

POTENCIA

Eixo radical e centro radical

Sección áurea

Rectángulo áureo

TEMA 2

Obxectivos e orientacións metodolóxicas

Nesta unidade adquirirase con claridade o concepto de "potencia dun punto respecto dunha circunferencia". Como aplicación, obterase o "eixo radical de dúas circunferencias" en diversas posicións das mesmas e o "centro radical de tres circunferencias".

O alumno fará, máis adiante, aplicación desta teoría na resolución dalgún problema de tanxencias.

O desenvolvemento do tema pode facerse en dúas sesións.

1. Introducción

Unha circunferencia e un punto calquera, que pode ser exterior P , interior Q , ou pertencente a ela R (Fig. 1), relaciónanse entre si por medio dun valor constante.

Esta relación ten aplicación na resolución dalgúns casos de tanxencias, como veremos no tema 5.

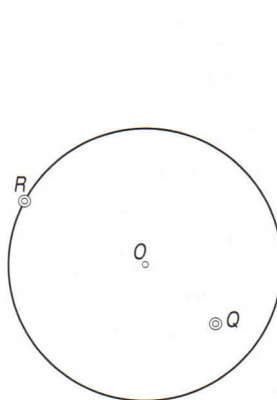


Fig. 1

2. Potencia dun punto respecto a unha circunferencia

As rectas a e b , que pasan polo punto P , cortan a circunferencia nos puntos A, A' e B, B' , respectivamente (Fig. 2).

Da análise da figura dedúcese que os triángulos PAB' e PBA' son semellantes por teren os ángulos iguais, xa que dous deles tamén o son: o de vértice P é común en ambos triángulos, e os de vértices A' e B' , por seren ángulos inscritos á circunferencia e abarcar ambos o mesmo arco $\widehat{AB}$ dela. Por tanto, os lados destes triángulos son proporcionais e cúmprese:

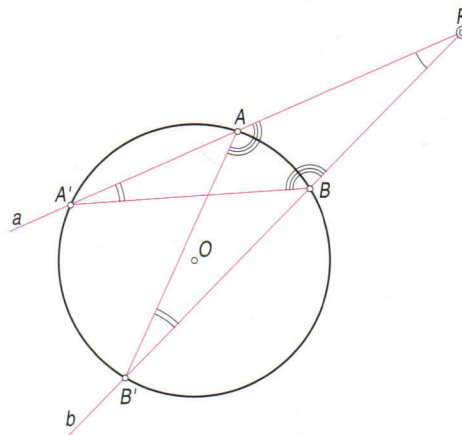


Fig. 2

$$\frac{PA}{PB} = \frac{PB'}{PA'}$$

ou ben

$$PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$$

Do que se deduce:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}} \quad \text{ou ben} \quad \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$$

O que demostra que é un valor constante dependente da circunferencia e da posición do punto Q respecto a ela, mais de valor negativo, xa que ao ser Q a orixe de todos os segmentos, se un deles, factor dun produto, se considera positivo, o outro, que ten sentido contrario, será negativo.

Por tanto:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \dots = -K$$

Do que se deduce:

A potencia dun punto Q interior a unha circunferencia respecto a esta é negativa.

Obsévese que, neste caso, $\sqrt{-K}$ non pode ser achada por tratarse dun número complexo, como tampouco poden trazarse tanxentes á circunferencia dende o punto Q interior a ela.

Por último, cando o punto R pertence á circunferencia de centro O , o valor da súa potencia respecto a esta é cero, xa que un dos segmentos é nulo (Fig. 6).

Esta conclusión non contradí as deducións anteriores, porque, neste caso, a potencia do punto R respecto á circunferencia de centro O tamén é unha constante.

Pódese considerar un caso límite cando a circunferencia ten raio cero, isto é, é un punto. Neste caso a potencia dun punto P respecto a outro O é o cadrado da distancia entre ambos (Fig. 7).

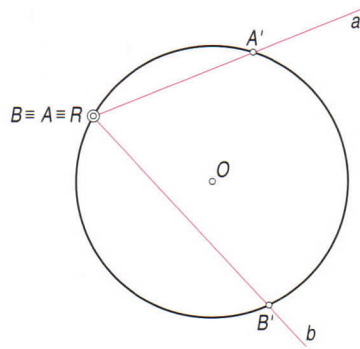


Fig. 6

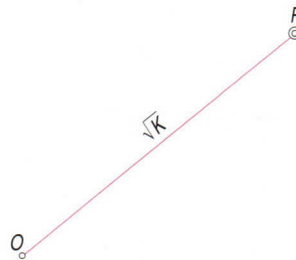


Fig. 7

3. Eixo radical de dúas circunferencias

O eixo radical de dúas circunferencias coplanares é unha recta, lugar xeométrico dos puntos do plano que teñen a mesma potencia respecto a ambas.

Se se aplica a esta definición unha das conclusións da epígrafe anterior, dedúcese a seguinte propiedade, da que deriva a máxima utilidade do concepto de potencia:

Se dende un punto P exterior a dúas circunferencias, pertencente ao eixo radical de ambas, se trazan rectas tanxentes a estas, os segmentos, cuxos extremos son o punto P e os puntos de tanxencia, son iguais (Fig. 8).

A lonxitude deses segmentos é a raíz cadrada da potencia do punto P respecto ás circunferencias O_1 e O_2 .

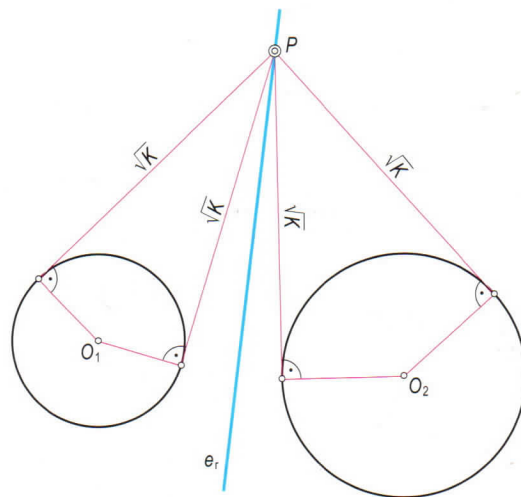


Fig. 8

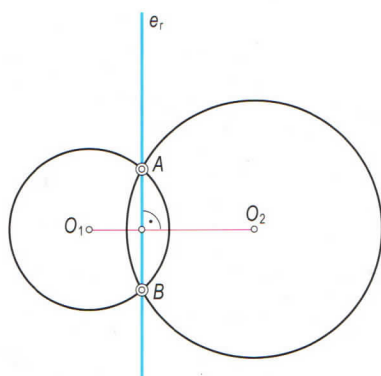


Fig. 9

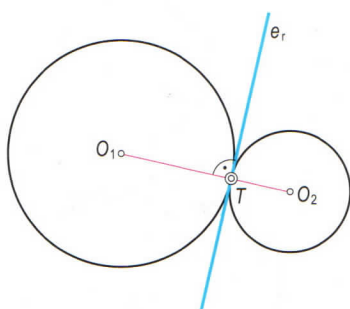


Fig. 10

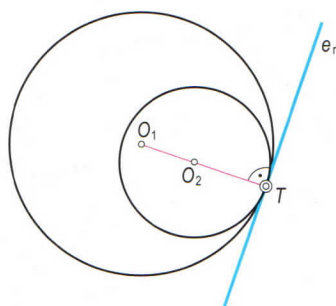


Fig. 11

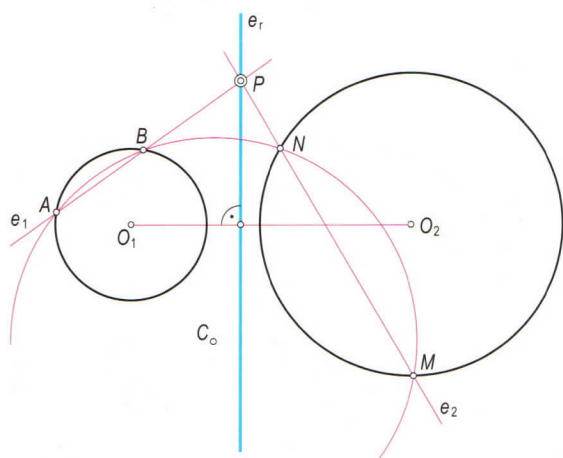


Fig. 12

O eixo radical de dúas circunferencias é unha recta perpendicular á recta que une os seus centros.

Imos ver como se obtén o eixo radical en diferentes casos segundo a posición relativa das dúas circunferencias ou cando unha delas, ou as dúas, se transforman noutro elemento xeométrico ao atinxir o seu raio un valor límite.

3.1. Circunferencias concorrentes (Fig. 9)

O eixo radical, e_r , de dúas circunferencias que se cortan de centros O_1 e O_2 é a recta que pasa polos puntos de intersección de ambas, A e B , cuxa potencia respecto a cada unha delas ten o mesmo valor: cero. O segmento $\overline{O_1O_2}$ é perpendicular ao eixo radical e_r por pertencer á mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

3.2. Circunferencias tanxentes (Figs. 10 e 11)

Tanto se se trata de circunferencias tanxentes exteriores (Fig. 10) como interiores (Fig. 11) o eixo radical e_r é a perpendicular ao segmento $\overline{O_1O_2}$, que pasa polo punto común de ambas as circunferencias T , cuxa potencia respecto a ambas é cero. Por tanto, o eixo radical de dúas circunferencias tanxentes é a recta tanxente común a ambas.

3.3. Circunferencias exteriores

3.3.1. Primeiro procedemento (Fig. 12)

Trátase, como no caso anterior, de coñecer un punto que teña a mesma potencia respecto ás circunferencias de centros O_1 e O_2 .

Os eixos radicais, e_1 e e_2 , que resultan de emparellar cada unha das circunferencias dadas con outra calquera de centro C e que corte ambas as dúas, córtanse no punto P .

O valor da potencia do punto P respecto á circunferencia de centro C é $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PM} \cdot \overline{PN}$. Esta igualdade significa que o punto P ten a mesma potencia respecto á circunferencia de centro O_1 , á que pertencen os puntos A e B , e á de centro O_2 , na que están os puntos M e N .

O eixo radical, e_r , das circunferencias de centros O_1 e O_2 é a perpendicular polo punto P á recta O_1O_2 .

3.3.2. Segundo procedemento (Fig. 13)

O punto medio, P , do segmento T_1T_2 , pertencente a unha das tanxentes comúns ás circunferencias de centros O_1 e O_2 , está á mesma distancia, $\sqrt{K}$, dos puntos T_1 e T_2 . Pódese afirmar, por tanto, que o punto P ten a mesma potencia, K , respecto ás dúas circunferencias e, en consecuencia, o eixo radical, e_r , de ambas é a perpendicular por P á recta O_1O_2 .

Na Fig. 13 pódese apreciar que o eixo radical e_r non coincide coa mediatriz do segmento T_1T_2 .

Só se ambas as circunferencias foren iguais coincidirán as dúas rectas (Fig. 14).

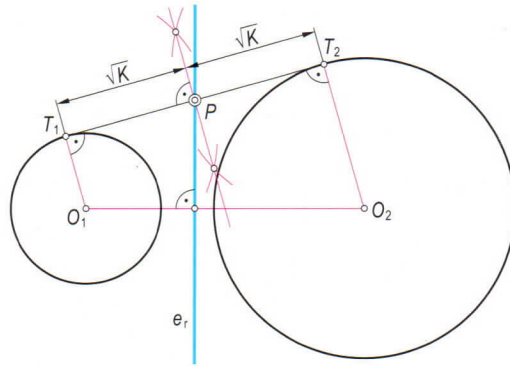


Fig. 13

3.4. Unha circunferencia interior á outra (Fig. 15)

Séguese o mesmo proceso que o do primeiro caso, cando as circunferencias eran exteriores.

Os eixos radicais e_1 e e_2 da circunferencia auxiliar de centro C con cada unha das dadas de centros O_1 e O_2 córtanse no punto P , que terá, respecto a estas dúas, a mesma potencia. Por tanto, o eixo radical, e_r , das dúas circunferencias dadas pasa por P e é perpendicular á recta O_1O_2 .

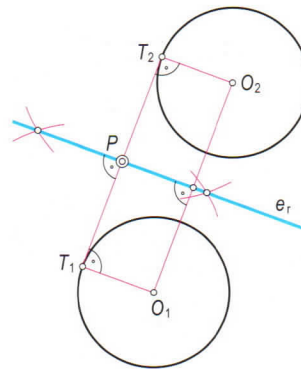


Fig. 14

3.5. Unha circunferencia e un punto O_2 (Fig. 16)

É un caso límite: o raio dunha das circunferencias, a de centro O_2 neste caso, é cero.

Para o cálculo do eixo radical pódese seguir calquera dos procedementos utilizados cando se trataba con dúas circunferencias exteriores. Neste caso optouse polo primeiro deles.

O eixo radical, e_1 , da circunferencia de centro O_1 e da auxiliar de centro C , que corta a primeira nos puntos A e B , é perpendicular á recta O_1C . Polo mesmo, o eixo radical, e_2 , da "circunferencia" O_2 e da auxiliar será perpendicular á recta O_2C e pasará polos puntos M e N , que, neste caso, coinciden con O_2 . Polo punto P , onde se cortan e_1 e e_2 , pasa o eixo radical, e_r , da circunferencia de centro O_1 e do punto O_2 , que será perpendicular á recta O_1O_2 .

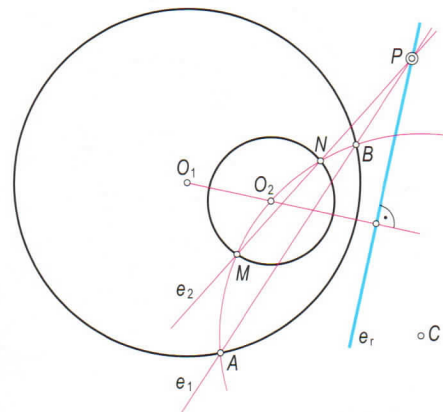


Fig. 15

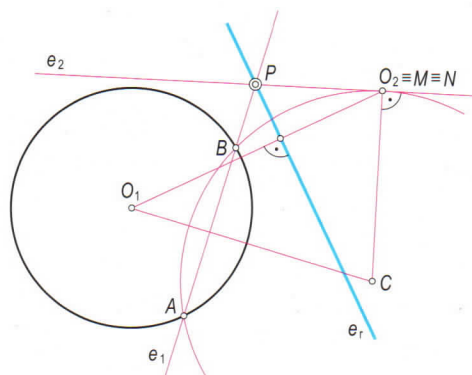


Fig. 16

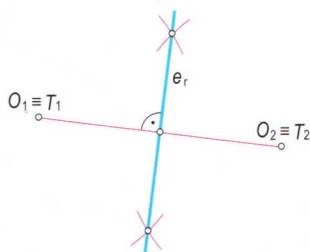


Fig. 17

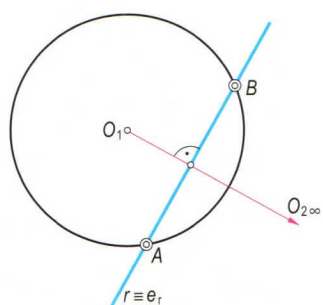


Fig. 18

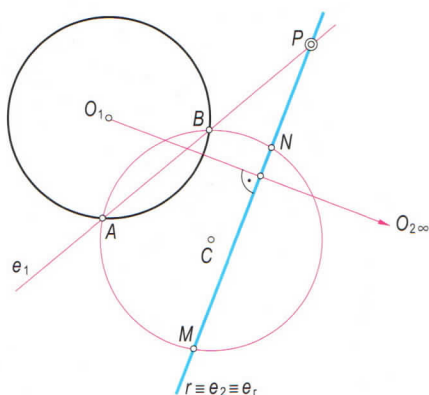


Fig. 19

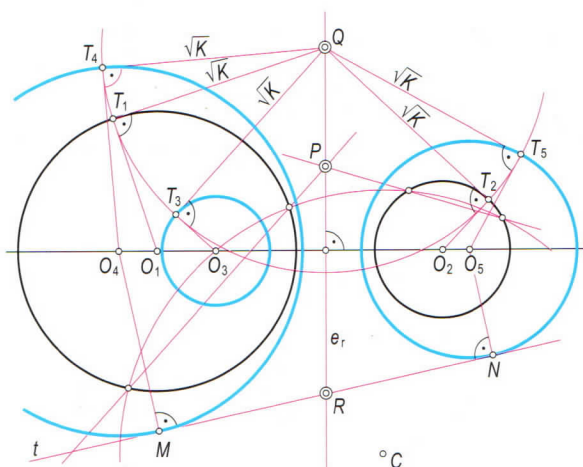


Fig. 20

3.6. Dous puntos (Fig. 17)

Cando o raio de ambas as circunferencias é cero, o segmento O_1O_2 tamén é o correspondente ao comprendido entre os puntos de tanxencia. Por tanto, o eixo radical é a mediatriz do segmento que determinan os dous puntos.

3.7. Unha circunferencia e unha recta r (Figs. 18 e 19)

Neste caso límite o raio da circunferencia de centro O_2 ten valor infinito, polo que esta se converte na recta r .

Se a circunferencia e a recta concorren, como na Fig. 18, o eixo radical, e_r , pasa polos puntos comúns de ambas, A e B , logo é a propia recta r , que, ademais, é perpendicular á recta O_1O_2 . Se a recta e a circunferencia, en vez de séren secantes, foren tanxentes, os puntos A e B coincidirán, polo que o eixo radical tamén será a recta.

Cando a circunferencia e a recta son exteriores, caso da Fig. 19, procédese como cando dúas circunferencias son exteriores. O eixo radical da circunferencia de centro O_1 e da auxiliar de centro C é a recta e_1 , e o da recta r e da circunferencia auxiliar é e_2 , coincidente con r . O punto P onde se cortan e_1 e e_2 pertence ao eixo radical, e_r , da circunferencia de centro O_1 e da recta r , que, ao ter que ser perpendicular á recta O_1O_2 , coincide coa recta r .

En resumo:

O eixo radical dunha circunferencia e unha recta é sempre a propia recta.

4. Circunferencias coaxiais

Na epígrafe anterior achamos o eixo radical de dúas circunferencias, mais poden ser máis de dúas as que teñan un eixo radical común a todas elas. O conxunto de circunferencias que teñen o mesmo eixo radical denomínanse circunferencias coaxiais, e dise que forman un feixe. Os centros de todas as circunferencias do feixe pertencen a unha recta perpendicular ao eixo radical común a todas elas.

Na Fig. 20 determínase un feixe de circunferencias coaxiais con outras dúas exteriores dadas de centros O_1 e O_2 .

Con axuda da circunferencia auxiliar de centro C calcúlase o eixo radical, e_r , de ambas. Con centro nun punto calquera, Q , de e_r e raio $QT_1 = QT_2 = \sqrt{K}$ trázase a circunferencia que conterá todos os puntos, $T_3, T_4, T_5, \dots, T_n$ de tanxencia das circunferencias do feixe coas rectas tanxentes a elas que pasan polo punto Q . As perpendiculares a estas polos citados puntos cortan a recta O_1O_2 nos puntos $O_3, O_4, O_5, \dots, O_n$, que son centros das circunferencias coaxiais coas primeiras.

Unha recta t , tanxente común a dúas circunferencias calquera deste feixe, corta o eixo radical nun punto R que equidista dos puntos M e N de tanxencia, xa que deberá cumprirse:

$$RM = RN = \sqrt{K}$$

Cando as dúas circunferencias iniciais O_1 e O_2 se cortan, como na Fig. 21, ou son tanxentes, caso da Fig. 22, cúmprense as mesmas propiedades deducidas anteriormente, aínda que o proceso se simplifica, xa que o trazado do eixo radical é inmediato e a determinación de circunferencias coaxiais coas iniciais non require ningún cálculo. Abonda con que teñan o centro na recta O_1O_2 e que pasen por A e B , puntos cuxa potencia é cero respecto ao feixe, no primeiro caso, ou que sexan tanxentes ao eixo radical no punto T , no segundo.

5. Centro radical de tres circunferencias

O centro radical de tres circunferencias é o punto do plano que ten a mesma potencia respecto ás tres circunferencias.

Segundo esta definición, o centro radical C_r é o punto de intersección dos tres eixos radicais das circunferencias tomadas dúas a dúas (Fig. 23).

Na epígrafe 3, para achar o eixo radical de dúas circunferencias, achábase un punto deste, P , con axuda dunha circunferencia auxiliar de centro C . Neses casos P era o centro radical das dúas circunferencias iniciais de centros O_1 e O_2 e da auxiliar de centro C .

Se os centros das tres circunferencias estiveren aliñados, o centro radical será un punto do infinito, xa que os tres eixos radicais serán paralelos.

Igual que nos casos analizados na obtención do eixo radical, o raio dalgunha das circunferencias que interveñen na determinación do centro radical pode ter un valor límite, cero ou infinito. Para achar nestes casos o centro radical, trázanse dous dos eixos radicais aplicando os razoamentos vistos anteriormente.

Se, dende o centro radical de tres circunferencias, se trazan as rectas tanxentes a estas, os puntos de tanxencia pertencen a unha circunferencia de centro C_r e raio $\sqrt{K}$ (Fig. 24).

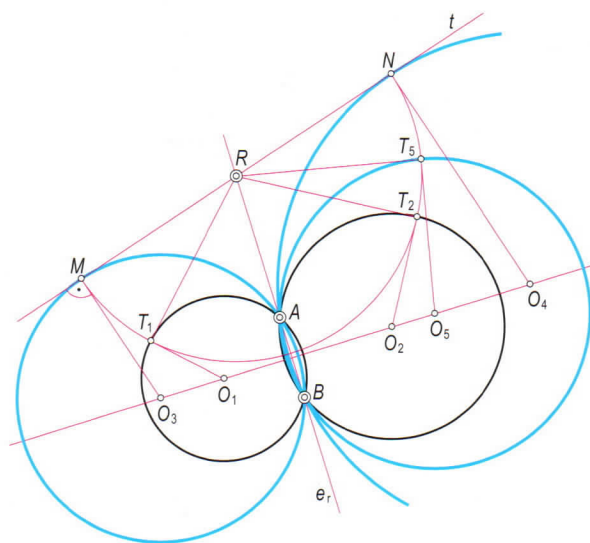


Fig. 21

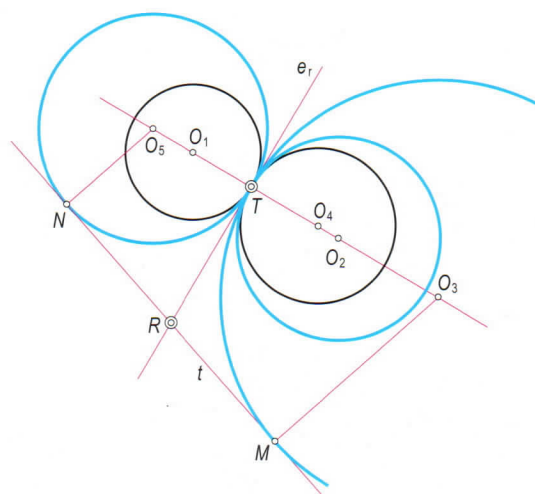


Fig. 22

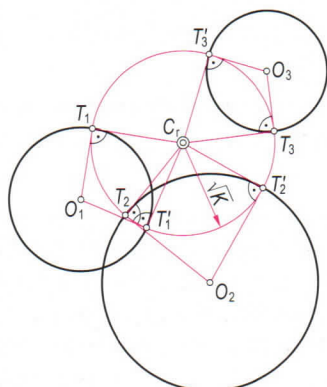


Fig. 24

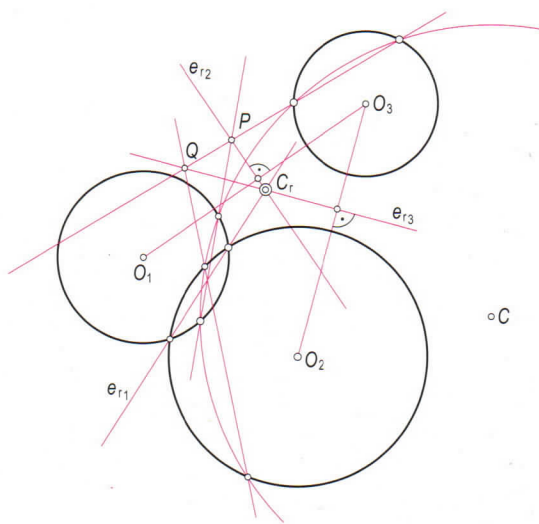


Fig. 23

7. Obtención gráfica do segmento áureo doutro dado

Acabamos de demostrar que unha das relacións entre un segmento dado, m , e o seu áureo, x , é que, pola súa parte, o segmento m é áureo de $m + x$, polo que deberá cumprirse: $m^2 = x(x + m)$.

Esta fórmula coincide coa que resulta ao tomar na Fig. 28 a potencia do punto P respecto á circunferencia de centro O e diámetro m , na que m é igual a $\sqrt{K}$, a raíz cadrada da potencia. Por tanto, para calcular x , segmento de ouro de m , trázase a circunferencia de diámetro m tanxente en T ao segmento $PT = m$. A recta que une o punto P co centro da circunferencia corta esta nos puntos A e A' . O segmento $\overline{PA} = x$ é o segmento áureo de m e, este, ao mesmo tempo, é o de $\overline{PA'} = x + m$.

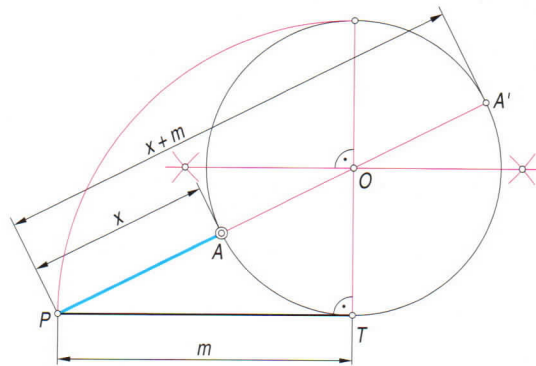


Fig. 28

8. Obtención gráfica dun segmento coñecendo o seu áureo (Fig. 29)

Se repetimos o razoamento e o trazado anteriores, mais facendo que o segmento x , agora coñecido, ocupe a posición que antes ocupaba o segmento m , resulta que $m - x$ é o segmento de ouro de x e este, ao mesmo tempo, é o de m , que é o que se buscaba.

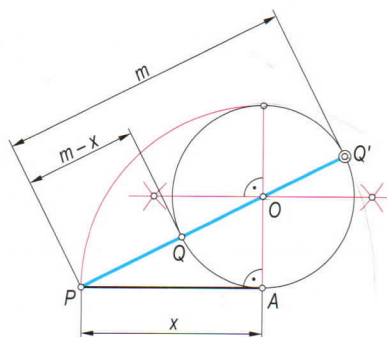


Fig. 29

9. Rectángulo áureo

É aquel cuxo lado menor é segmento áureo do maior.

Na antigüidade os xeómetras consideraron que na relación áurea existía unha harmonía de proporcións, razón pola que, con frecuencia, están presentes en detalles construtivos de edificios antigos.

O rectángulo de ouro ten como propiedade máis importante a posibilidade de efectuar unha separación ilimitada de rectángulos semellantes a el, por tanto tamén áureos, cada vez de menor tamaño.

Se no rectángulo $ABCD$ da Fig. 30, de dimensións calculadas en epígrafes anteriores $AB = x$ e $AD = m$, se constrúe sobre o lado CD o cadrado $CDEF$, delimitase o rectángulo $ABFE$ semellante ao primeiro. Ao repetir o proceso a partir do último rectángulo pódese continuar isto indefinidamente, co que se obteñen os rectángulos $AGHE$, despois $AGIJ...$, de proporcións áureas.

Se se opera á inversa, agregando ao rectángulo inicial $ABCD$ o cadrado $BLKC$, cuxo lado é o maior do rectángulo de partida, obtense outro rectángulo, $ALKD$, semellante ao inicial, e pódese continuar tamén indefinidamente.

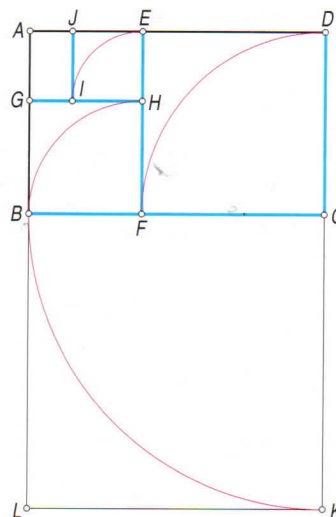


Fig. 30