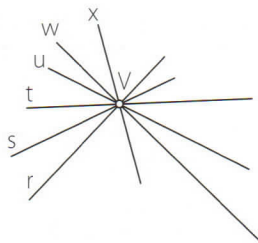
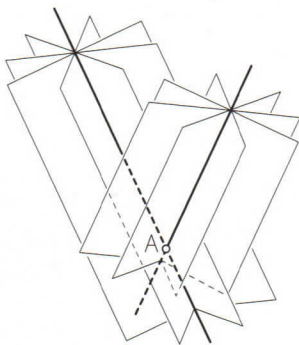


- **Radiación de rectas:** es el conjunto de rectas del espacio que pasan por un punto V.



- **Radiación de planos:** es el conjunto de planos que pasan por un punto A.



3.1.3. FORMAS GEOMÉTRICAS DE 3ª CATEGORÍA

Es el conjunto de todos los puntos, las rectas y los planos del espacio, incluidas las formas de 1ª y 2ª Categoría.

3.2. SERIES LINEALES

RAZÓN SIMPLE DE TRES PUNTOS

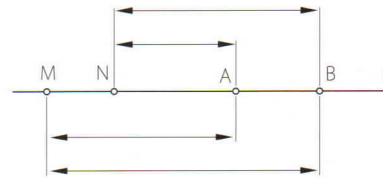
Dados dos puntos fijos A y B en una recta r orientada (que tiene sentido positivo y negativo), la razón simple h es el cociente o razón de distancias entre el primer punto P y los otros dos fijos A y B. Se llama razón simple de tres puntos P, A y B a la relación:



$$h = (PAB) = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$$

RAZÓN DOBLE DE CUATRO PUNTOS

Dados dos puntos fijos A y B en una recta r orientada, se llama razón doble de cuatro puntos M, N, A y B al cociente de las razones simples K de los dos primeros respecto a los otros dos:



$$K = (MNAB) = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$$

A cada grupo de cuatro puntos que se puede elegir se denomina cuaterna anarmónica.

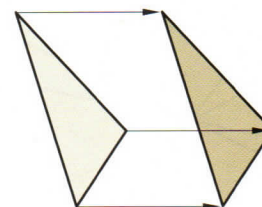
3.3. TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Una transformación geométrica es una correspondencia entre elementos de dos formas geométricas. El concepto de transformación en geometría es equivalente al concepto de función en álgebra.

Las transformaciones geométricas pueden agruparse en tres tipos: isométricas, isomórficas y anamórficas.

3.3.1. TRANSFORMACIONES ISOMÉTRICAS

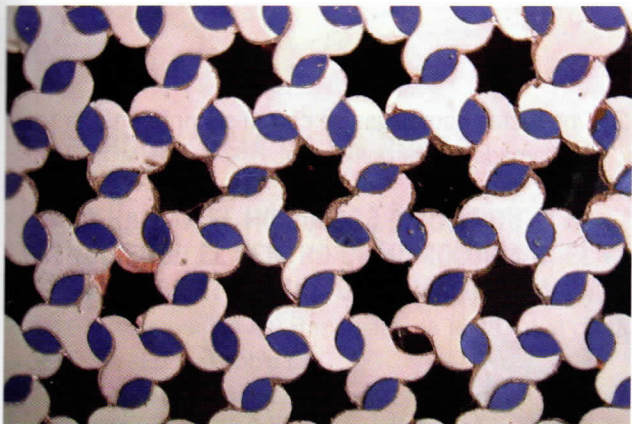
Se producen cuando se conservan las magnitudes de los segmentos y los ángulos entre la figura original y la transformada. Son de este tipo los giros, las traslaciones y las simetrías. Estas transformaciones también reciben el nombre de movimientos.



TRASLACIÓN



SIMETRÍA RADIAL



GIRO

Prefijo **iso-**: significa *igual*.

Prefijo **ana-**: del griego *inversión*. En dibujo técnico y en arte se utiliza el concepto "anamorfosis" del griego *ana-*, inversión, y *-morphe*, relativo a la forma.

Sufijo **-métrico, ca**: *perteneciente o relativo al metro* (unidad de longitud).

Sufijo **-mórfico, ca**: *perteneciente o relativo a la forma*.

3.3.2. TRANSFORMACIONES ISOMÓRFICAS

Se producen cuando se conservan las formas, pudiendo establecerse entre las dos figuras relaciones de proporcionalidad. Son de este tipo la homotecia y la semejanza.



SEMEJANZA



HOMOTECIA

3.3.3. TRANSFORMACIONES ANAMÓRFICAS

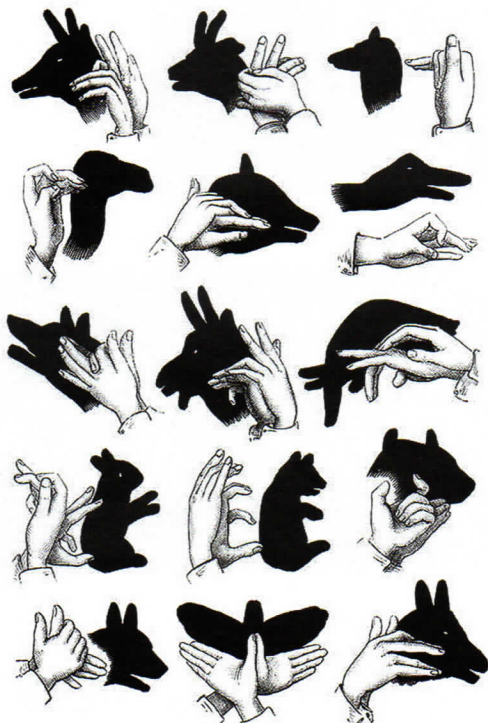
Se producen cuando varían las magnitudes de los segmentos y ángulos entre la figura original y la transformada. Son de este tipo la equivalencia, la homología, la afinidad y la inversión.



FIGURAS EQUIVALENTES

3.3.4. TRANSFORMACIONES PROYECTIVAS

Dos formas son proyectivas si una puede obtenerse de la otra mediante proyecciones y secciones. Proyectar consiste en hacer pasar por un elemento cualquiera una recta o plano que al intersectar con una recta o plano de proyección definirá la proyección del elemento, llamada sección. Podemos proyectar desde un punto (centro de proyección) o desde una recta (recta de proyección). Aquí aparecerán los elementos impropios (punto, recta o plano), que son los que se encuentran en el infinito.



SOMBRAS CHINAS.

3.3.5. HOMOGRAFÍA

La homografía es una transformación proyectiva que establece una correspondencia entre dos formas geométricas, de forma que a un elemento, punto o recta, de una de ellas le corresponde otro elemento de la misma especie de la otra.

La **correlación** es la correspondencia entre elementos de distinta especie, de forma que a un punto le corresponde una recta; a una recta le corresponde un plano; etc.

Son transformaciones homográficas; la homología, la afinidad, la homotecia, la simetría, la traslación y el giro. En el curso pasado ya estudiamos la simetría, la traslación, el giro y la homotecia. En este curso estudiaremos las restantes, homología y afinidad.

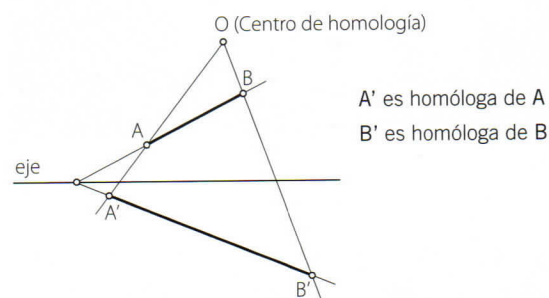
3.3.6. PRODUCTO DE TRANSFORMACIONES

Se denomina así a las obtenidas por la aplicación sucesiva de dos o más transformaciones siguiendo un determinado orden.

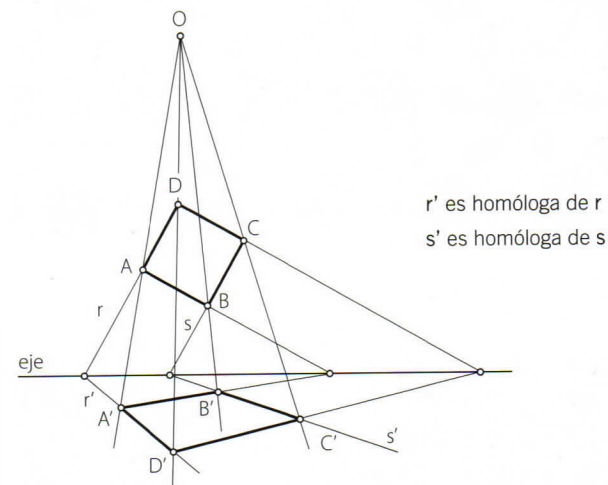
3.4. HOMOLOGÍA

La homología es una transformación homográfica que cumple las siguientes leyes:

1.^a Dos puntos homólogos están alineados con un punto fijo llamado centro de homología O .



2.^a Dos rectas homólogas se cortan siempre en una recta fija llamada eje de homología.



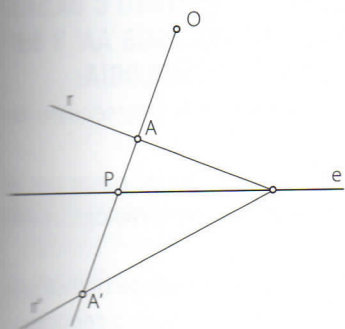
3.^a El eje, por tanto, es el lugar geométrico de los puntos que son homólogos de sí mismos (puntos dobles).

Los puntos que se proyectan en sí mismos son el origen O (denominado centro de la proyección o de homología) y los puntos de la recta base. Las rectas que se transforman en sí mismas son la recta base (denominada eje de la proyección o de homología) y todas las rectas que pasan por el origen.

Estas propiedades motivan que se denomine a esta proyección como homología y que a un punto y su proyección (A y A') se les llamen puntos homólogos.

3.4.1. COEFICIENTE DE HOMOLOGÍA

Es la razón doble que forman dos puntos homólogos A y A' , el centro O y el punto P de intersección de la recta AA' con el eje e .

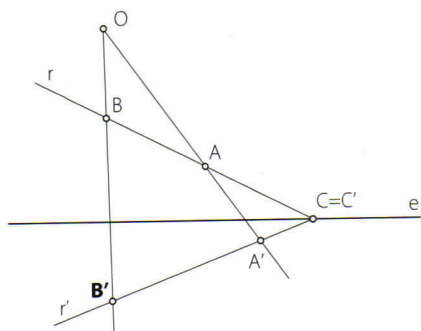


$$K = (OPAA') = \frac{(\overline{OAA'})}{(\overline{PAA'})} = -\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PA'}}$$

3.4.2. HOMOLOGÍA DE UN PUNTO

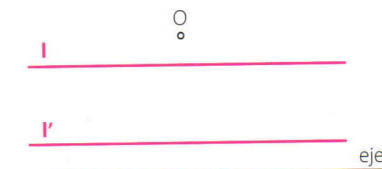
• PARA HALLAR EL HOMÓLOGO DE UN PUNTO B CONOCIENDO EL CENTRO DE HOMOLOGÍA O, EL EJE e Y UN PAR DE PUNTOS HOMÓLOGOS A Y A' :

- Se unen los puntos A y B mediante la recta r que corta al eje en el punto doble $C=C'$.
- El punto $C=C'$ se une con el punto A' mediante la recta r' , homóloga de la recta r .
- Se une el centro O con el punto B hasta cortar a la recta r' en el punto B' solución.



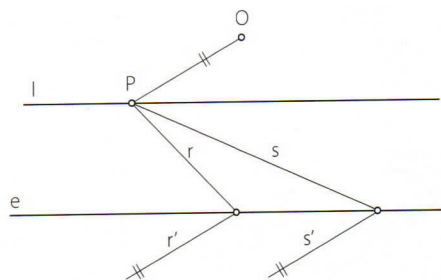
3.4.3. RECTAS LÍMITE

En una homología podemos calcular el punto homológico de un punto impropio o del infinito. Las rectas límite son dos y son paralelas al eje.

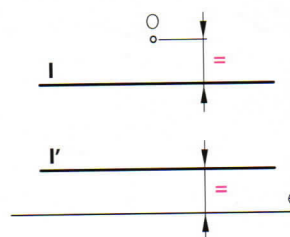


l y l' Rectas límite
 e Eje

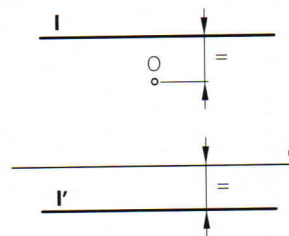
Todas las rectas que se cortan en un mismo punto P de la recta límite, tienen sus homólogas paralelas a la dirección $\overline{OP}$.



La distancia de una de las rectas límite al centro de homología es la misma que hay desde la otra recta límite al eje de homología.

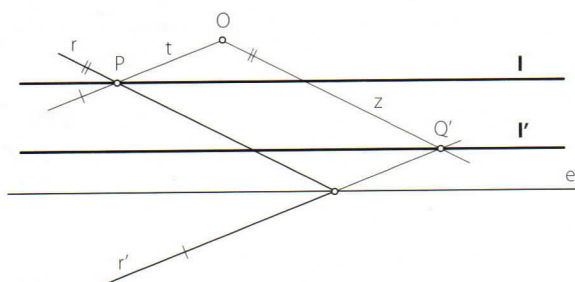


Las rectas límite están siempre entre el centro O y el eje e , como hemos visto anteriormente, o bien fuera de ellos.



• **DADAS DOS RECTAS HOMÓLOGAS r Y r' , EL CENTRO O Y EL EJE e , HALLAR LAS RECTAS LÍMITE:**

- Por el centro de homología O se traza una paralela t a la recta r' hasta cortar a la otra recta r en el punto P (homólogo del punto P' del infinito de r').
- Por P se traza la recta límite l paralela al eje.
- Por el centro de homología O se traza la paralela z a la recta r hasta cortar a la otra recta r' en el punto Q' (homólogo del punto Q del infinito de r).
- Por Q' se traza la recta límite l' paralela al eje.



3.4.4. DATOS PARA DEFINIR UNA HOMOLOGÍA

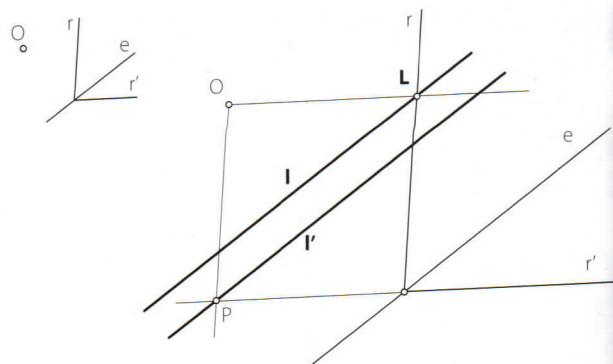
Una homología se puede determinar conociendo los siguientes datos.

- El centro O , el eje e y una pareja de puntos homólogos A y A' (resuelto anteriormente).
- El centro, el eje y un par de rectas homólogas.
- Dos parejas de puntos homólogos $A-A'$ y $B-B'$ y la dirección d del eje de homología.
- El centro O , el eje e y una recta límite.
- El eje, una recta límite y dos puntos homólogos.
- El centro y las dos rectas límite.

Vemos ejemplos dibujados de los casos b, c, d, e y f.

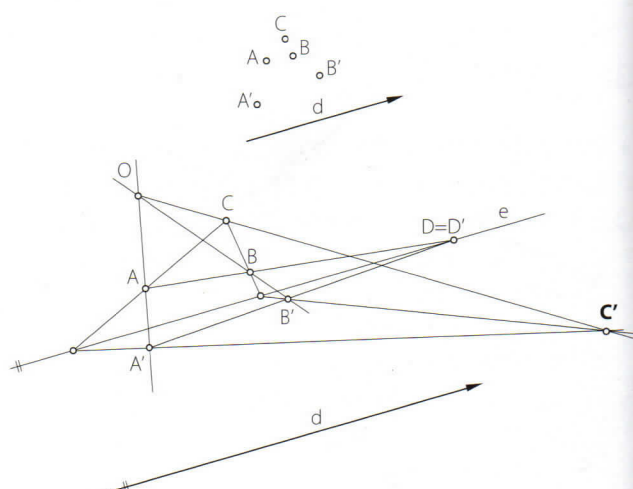
b) DETERMINAR LA RECTA LÍMITE CONOCIENDO EL CENTRO, EL EJE Y UN PAR DE RECTAS HOMÓLOGAS:

- Si r y r' son dos rectas homólogas (que se han de cortar en el eje), para determinar la recta límite, basta con trazar la paralela a r' por el centro O , la cual corta a r en L .
- La paralela al eje por L es la recta límite l .
- De la misma manera, si trazamos por el centro O la paralela a r , ésta cortará a r' en P . La paralela al eje por P será la otra recta límite l' .



c) HALLAR EL HOMÓLOGO DE UN PUNTO C DADAS DOS PAREJAS DE PUNTOS HOMÓLOGOS AA' Y BB' Y LA DIRECCIÓN d DEL EJE DE HOMOLOGÍA:

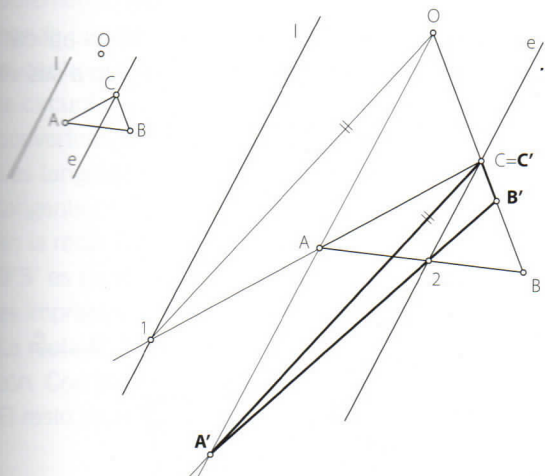
- El centro O de homología se halla en la intersección de los rayos AA' y BB' .
- El eje e , paralelo a la dirección dada, ha de pasar por el punto $D=D'$, donde se cortan las rectas homológicas AB y $A'B'$.
- Ahora que conocemos el centro O y el eje de homología e , el proceso es el mismo que hemos descrito conociendo el centro, el eje y una pareja de puntos homólogos.



d) HALLAR LA FIGURA HOMOLÓGICA DEL TRIÁNGULO $A-B-C$ DADOS EL CENTRO O , EL EJE e Y LA RECTA LÍMITE l :

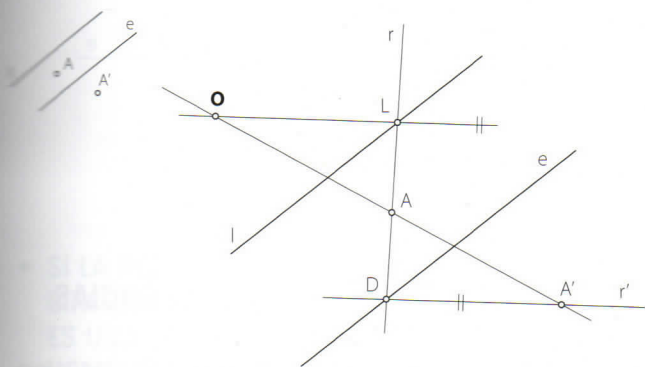
- El punto C es un punto doble por estar situado en el eje por lo tanto $C=C'$.
- Prolongamos el lado $\overline{AC}$ hasta que corte a la recta límite l en el punto 1.
- Unimos el punto 1 con el centro de homología O .
- Por el punto $C=C'$ trazamos una paralela a la recta anterior $\overline{O1}$, unimos O con A y el punto de corte con la recta anterior nos determina el punto A' homólogo del A .

- Unimos el punto A' con el punto 2 del lado $\overline{AB}$, esta recta corta en B' a la recta $\overline{OB}$, teniendo resuelto el problema.



e) DETERMINAR EL CENTRO DE LA HOMOLOGÍA CONOCIENDO EL EJE, UNA RECTA LÍMITE Y DOS PUNTOS HOMÓLOGOS:

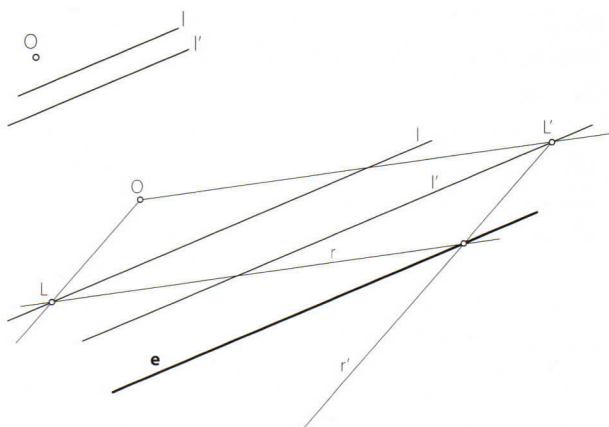
- El centro O a determinar ha de estar en la recta AA' , que pasa por los puntos homólogos dados.
- Tomemos una recta auxiliar r pasando por A , la cual corta al eje en D y a la recta límite en L . La homóloga r' de r es la recta $A'D$.
- La paralela a r' por L corta a AA' en el centro de homología O , la solución.



f) DETERMINAR EL EJE CONOCIENDO EL CENTRO Y LAS RECTAS LÍMITE:

Sean O , l y l' el centro y las rectas límites dadas.

- Trazamos una recta auxiliar r , que corta a l en L ; su recta homóloga r' tiene la dirección de OL .
- La paralela a r por O corta a l' en L' y r' es la paralela a OL por L' .
- En el punto de corte de r y r' está el eje, que queda así determinado.



HOMOLOGÍAS ESPECIALES

Si en una homología, el centro, el eje, o ambos se hallan en el infinito, resultan los llamados casos límite de homología, los cuáles ya estudiamos en el curso pasado y que ahora repasaremos.

Fractal

Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o irregular, se repite a diferentes escalas. El término fue propuesto por el matemático Benoît Mandelbrot en 1975 y deriva del latín *fractus*, que significa quebrado o fracturado. Muchas estructuras naturales son de tipo fractal. Si bien el término "fractal" es reciente, los objetos hoy denominados fractales eran bien conocidos en matemáticas desde principios del siglo XX.

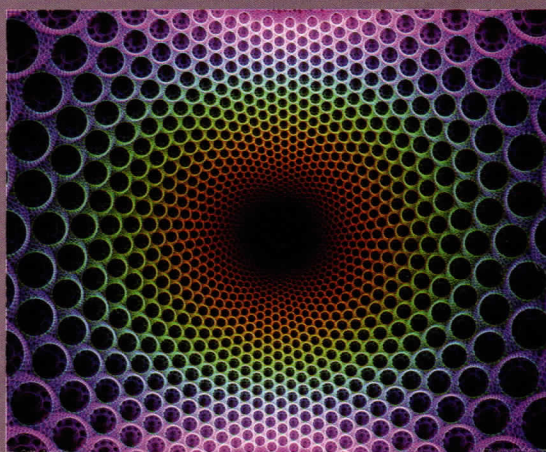
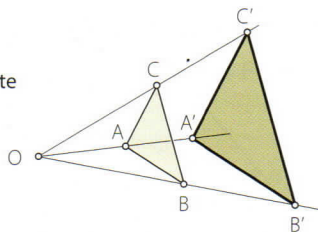


IMAGEN FRACTAL DE ANDREW OSTIN, 2006.

- **CUANDO EL EJE ESTÁ EN EL INFINITO:**

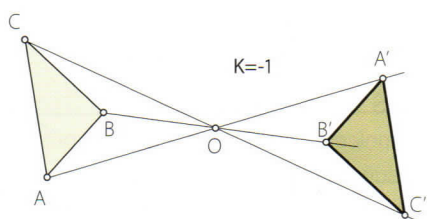
La homología se convierte en una homotecia de centro O y razón constante.

$$K = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \text{constante}$$



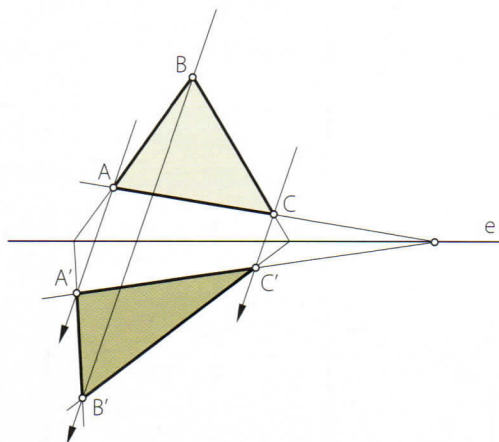
- **SI EL VALOR DE ESTA RAZÓN ES -1:**

Tenemos una simetría central.



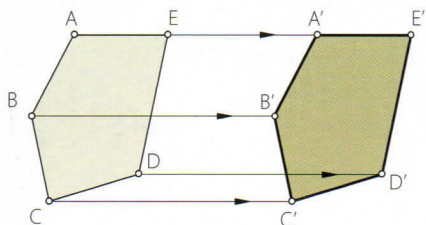
- **CUANDO EL CENTRO ESTÁ EN EL INFINITO:**

A este caso llamado afinidad le dedicamos un estudio más exhaustivo a continuación, dada su importancia en el estudio de los sistemas de representación.



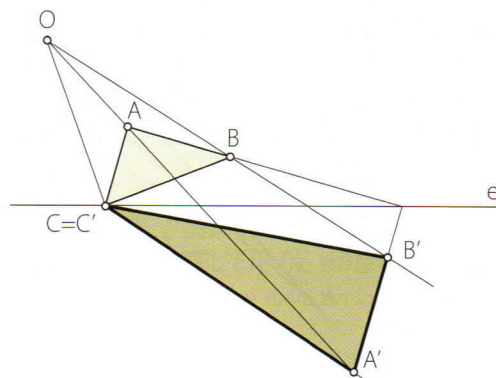
- **CUANDO CENTRO Y EJE ESTÁN EN EL INFINITO:**

La homología se convierte en una traslación cuya dirección es la de escape del punto O para hacerse impropio.

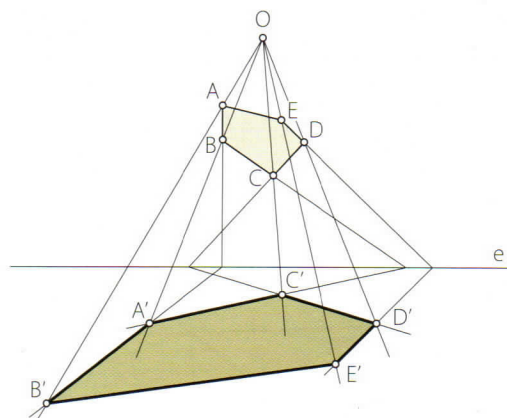


3.4.5. CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS HOMÓLOGAS

Para hallar el homólogo de un polígono, basta aplicar las propiedades de la homología que hemos visto a sus vértices y aristas.



- **ENCONTRAR EL HOMÓLOGO DEL POLÍGONO DE 5 LADOS PROPUESTO CONOCIENDO EL EJE, EL CENTRO Y UN PAR DE PUNTOS HOMÓLOGOS:**



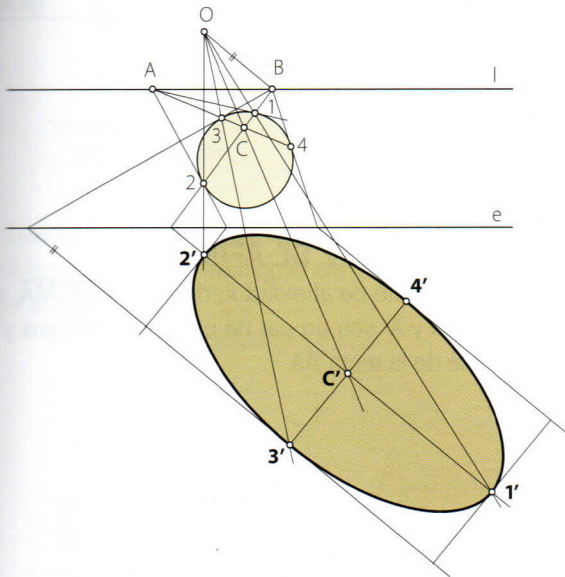
3.4.6. HOMOLOGÍA DE CIRCUNFERENCIAS

La homóloga de una circunferencia siempre es una curva cónica (elipse, parábola e hipérbola), pudiendo presentarse diferentes casos, según la relación de la curva con la recta límite.

- **SI LA RECTA LÍMITE ES EXTERIOR A LA CIRCUNFERENCIA, LA FIGURA HOMOLÓGICA ES UNA ELIPSE:**

- Tomamos un punto A sobre la recta límite l y trazamos desde él las tangentes a la circunferencia, obteniendo los puntos de tangencia 1 y 2.

- Unimos y prolongamos 1 y 2, obteniendo B sobre l.
- Por B trazamos otras dos tangentes a la circunferencia, obteniendo los puntos 3 y 4. La cuerda $\overline{12}$ se corta con la cuerda $\overline{34}$ en el punto C, cuyo homólogo será el centro de la elipse. C es el polo de l con respecto a la circunferencia, y las cuerdas (rectas conjugadas) se convertirán en diámetros conjugados de la elipse.
- Las tangentes se conservan, así que la elipse final será tangente en 1' en la recta A'1', a 2' en la recta A'2', a 3' en la recta B'3' y a 4' en la recta B'4'.
- B'3' es paralela a OB (ya que como B pertenece a l, B' es impropio). Uniendo O con 3 obtenemos 3'.
- La recta B'2' también es paralela a $\overline{OB}$ por la misma razón. Con ella obtenemos 2' y C'.
- El resto de puntos puede obtenerse por simetría.

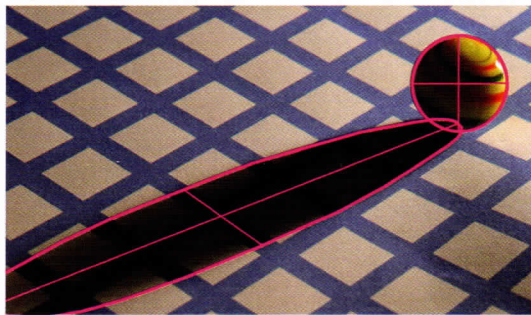
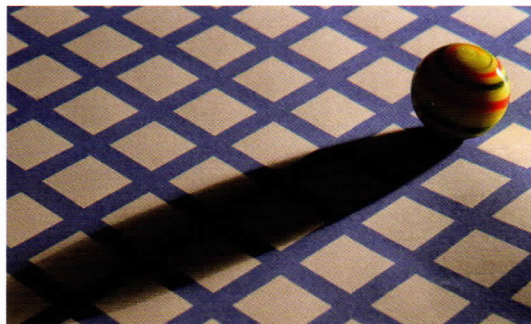
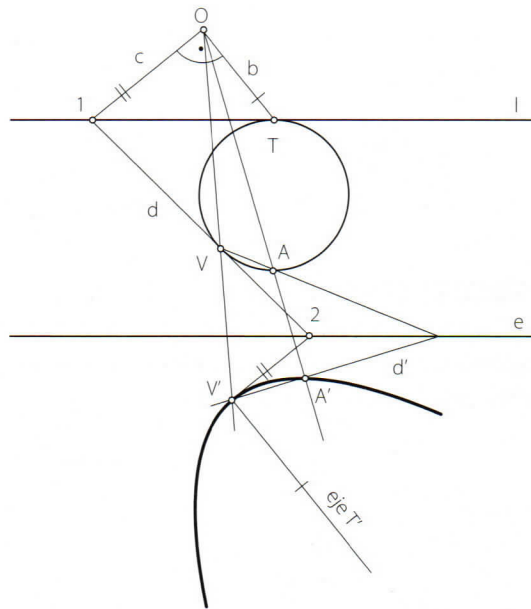


• SI LA RECTA LÍMITE ES TANGENTE A LA CIRCUNFERENCIA, LA FIGURA HOMÓLOGICA ES UNA PARÁBOLA, YA QUE TIENE UN PUNTO HOMÓLOGO IMPROPIO:

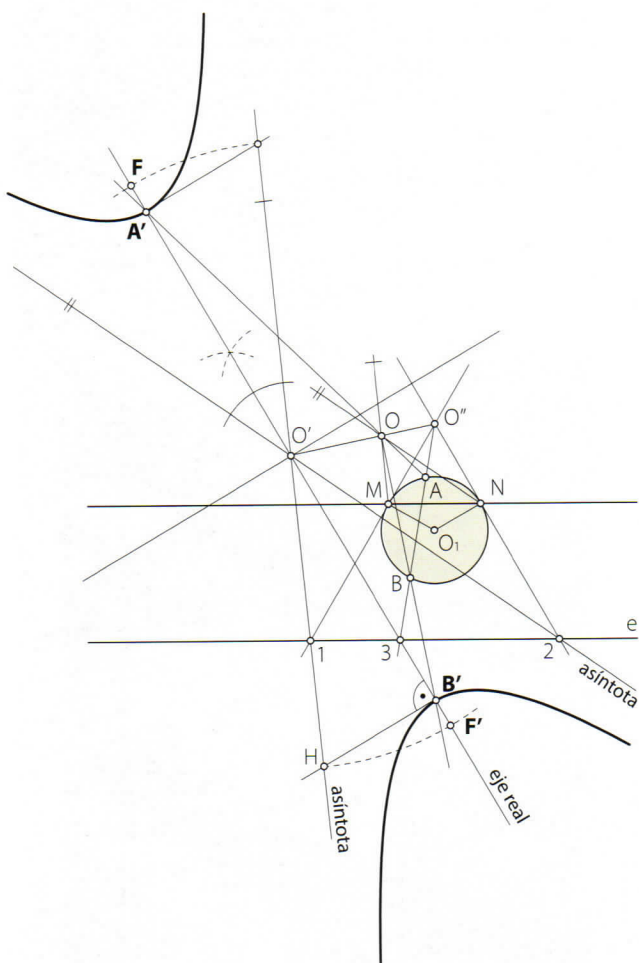
- Se pasa por O, centro de proyección, una recta b hasta el punto de contacto T de la circunferencia con la recta límite, ya que en esa dirección está el punto del infinito de la parábola, es decir, la línea paralela al eje de simetría. Si el eje sigue la dirección de O al punto T límite, por una perpendicular a esta recta pasará la dirección de la directriz.
- Se hace por tanto la perpendicular c a la recta b por el punto O y desde la intersección 1 de esta última recta con la recta límite, hacemos una recta tangente d a

la circunferencia para obtener el punto que será el homólogo del vértice de la parábola, el punto de tangencia V.

- Donde ésta recta d corta en el eje, punto 2, hacemos una paralela d' a c. Esta línea es la directriz de la parábola, pasa por el vértice V' y es tangente a la curva en ese punto, por serlo V a la circunferencia.
- Por V' se traza la recta paralela a b, esta será el eje de la parábola.
- Para calcular los homólogos de todos los demás puntos de la circunferencia procedemos como en cualquier homología, como ejemplo se muestra el punto A.



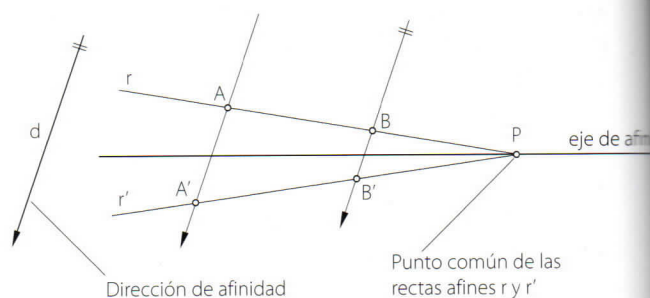
- **SI LA RECTA LÍMITE ES SECANTE A LA CIRCUNFERENCIA, LA FIGURA HOMOLÓGICA ES UNA HIPÉRBOLA, Y CADA UNA DE LAS PARTES EN QUE ESTÁ DIVIDIDA LA CIRCUNFERENCIA SE CONVIERTE EN UNA DE LAS RAMAS DE ESA HIPÉRBOLA:**
 - Los puntos M y N se convertirán en impropios, y las tangentes a la circunferencia por ellos se convertirán por tanto en las direcciones de las asíntotas (tangentes en puntos impropios). Estas tangentes se cortan en O'' , que se convertirá en el homólogo del centro de la hipérbola.
 - Trazamos las asíntotas y O' , para cual nos hemos ayudado de I' .
 - Las bisectrices de las asíntotas son los ejes.
 - Si hallamos los homólogos de los ejes, uno de ellos corta a la circunferencia en los puntos A y B, que se convertirán en los vértices de la hipérbola.
 - Con estos elementos podemos obtener los focos, sabiendo que el corte de la circunferencia principal con las asíntotas está en una circunferencia cuyo diámetro es la recta que une el centro con un foco.



3.5. AFINIDAD

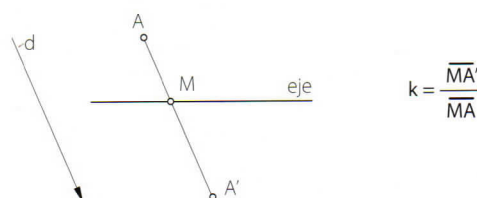
La afinidad es una homología con el centro impropio, es decir, en el infinito. Es una transformación homográfica que cumple las siguientes condiciones:

- 1.^a La recta que une dos puntos afines siempre es paralela a una dirección dada, llamada dirección de la afinidad.
 - 2.^a Dos rectas afines se cortan siempre en un punto común de una recta llamada eje de la afinidad.
- En afinidad no existen rectas límite.

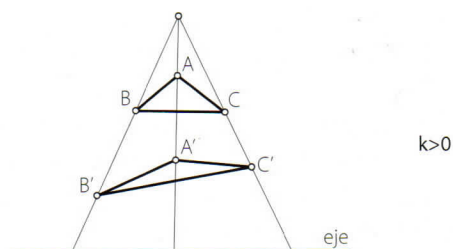


3.5.1. COEFICIENTE DE AFINIDAD

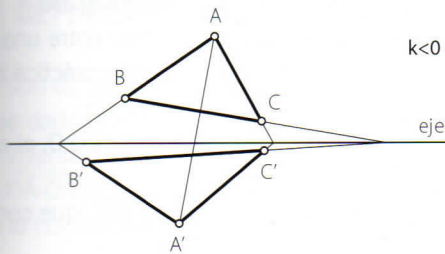
Existe un coeficiente de afinidad k , donde $k = \overline{MA'}/\overline{MA}$, razón en la que A y A' son un par de puntos homólogos y M el punto doble de la recta AA' .



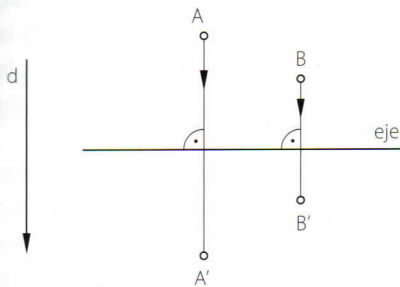
Si el valor de k es positivo, una pareja de elementos afines se encontrarán en el mismo semiplano respecto del eje.



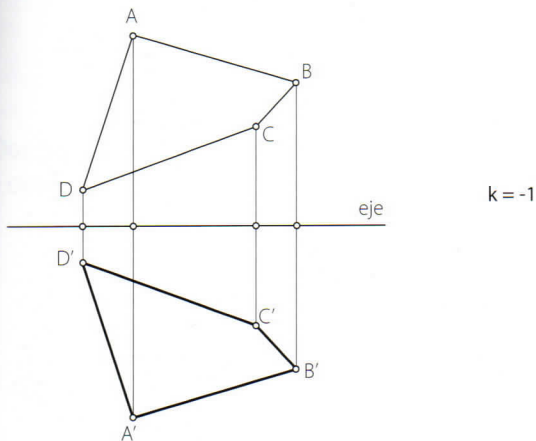
Si el valor de k es negativo cada elemento estará situado al distinto lado de su afín respecto del eje.



Quando la dirección de afinidad y el eje son perpendiculares, la afinidad es ortogonal.



Quando en una afinidad ortogonal $k=-1$, la afinidad es también una simetría axial cuyo eje de simetría es también el de afinidad.

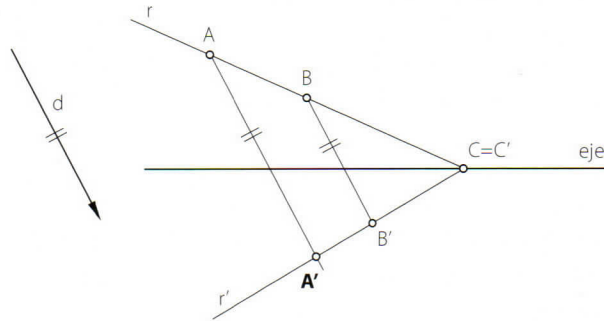


3.5.2. AFINIDAD DE UN PUNTO

Para hallar el punto afín A' de A conociendo la dirección de afinidad d , el eje e y un par de puntos afines B y B' :

- Unimos los puntos A y B mediante la recta r que corta al eje en el punto $C=C'$.
- Este punto $C=C'$ se une con el punto B' mediante la recta r' , afín de r .

- Por A se traza la paralela a la dirección de afinidad hasta cortar a r' en el punto A' buscado.



Reglas o plantillas de curvas

Existen multitud de modelos de reglas de curvas en el mercado. Con ellas podemos dibujar todo tipo de curvas abiertas y cerradas perfectas, que de otra manera habría que dibujar a mano alzada.

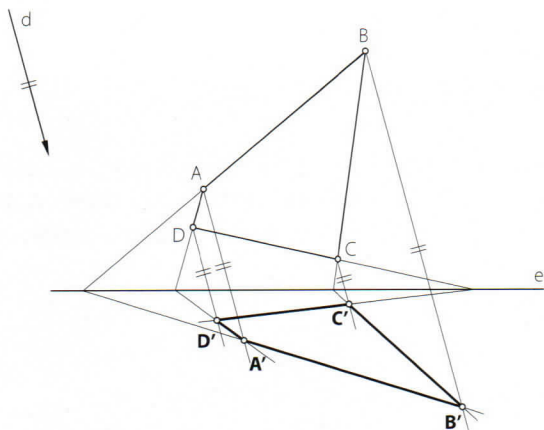


3.5.3. CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS AFINES

La afinidad puede venir definida por:

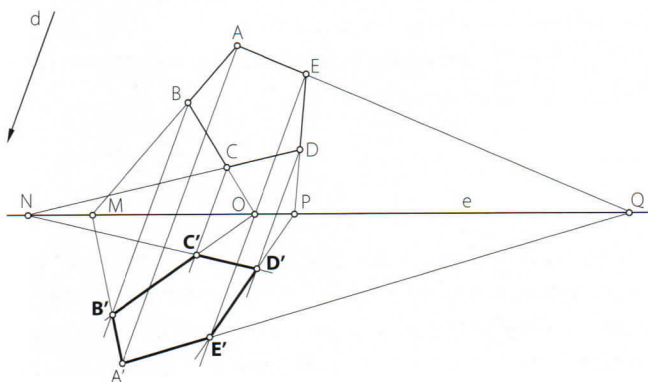
- El eje y dos pares de puntos afines.
- Tres pares de puntos afines.
- Dos pares de rectas afines.

Para hallar el afín de un polígono, no hay más que aplicar el concepto de afinidad a sus vértices y aristas. Normalmente, como datos de la afinidad se nos proporcionará el eje, la dirección y una pareja de puntos afines. En el siguiente ejemplo conocemos e , d , A y A' .



• CONSTRUIR LA FIGURA AFÍN DEL POLÍGONO A-B-C-D-E, DADAS LA DIRECCIÓN DE AFINIDAD d , EL EJE e Y UN PUNTO AFÍN A' :

- Se une el punto A con otro cualquiera, por ejemplo el B , hasta cortar al eje en el punto M .
- El punto M se une con A' mediante una recta que corta al rayo paralelo a la dirección de afinidad trazado por B en el punto B' .
- Se une el punto C con el punto B y se siguen los mismos pasos anteriores para determinar los puntos afines al resto de vértices.



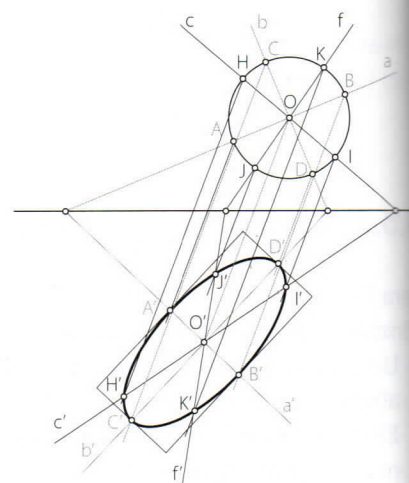
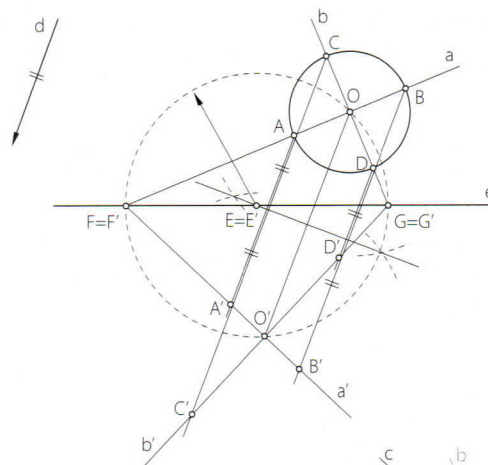
3.5.4. AFINIDAD EN LAS CURVAS

• ELIPSE AFÍN DE UNA CIRCUNFERENCIA:

La relación de afinidad que se establece entre una circunferencia y una elipse tiene una aplicación práctica muy importante en los sistemas de representación.

Dada la circunferencia de centro conocido O , el eje e y un punto O' afín de O :

- Trazamos la mediatriz del segmento $\overline{OO'}$, que corta al eje en el punto E .
- Con centro en E y radio $\overline{EO}$ se traza una circunferencia que corta al eje en los puntos $F=F'$ y $G=G'$.
- Las rectas a y b que unen estos puntos con O tienen sus afines en las rectas a' y b' que unen $F=F'$ y $G=G'$ con O' .
- Por los puntos A, B, C y D de intersección de las rectas a y b con la circunferencia se trazan paralelas a la dirección de afinidad d , obteniendo así los ejes de la elipse $\overline{A'E}$ y $\overline{C'D'}$.
- Para trazar la elipse por el centro O' , se trazan rectas cualquiera (f y c) que cortan a la circunferencia en dos puntos cada una (K, J y H, I) hallando los puntos afines de éstos determinaremos más puntos para dibujar la elipse.



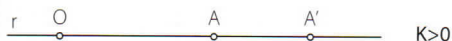
3.6. INVERSIÓN

3.6.1. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

La inversión es una transformación geométrica anamórfica en la que dado un punto O y una constante K se dice que A' es el inverso de A cuando está en la misma recta r y se cumple $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = K$. Al punto O se le llama centro de inversión y a la constante K , potencia de inversión.



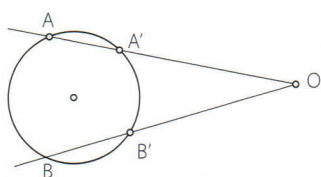
Si en la inversión $K > 0$ entonces los puntos A y A' están al mismo lado de O y recibe el nombre de inversión positiva.



Si el centro de inversión está entre A y A' , hablamos de inversión negativa y $K < 0$.



Dos pares de puntos inversos A, A' , B y B' determinan una circunferencia.

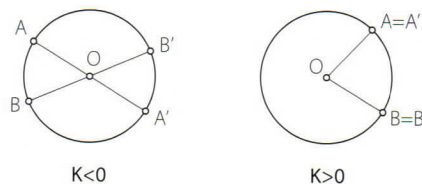


3.6.2. ELEMENTOS Y FIGURAS DOBLES EN UNA INVERSIÓN

CIRCUNFERENCIAS DE AUTOINVERSIÓN

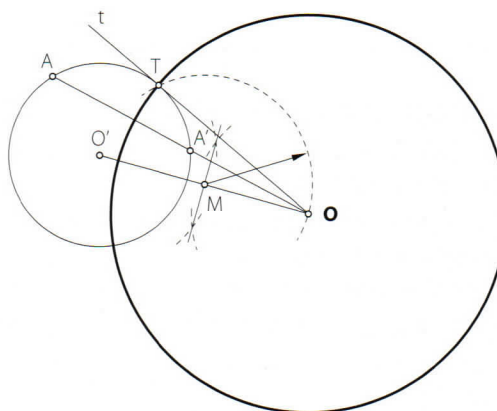
Gráficamente, el valor de la inversión lo representa la circunferencia de autoinversión o de puntos dobles. Es la formada por los puntos que están a una distancia del centro de inversión igual a la raíz de K . Son dobles porque

cada uno se transforma en sí mismo. Con valor K negativo, cada punto es inverso del diametralmente opuesto, por tanto los puntos no son dobles, pero la circunferencia sí.



• DETERMINACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA DE AUTOINVERSIÓN DADOS EL CENTRO DE INVERSIÓN O Y UNA PAREJA DE PUNTOS INVERSOS A Y A' (2 MÉTODOS):

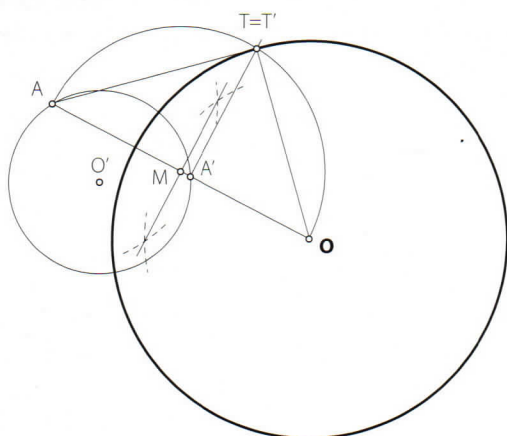
Método 1: se dibuja una circunferencia que pase por los puntos A y A' y, desde O se traza una recta t tangente a ella. Según lo explicado anteriormente $\overline{OT}$ es el radio de la circunferencia de autoinversión.



Método 2: si consideramos T como un punto doble, T' coincidirá con él y se habrá de cumplir: Como $\overline{OT} = \overline{OT'}$, la expresión anterior se transforma en $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OT} \cdot \overline{OT'}$, o lo que es lo mismo:

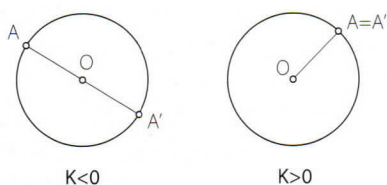
$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OT} \cdot \overline{OT} \implies \frac{\overline{OA}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OA'}}$$

Expresión que nos indica que $\overline{OT}$ es media proporcional de los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OA'}$. Aplicando el teorema del cateto en un triángulo rectángulo se obtiene el valor de $\overline{OT}$, que es el radio de la circunferencia de autoinversión.



Teniendo en cuenta que un elemento es doble cuando coincide con su inverso, en toda inversión son dobles los siguientes elementos:

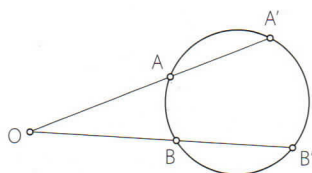
1. La circunferencia de autoinversión, independiente de que K sea positivo o negativo. Además, si $K > 0$ también son dobles todos sus puntos.



2. Las rectas que pasan por el centro de inversión.



3. Las circunferencias cuya potencia de un punto O (centro de inversión) respecto a la circunferencia que contiene a dos puntos inversos sea igual a la potencia de inversión K , para $K > 0$.

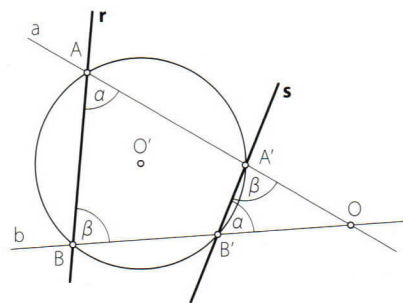


$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = K$$

$$K > 0$$

3.6.3. RECTAS ANTIPARALELAS

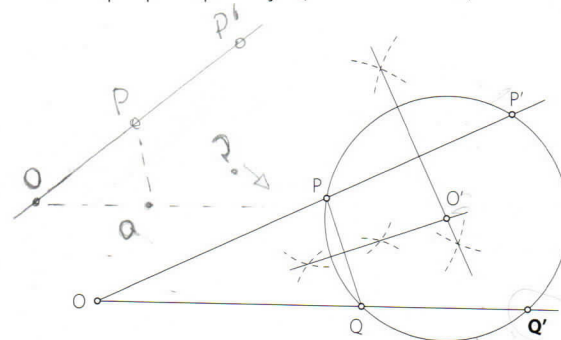
Dos rectas inversas que unen entre sí dos puntos A y B y sus inversos A' y B', son antiparalelas de las rectas que unen los pares de puntos inversos AA' y BB', ya que cuatro rectas son antiparalelas cuando en el cuadrilátero que forman al cortarse, cada ángulo interior es igual al ángulo exterior del vértice opuesto. Los puntos A, B, A' y B' determinan un cuadrilátero inscriptible en el cual se cumple la condición de que sus ángulos opuestos son suplementarios.



3.6.4. DETERMINACIÓN DEL INVERSO DE UN PUNTO DADO

- PARA CALCULAR EL PUNTO INVERSO DE Q, EN UNA INVERSIÓN DADA POR EL CENTRO O Y EL PAR DE PUNTOS INVERSOS P Y P', NO ALINEADOS CON Q':

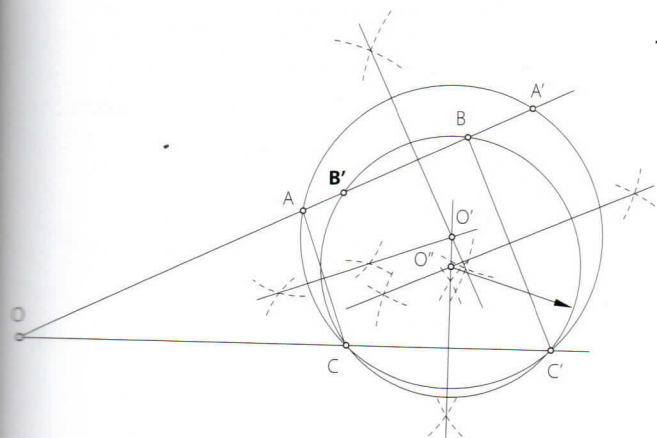
- Trazamos las mediatrices de P con P' y con Q, obteniendo un punto equidistante O. Trazamos con este centro una circunferencia que pasa por los tres puntos, y una recta que pasa por O y Q, localizamos Q', inverso de Q.



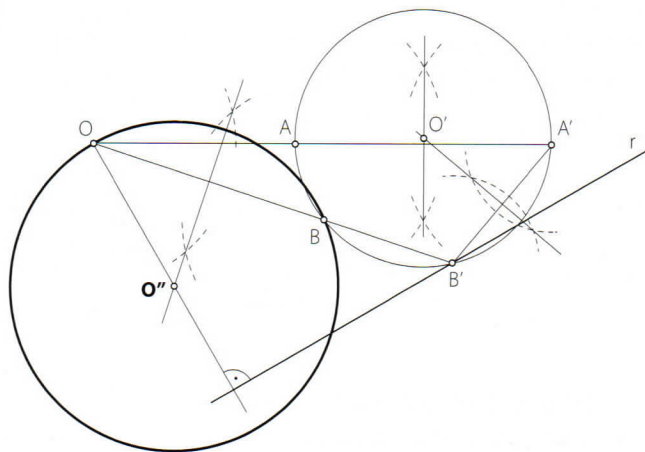
- PARA CALCULAR EL PUNTO INVERSO DE B, EN UNA INVERSIÓN DADA POR EL CENTRO O Y EL PAR DE PUNTOS INVERSOS A Y A', ALINEADOS CON B:

- Elegimos un punto C cualquiera, no alineado con A y A', se halla el inverso C' trazando la circunferencia que pasa por A, A' y C.

- Se halla el inverso B' trazando la circunferencia que pasa por B , C y C' .



- Se traza la mediatriz del segmento $\overline{OB}$ hasta cortar a la perpendicular anterior en O'' , centro de la circunferencia solución.



3.6.5. FIGURAS INVERSAS

Formas de determinar una inversión:

- Dados el centro y el valor de la inversión.
- Dados el centro y un par de puntos inversos.
- Dados dos pares de puntos inversos no alineados.

• FIGURA INVERSA DE UNA RECTA QUE PASA POR EL CENTRO DE INVERSIÓN:

La recta inversa es una recta doble, puesto que, para cada punto de la recta, como por ejemplo el A , su inverso A' se hallará sobre la misma recta.



• FIGURA INVERSA DE UNA RECTA QUE NO PASA POR EL CENTRO DE INVERSIÓN:

Será una circunferencia que pasa por dicho centro.

Dado el centro de inversión O y un par de puntos inversos A y A' , hay que hallar la figura inversa de una recta r que no pasa por el centro de inversión O .

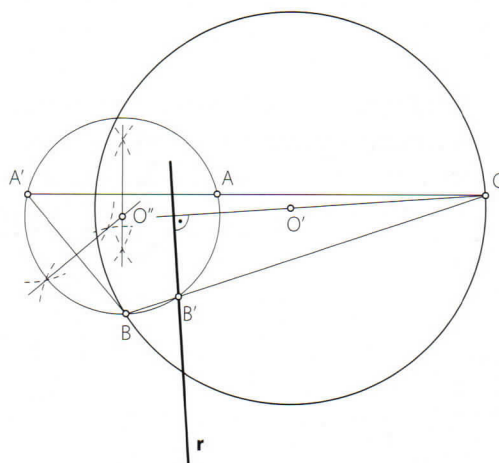
- Elegimos un punto B' cualquiera de la recta r dada y hallamos su inverso B mediante una circunferencia de centro O' que pasa por los puntos A , A' y B' .
- Por el centro de inversión O se traza la perpendicular a la recta r .

• FIGURA INVERSA DE UNA CIRCUNFERENCIA QUE PASA POR EL CENTRO DE INVERSIÓN:

Será una recta perpendicular al radio $\overline{OO'}$.

Dado el centro de inversión O y un par de puntos inversos A y A' , hallar la figura inversa de una circunferencia de centro O' que pasa por el centro de inversión.

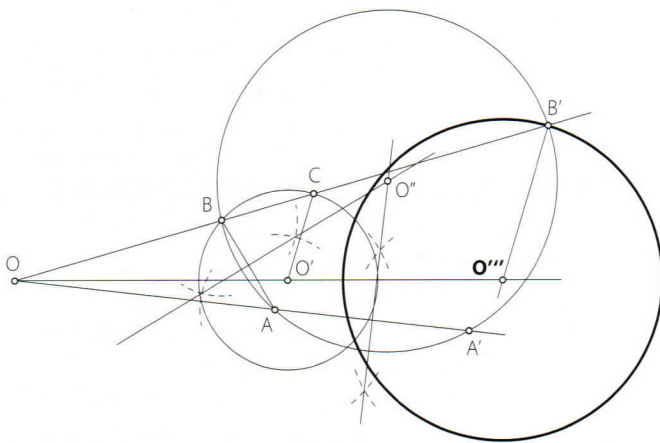
- Elegimos un punto B cualquiera de la circunferencia y hallamos su inverso B' mediante una circunferencia de centro O'' que pasa por los puntos A , A' y B .
- Por el centro de inversión se traza una recta que una O y O' , trazamos a continuación por B' la recta r perpendicular a la recta OO' .



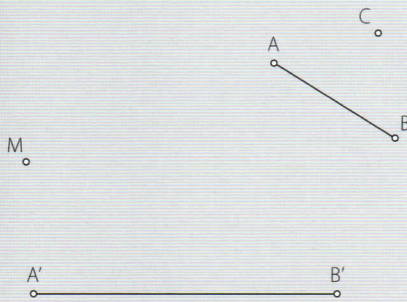
• **FIGURA INVERSA DE UNA CIRCUNFERENCIA DE CENTRO O' QUE NO PASA POR EL CENTRO DE INVERSIÓN:**

Dado el centro de inversión O y un par de puntos inversos A y A' y la circunferencia de centro O' .

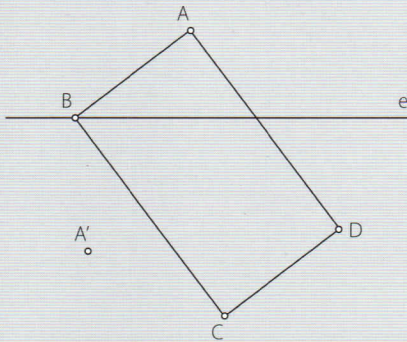
- Elegimos un punto B arbitrario de la circunferencia de centro O' , y se halla su inverso B' mediante la circunferencia de centro O'' , que pasa por los puntos A , A' y B . La recta que une O , B y B' corta a la circunferencia de centro O' en C .
- Al ser las dos circunferencias homotéticas, por el punto B' , homotético de C , se traza la recta paralela a $\overline{CO'}$ hasta cortar a la recta OO' en el punto O''' , centro de la circunferencia inversa que buscamos, cuyo radio es $\overline{O'''B'}$.



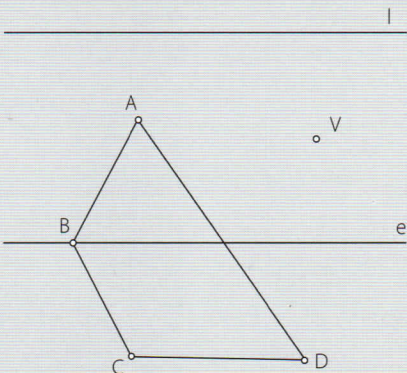
1. Hallar el punto homólogo del **C** conociendo un par de segmentos homólogos **AB** y **A'B'** y un punto doble **M**.



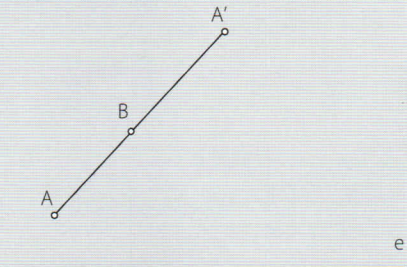
2. Hallar la figura homóloga del rectángulo **A-B-C-D**.



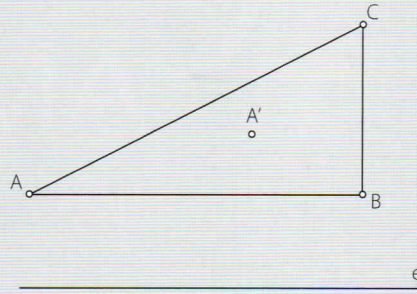
3. En la homología dada de centro **V**, eje **e** y recta límite **l**, determinar la figura homóloga del cuadrilátero **A-B-C-D**.



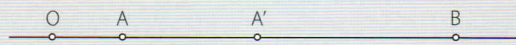
4. Hallar el punto afín de **B** conociendo el eje y un par de puntos afines **A** y **A'**.



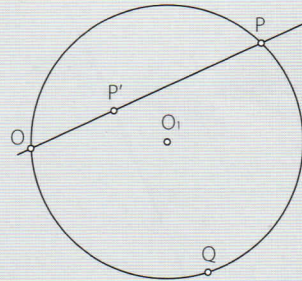
5. Hallar el triángulo afín del dado **A-B-C** conociendo el eje y un punto **A'** afín del **A**.



6. En la inversión determinada por el centro **O** y el par de puntos inversos **A-A'**, hallar **B'**.



7. En la figura propuesta la circunferencia pasa por el centro de inversión **O**, conocemos **P'**, que es el inverso de **P**. Hallar la figura inversa del arco **PQ**.



8. Hallar la circunferencia inversa de la dada.

