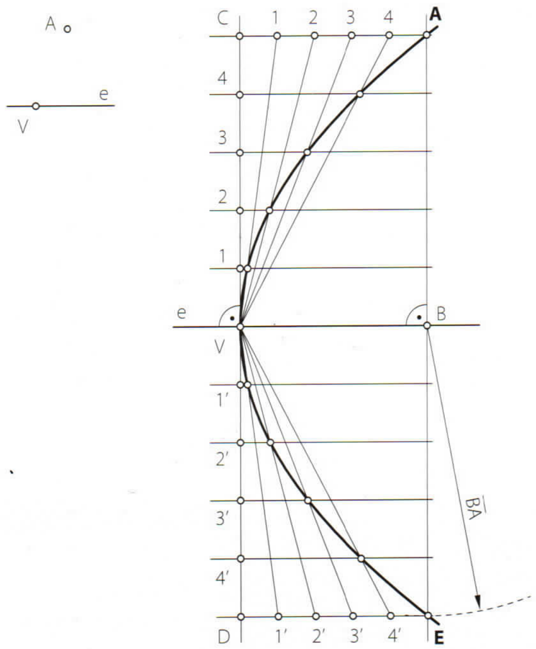
- Hallamos el vértice V, punto medio del segmento $\overline{OF}$.
- Tomamos puntos cualquiera del eje **e**, 1, 2, 3, 4,... y trazamos por ellos perpendiculares a éste.
- Con centro en el foco y radio $\overline{O1}$ se traza un arco que corta a la perpendicular al eje **e** que pasa por 1 en los puntos A y B, puntos de la parábola. Cumpliéndose que $\overline{BF}=\overline{AF}$.
- Repetimos la misma operación con el resto de puntos 2, 3, 4,....
- Los puntos obtenidos, que definen la parábola, se unen a mano o con plantilla.

Las antenas parabólicas reciben su nombre de la parábola. La forma parabólica de una antena tiene una importante propiedad reflectora.
Podemos encontrar esta forma en numerosos objetos cotidianos; habitualmente en lámparas, dado que, la forma parabólica que rodea la fuente de luz (bombilla) refleja especialmente bien los rayos luminosos que emite.

• **MÉTODO DE LOS HACES PROYECTIVOS:**

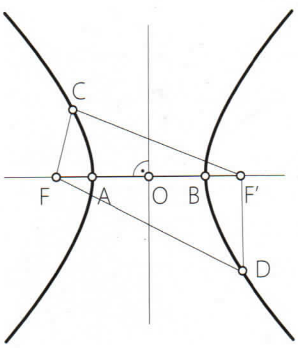
Dados el eje e, el vértice V y un punto A de la parábola.

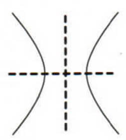
- Trazamos el rectángulo B-A-C-V, y dividiremos los lados $\overline{VC}$ y $\overline{CA}$ en un mismo número de partes iguales.
- Por las divisiones de $\overline{VC}$, trazaremos paralelas al eje de la curva, y uniremos las divisiones de $\overline{CA}$, con el vértice V de la curva.
- La intersección de estas rectas con las paralelas anteriores, determinarán puntos pertenecientes a la parábola buscada. Esto se repetirá para la otra rama de la parábola.



11.3. DEFINICIÓN Y TRAZADO DE LA HIPÉRBOLA

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a otros dos fijos, denominados focos, es constante. Dicha diferencia es siempre igual a la longitud del eje real. Es una curva abierta con dos ramas y dos ejes de simetría.



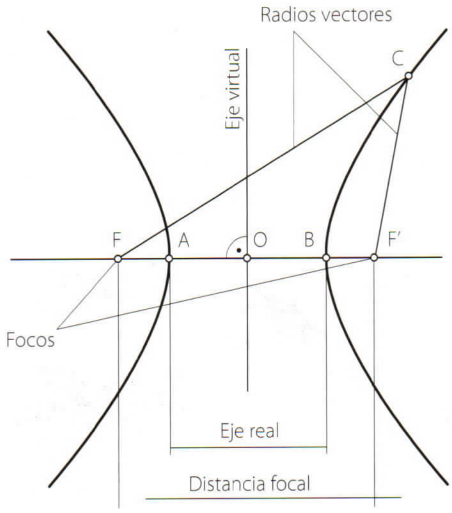


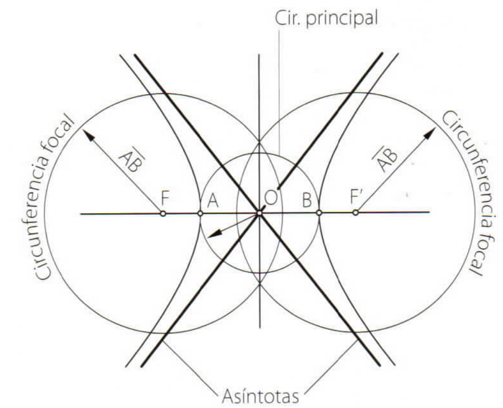
Ejes de simetría

$\overline{FC} - \overline{F'C} = \overline{AB}$ $\overline{FD} - \overline{F'D} = \overline{AB}$

11.3.1. ELEMENTOS DE LA HIPÉRBOLA

- **Ejes real y virtual:** son perpendiculares y se cortan en su punto medio O, centro de la hipérbola. Si ambos son iguales la hipérbola se denomina equilátera. El segmento $\overline{AB}$ es el eje real o eje mayor, y el eje virtual o menor es imaginario.
- **Distancia focal $\overline{FF'}$:** es la longitud entre los focos. Los focos están siempre en el eje real.
- **Radios vectores:** los segmentos que unen los puntos de la curva con los focos se denominan radios vectores.
- **Asíntotas:** son dos rectas tangentes a la curva en el infinito. Son simétricas respecto a los ejes y se cortan en el centro O. En la hipérbola equilátera forman *45°* con los ejes y *90°* entre ellas.
- **Circunferencias focales:** tienen por centro los focos y radio $\overline{AB}$.
- **Circunferencia principal:** tiene por centro el centro de la elipse y diámetro $\overline{AB}$.

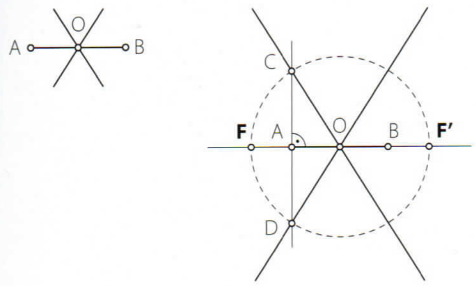




• DETERMINACIÓN DE LOS FOCOS:

Conocidas las asíntotas y el eje real $\overline{AB}$ es posible determinar los focos.

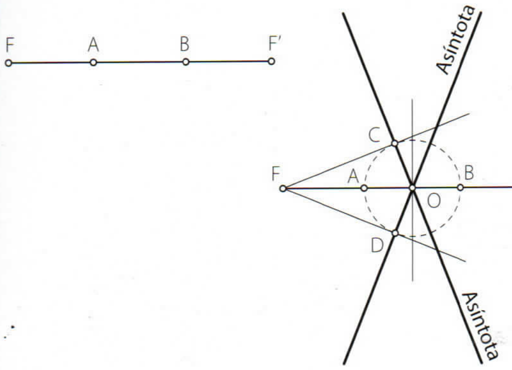
- Por el vértice A se traza la perpendicular al eje real, ésta corta a una de las asíntotas en los puntos C y D.
- Con centro en O, centro de la hipérbola, y radio $\overline{OC}$, trazamos una circunferencia que cortará al eje real en dos puntos, F y F', focos de la hipérbola buscados.



• DETERMINACIÓN DE LAS ASÍNTOTAS:

Conocidos el eje real $\overline{AB}$ y los focos:

- Se determinan trazando la circunferencia principal con centro en O.
- Se dibujan rectas tangentes desde el foco F a la circunferencia, determinando así los puntos de tangencia C y D. Se une estos puntos con O y se obtienen las dos asíntotas.

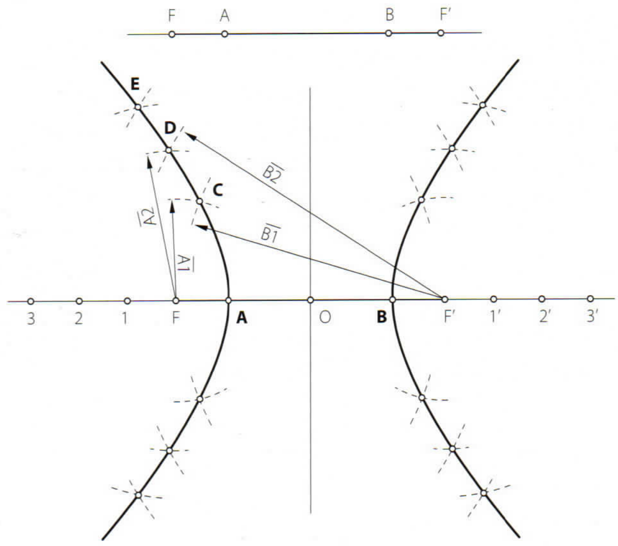


11.3.2. TRAZADO DE LA HIPÉRBOLA

• MÉTODO DE LOS RADIOS VECTORES (POR PUNTOS):

Dado el eje real $\overline{AB}$ y la distancia focal $\overline{FF'}$.

- Se toma un punto 1 cualquiera en el eje real $\overline{AB}$, situado a la izquierda del foco F o a la derecha del foco F' y con radios $\overline{A1}$ y $\overline{B1}$ y centros en F y F', respectivamente se trazan dos arcos que se cortan en un punto de la hipérbola.
- Se repite el proceso tantas veces como puntos se deseen conseguir y se unen éstos con plantilla o a mano alzada.



• MÉTODO DE LOS HACES PROYECTIVOS:

Dado el eje real $\overline{AB}$ y la distancia focal $\overline{FF'}$.

- Trazamos los dos ejes perpendiculares y situamos los datos; los vértices A, B y los focos F y F'.
- Hallamos un punto P de la hipérbola por el método de puntos por ejemplo.
- Trazamos el rectángulo A-O-P-Q. Se dividen los lados $\overline{PQ}$ y $\overline{PO}$ en un número de partes iguales.
- Unimos las divisiones de $\overline{PQ}$ con el vértice A y las del lado $\overline{PO}$ con el foco F'.
- Los puntos de intersección de los rayos homónimos de estos dos haces son puntos de la hipérbola. Así $\overline{F'3}$ y $\overline{A3}$ se cortan en un punto de la hipérbola.
- Para determinar la otra parte de esta rama de la hipérbola de determinan los puntos simétricos de los anteriores y se procede de la misma forma.